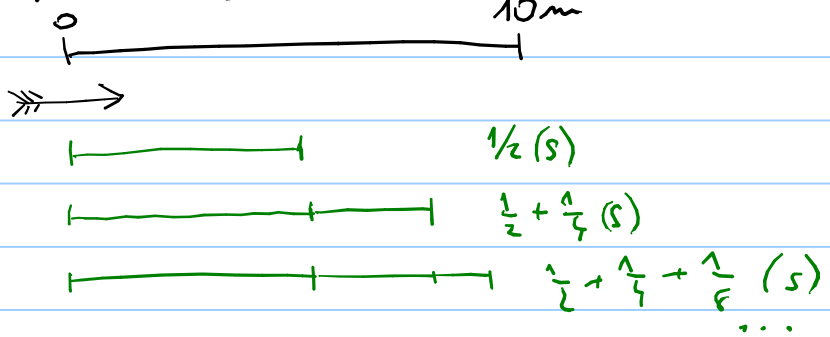
POŘÁDNÉ VRÁVORÁNÍ (O PŘEROVNÁVÁNÍ ŘAD)

Jirka Bouchala

PŘÍKLADY

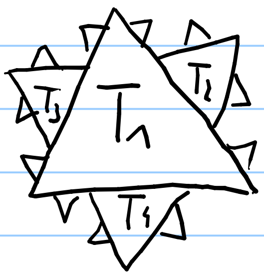
1. Achiles a želva

„Letící šíp" ... rychlost 10 m/s



2. $\pi = 3{,}14159\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \ldots = ?$

3. „Kochova sněhová vločka"



$$\text{Obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)$$
$$\| $$
$$\text{Obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

4.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = ?$$

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$$

$$S = 1 - (\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots}_{=S}) = 1 - S \implies S = \frac{1}{2}$$

...

Definice Řadou rozumíme výraz

$$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \overset{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

kde $\forall n\in\mathbb{N}: a_n\in\mathbb{R}$.

Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$S_n := a_1+\dots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Existuje-li $\lim S_n = S \in \mathbb{R}^*$, nazýváme ji součtem řady $\sum a_n$.

Je-li součet $S\in\mathbb{R}$, říkáme, že řada $\sum a_n$ konverguje.

Příklady

- $1+2+3+4+\dots+n+\dots = \infty$, protože

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \to \infty.$$

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$, protože

$$S_n = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2^n}-1}{1-2} \to 1.$$

- $1-1+1-1+1-1+\dots$ nemá součet,

protože $(S_n) = 1,0,1,0,1,0,1,0,\dots$ nemá limitu.

- $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\ldots = 1,$

  protože $(s_n) = 1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1,\ 1+\frac{1}{3},\ 1,\ 1+\frac{1}{4},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{n},\ \ldots \to 1.$

- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje, protože

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ s_n = 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \le 1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1+1-\frac{1}{n} < 2,$$

$\forall n\in\mathbb{N}:\ s_n < s_{n+1}.$

Věta (o BC podmínce)

Posloupnost (s_n) je konvergentní (tzn. má konečnou limitu) právě tehdy, platí-li:

(BC) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0): |s_m - s_n| < \varepsilon.$

Důsledek

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní (tzn. má konečný součet) právě tehdy, platí-li:

(BC) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}): \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$

Věta (nutná podmínka konvergence)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\lim a_n = 0$

Dk. $a_n = s_n - s_{n-1} \longrightarrow s - s = 0$, $s \in \mathbb{R}$

cbd.

Příklad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nekonverguje, protože

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \left|\sum_{k=n+1}^{n+n} a_k\right| \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Všimněme si, že přesto $\frac{1}{n} =: a_n \to 0$

Domácí cvičení Vyškrtněme z řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

všechny členy, které obsahují ve svém zápise nějakou (předem zvolenou) cifru (třeba „6“). Dokažte, že „prořeďovaná“ řada má již konečný součet.

Pozorování. Uvažujme řadu $\sum |a_n|$. Pak je příslušná posloupnost částečných součtů (s_n) je neklesající, a proto existuje součet $\sum |a_n|$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim s_n = \sup \{ s_n : n \in \mathbb{N} \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Příklad. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Věta $\sum |a_n|$ konverguje $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ konverguje

Dk.

$$\Big\Downarrow \text{(BC)} \qquad\qquad\qquad \Big\Uparrow \text{(BC)}$$

$$\left[\forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0\, \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \right] \Longrightarrow \left[\forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0\, \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \right]$$

cbd.

Definice.

- Pokud $\sum |a_n|$ konverguje, říkáme, že $\sum a_n$ konverguje <u>absolutně</u>
- $\sum |a_n| = \infty$, $\sum a_n$ konverguje, říkáme, že $\sum a_n$ konverguje <u>neabsolutně</u>

Příklad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ je neabsolutně konvergentní.

<u>Dk.</u> Již víme $\sum \frac{1}{n} = \infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

$$S_{2n} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)}_{\geq 0}$$

$$\underline{S_{2n} \nearrow S'}$$

$$S_{2n+1} = 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{\geq 0} - \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)}_{\geq 0}$$

$$S_{2n+1} \searrow S''$$

$$1 \geq S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \geq S_{2n} \implies \underline{S' \in \mathbb{R}}$$

$$\underline{S_{2n+1}} \to S' + 0 = \underline{S'}$$

$$\left.\right\} \quad S_n \downarrow S' \in \mathbb{R}$$

<u>cbd.</u>

Věta Buď $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq 0$,

$$s_n = a_1 + \dots + a_n.$$

Pak

$$s = \lim s_n = S := \sup \Big\{ \sum_{k\in K} a_k : \overset{\emptyset}{\neq} K \subset \mathbb{N} \text{ konečná} \Big\}$$

Důsledek.

$\sum a_n$ konverguje $\iff (s_n)$ je shora omezená $\iff S \in \mathbb{R}$

Dk.

- $K_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$$s_n = \sum_{k \in K_n} a_k \in \Big\{ \sum_{k\in K} a_k : K \subset \mathbb{N} \text{ konečná} \Big\}$$

$$\Downarrow$$

$$\big[\forall n \in \mathbb{N}: s_n \leq S\big] \implies s \leq S$$

- $\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}$ konečná $\implies \sum_{k\in K} a_k \leq s_{\max K} \leq s \implies S \leq s$

cbd.

Definice. Je-li $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce

(tzn. φ je definovaná na $\mathbb{N}$, prostá, na), říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Důsledek! přerovnání řady

Je-li $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq 0$ a jestliže $\sum a_{\varphi(n)}$ nějaké přerovnáním $\sum a_n$, je součet obou řad stejný.

(Speciálně – obě současně konvergují

nebo

obě současně divergují)

Def. $a \in \mathbb{R}$

$$a^+ := \max\{a, 0\}$$

$$a^- := \max\{-a, 0\}$$

Takže

$$a = a^+ - a^- \,;\quad a^+, a^- \geq 0 \,;\quad |a| = a^+ + a^-$$

Věta Buď $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \in \mathbb{R}$. Pak

a) $\sum a_n$ konverguje absolutně $\iff$ řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ konvergují,

b) $\sum a_n$ konverguje neabsolutně $\implies \sum a_n^+ = \sum a_n^- = +\infty$,

c) $\sum a_n$ konverguje absolutně $\iff \left[\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- \in \mathbb{R}\right]$,

d) je-li $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$ bijekce,

konverguje $\sum a_n$ absolutně právě tehdy,

konverguje-li absolutně $\sum a_{\varphi(n)}$

(obě řady pak mají týž součet).

Dk.

a) „$\implies$" $\begin{array}{l} 0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \\ 0 \leq a_n^- \leq |a_n| \end{array} \implies \left[\sum a_n \text{ konverg. absolutně} \implies \sum a_n^+, \sum a_n^- \text{ konverg.}\right]$

„$\Leftarrow$"

$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$S_n = |a_1| + \ldots + |a_n| = a_1^+ + a_1^- + \ldots + a_n^+ + a_n^- =$

$= \underbrace{a_1^+ + \ldots + a_n^+}_{\to \sum a_n^+ \in \mathbb{R}} + \underbrace{a_1^- + \ldots + a_n^-}_{\to \sum a_n^- \in \mathbb{R}} \longrightarrow \sum a_n^+ + \sum a_n^- \in \mathbb{R},$

b) $a^+ \overset{\text{ozn.}}{=} \sum a_n^+, \quad a^- \overset{\text{ozn.}}{=} \sum a_n^-$

i) $a^+, a^- \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n$ konv. absolutně (viz a)

<u>SPOR</u>

ii) $a^+ = \infty, a^- \in \mathbb{R} \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^- \to +\infty$

<u>SPOR</u>

iii) $a^+ \in \mathbb{R}, a^- = +\infty \Rightarrow S_n \to -\infty$ <u>SPOR</u>

i, ii, iii) $\Rightarrow \left(\sum a_n \text{ konv. neabsolutně} \Rightarrow a^+, a^- = +\infty\right),$

c) zřejmé díky a),

d) plyne z c) a z důsledku! předchozí věty.

<u>cbd.</u>

Věta Nechť $\sum a_n$ je neabsolutně konvergentní a $S \in \mathbb{R}^*$.

Pak • existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$

tak, že $\sum a_{\varphi(n)} = S$,

• existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$

tak, že $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\psi(k)} = -\infty$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_{\psi(k)} = +\infty$$

(tzn. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ nemá součet).

Dk. Nechť (b_n) resp. (c_n) je posloupnost vybraná z posloupnosti (a_n) obsahující (jako členy) právě všechna $a_n \geq 0$ resp. $a_n < 0$.

Pak

$$\left.\begin{array}{l}\sum a_n \\ \text{konv.} \\ \text{neabsolutně}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \infty, \\ t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = -\infty, \end{array}$$

$$b_n \to 0, \quad c_n \to 0.$$

1) Je-li $s \in \mathbb{R}$

- existuje nejmenší $p_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$s_{p_1} = b_1 + b_2 + \dots + b_{p_1} > s$$

- existuje nejmenší $q_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$s_{p_1} + t_{q_1} = b_1 + \dots + b_{p_1} + c_1 + \dots + c_{q_1} < s$$

$$\dots$$

TA PŘEROVNANÁ ŘADA

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{p_1} + c_1 + \dots + c_{q_1} + b_{p_1+1} + \dots + b_{p_2} + c_{q_1+1} + \dots + c_{q_2} + \dots$$

$$s_{p_{n-1}} + t_{q_{n-1}} \leq s < s_{p_n} + t_{q_{n-1}}$$

$$s_{p_n} + t_{q_{n-1}} \geq s > s_{p_n} + t_{q_n}$$

$$b_{p_n} \to 0 \,, \quad c_{q_n} \to 0$$

$\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0:\quad b_{p_n} < \varepsilon,\quad c_{q_n} > -\varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0:\quad S-\varepsilon < s_{p_n} + t_{q_n} < S,$

$$S < s_{p_{n+1}} + t_{q_n} < S+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0:\quad p_n + q_n \le k \le p_{n+1} + q_n$

$$\Downarrow$$

k-tý částečný součet PŘEROVNANÉ ŘADY leží v $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$

$$\Uparrow$$

$$p_{n+1} + q_n \le k \le p_{n+1} + q_{n+1}$$

Tedy – přerovnaná řada má součet S

2) je-li $S = +\infty$ – analogická konstrukce

$$s_{p_n} + t_{q_{n-1}} > n$$

$$s_{p_n} + t_{q_n} < n$$

3) je-li $S = -\infty$ ... analogicky s $\uparrow$

4) $s_{p_n} + t_{q_{n-1}} > n,\quad s_{p_n} + t_{q_n} < -n$ ... podmínky k nalezení ψ ctd.