Katedra
aplikované
matematiky

Občasný seminář z matematické analýzy

Petr Vodstrčil

20. 3. 2018

$\boxed{\text{VĚTA (AG nerovnost)}}$

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou nezáporná čísla. Pak

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

přičemž rovnost nastává, právě když platí

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

DŮKAZ

Je-li některé z čísel $x_1, \dots, x_n$ nulové, je tvrzení triviální. Lze tedy předpokládat, že $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$.

Označme

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (\in \mathbb{R}^+)$$

Uvažujme ryze konkávní funkci

$$\boxed{f(x) = \ln x}$$

a tečnu sestrojenou k jejímu grafu v bodě $(x_0, \ln x_0)$. Tato tečna je dána rovnicí

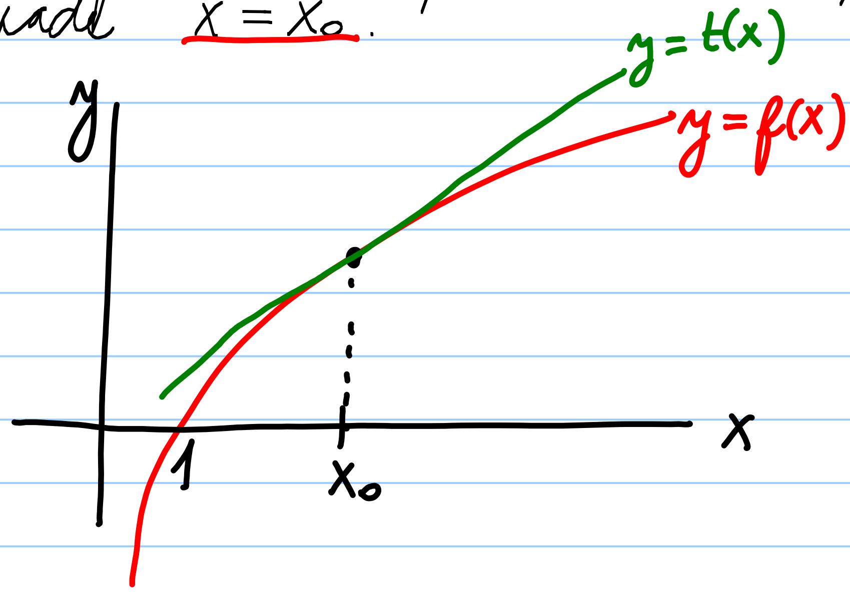
$$\boxed{t(x) = \ln x_0 + K \cdot (x - x_0).}$$

směrnice tečny ani není podstatná – důležité je toto

Z ryzí konkávnosti snadno plyne

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^+): \quad f(x) \leq t(x).} \qquad ⊛$$

Rovnost $f(x) = t(x)$ přitom nastává pouze v případě $x = x_0$.



Z nerovnosti (*) dostaneme

$$\boxed{(\forall i \in \{1, \dots, n\}) : \; f(x_i) \le t(x_i)}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} t(x_i) \qquad \left[\begin{array}{l} t(x) = \ln x_0 + k\cdot(x - x_0) \\ f(x) = \ln x \end{array}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \le \sum_{i=1}^{n} \left[\ln x_0 + k\cdot(x_i - x_0)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) \le n \cdot \ln x_0 + \underbrace{k\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n x_0\right)}_{=0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}.$$

Z důkazu je navíc jasné, že rovnost nastává, právě když $\boxed{x_1 = x_2 = \ldots = x_n}$. □

Podobně bychom mohli dokázat i tzv. Jensenovu nerovnost.

VĚTA (JENSENOVA NEROVNOST)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze konvexní (resp. ryze konkávní) na intervalu I. Pak

$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in I)(\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1):$$

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{resp.} \\ \boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).} \end{array}\right)$$

Rovnost v uvedených nerovnostech přitom nastane, právě když platí $\boxed{x_1 = x_2 = \ldots = x_n}$.

VĚTA (YOUNGOVA NEROVNOST)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Je-li navíc $pq > 0$, pak
$$\boxed{a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}},$$
přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\boxed{a^p = b^q}$.
- Je-li navíc $pq < 0$, pak
$$\boxed{a \cdot b \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}},$$
přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\boxed{a^p = b^q.}$

DŮKAZ

- Pokud $pq > 0$, jedná se o přímý důsledek Jensenovy nerovnosti, neboť
$$\boxed{\ln\Big(\underbrace{\frac{1}{p}}_{\lambda_1} \cdot a^p + \underbrace{\frac{1}{q}}_{\lambda_2} \cdot b^q\Big) \geq \underbrace{\frac{1}{p} \cdot \ln(a^p) + \frac{1}{q} \cdot \ln(b^q)}_{\ln(ab)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.}$$

- Situace $\underline{pq<0}$ je o něco složitější. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\underline{p>0 \land q<0}$. Pak ovšem jistě bude $\underline{p \in (0,1)}$.

Jestliže $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq 0$, je tvrzení triviální.

Můžeme tedy předpokládat, že platí $\boxed{\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} > 0.}$

Z Jensenovy nerovnosti pak plyne

$$\ln\left[\underbrace{p}_{\lambda_1}\cdot\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) + \underbrace{(1-p)}_{\lambda_2}\cdot b^q\right] \geqslant$$

$$\geqslant p\cdot\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) + (1-p)\cdot\ln\left(b^q\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln\left(a^p\right) \geqslant p\cdot\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) + (1-p)\cdot\ln\left(b^q\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{p}\ln\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\ln\left(b^q\right) \geqslant \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$$

$$\Updownarrow$$

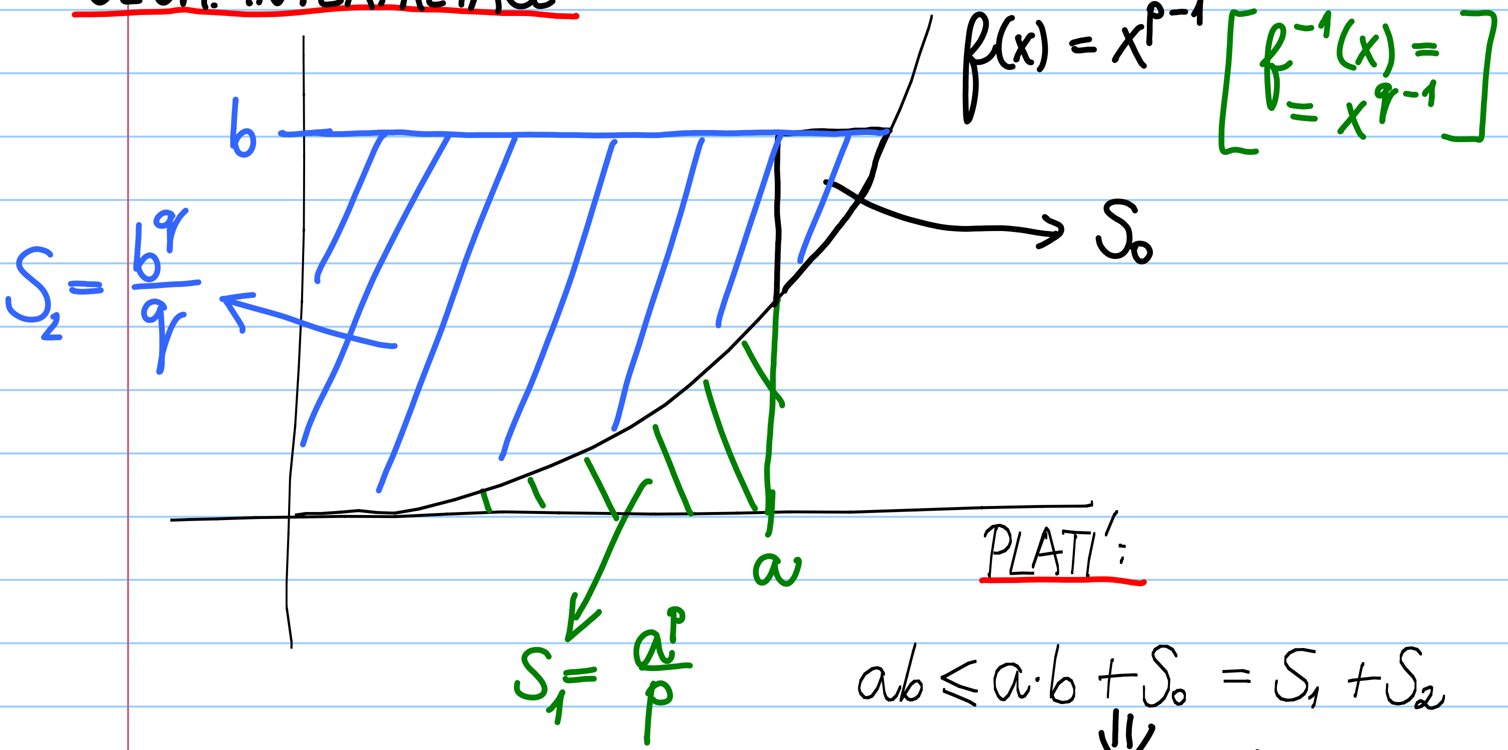
$$\boxed{ab \geqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.}$$

$\square$

POZNÁMKA

V prvním případě zůstává nerovnost v platnosti i pro nulové a nebo b. (Klademe-li $0^p = 0^q = 0$.)

GEOM. INTERPRETACE



PLATÍ:

$$ab \leq a \cdot b + S_0 = S_1 + S_2$$

$\Downarrow$

TVRZENÍ.

DOMÁCÍ CVIČENÍ

Pokuste se o geometrický důkaz druhé varianty Youngovy nerovnosti.

DŮSLEDEK (obecná Bernoulliova nerovnost)

Nechť $x \geq -1$ a $p \geq 1$. Pak

$$\boxed{(1+x)^p \geq 1 + px.}$$

DŮKAZ

[$0^0 = 0$]

Je-li $x = -1$ nebo $p = 1$, je tvrzení triviální. Předpokládejme proto, že $x > -1$ a $p > 1$.

Zvolme $q > 1$ tak, aby $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a použijme Youngovu nerovnost

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

pro $a = 1+x$, $b = 1$.

Odtud

$$1 + x \leq \frac{(1+x)^p}{p} + \frac{1}{q} \implies$$

$$\implies \underbrace{1 - \frac{1}{q}}_{\frac{1}{p}} + x \leq \frac{(1+x)^p}{p} \quad \overset{/ \cdot p}{\implies} \quad \text{[} p \text{ je kladné]}$$

$$\implies \boxed{1 + px \leq (1+x)^p} \implies \text{TVRZENÍ.} \qquad \square$$

DOMÁCÍ CVIČENÍ Jak by vypadala Bernoulliova nerovnost, pokud by bylo $p < 1$?

VĚTA (HÖLDEROVA NEROVNOST)

Nechť $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$,
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $pq > 0$. [odtud $p, q > 1$]

Pak

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $(|x_1|^p, \ldots, |x_n|^p)$ a $(|y_1|^q, \ldots, |y_n|^q)$ lin. závislé.

POZNÁMKA

V případě $pq < 0$ [$\Rightarrow p < 0$, $q \in (0,1)$, nebo naopak] by platila nerovnost s opačným znaménkem. Museli bychom však předpokládat nenulovost čísel x_i popř. y_i.

[Není totiž definováno 0^p pro $p < 0$.]

POZNÁMKA

Zvolíme-li v Hölderově nerovnosti $p = q = 2$, dostaneme známou Cauchyovu nerovnost.

DŮKAZ

Nechť jsou splněny předpoklady věty. Lze předpokládat, že $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \neq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \neq 0$.

V opačném případě je dokazovaná nerovnost triviální.

OZNAČME

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0 \,, \quad Y = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} > 0$$

a pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ definujme

$$\boxed{\tilde{x}_i = \frac{|x_i|}{X}} \quad \text{a} \quad \boxed{\tilde{y}_i = \frac{|y_i|}{Y}}.$$

[Všimněme si, že $\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^p = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i^q = 1.$]

Z Youngovy nerovnosti plyne, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\boxed{\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i \leq \frac{\tilde{x}_i^p}{p} + \frac{\tilde{y}_i^q}{q}}.$$

10

Sečtením obdržíme

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i \leq \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^{\,p}}}_{=1} + \frac{1}{q} \cdot \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i^{\,q}}}_{=1} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ODTUD

$$\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\left(\frac{\boxed{|x_i|}}{X} \cdot \frac{\boxed{|y_i|}}{Y}\right)}^{\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i} \leq 1, \quad tj. \qquad \boxed{X, Y > 0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq X \cdot Y.$$

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad Y = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\square$

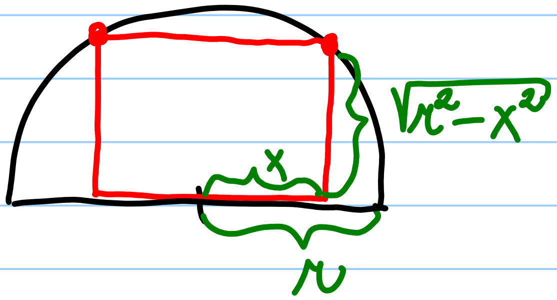
DOMÁCÍ CVIČENÍ

Rozmyslete si dodatek o případné rovnosti a rovněž i případ $pq < 0$.

NĚKTERÉ ÚLOHY NA EXTRÉMY ŘEŠENÉ BEZ DERIVACÍ

ÚLOHA

Do půlkruhu s poloměrem $r > 0$ vepište obdélník o maximálním obsahu (viz obrázek).



$[x \in (0, r)]$

ŘEŠENÍ

$$S = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \implies$$

$$\left(\tfrac{1}{2}S\right)^2 = x^2 \cdot (r^2 - x^2) \overset{AG}{\leq} \left(\frac{x^2 + (r^2 - x^2)}{2}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{r^2}{2}\right)^2}_{\text{konst.}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S \leq r^2}.$$

Rovnost přitom nastane, právě když

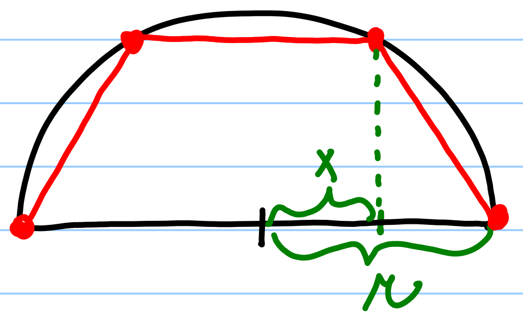
$$x^2 = r^2 - x^2 \iff \boxed{x = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

To ale znamená, že rozměry optimálního obdélníku jsou

$$\boxed{r \cdot \sqrt{2} \times r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

ÚLOHA

Do půlkruhu s poloměrem $r > 0$ vepište lichoběžník o maximálním obsahu (viz obrázek).



$[x \in (0, r)]$

ŘEŠENÍ

Jistě $$S = \frac{2r + 2x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} =$$
$$= (r+x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \implies$$

$$\implies S^2 = (r+x)^2 \cdot \underbrace{(r^2 - x^2)}_{(r+x)(r-x)} = (r+x)^3 \cdot (r - x).$$

Pak

$$3S^2 = (r+x)(r+x)(r+x)(3r-3x) \overset{AG}{\leq}$$
$$\leq \left[\frac{(r+x) + (r+x) + (r+x) + (3r - 3x)}{4} \right]^4 =$$
$$= \underbrace{\left(\frac{3}{2} r \right)^4}_{\text{konst.}} \implies$$

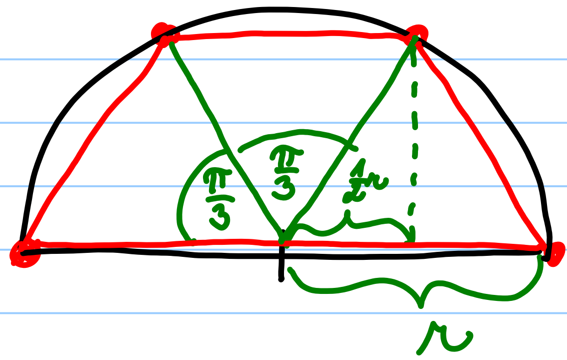
$$\implies S \cdot \sqrt{3} \leq \left(\frac{3}{2} r \right)^2 = \frac{9}{4} r^2 \implies$$

$$\implies \boxed{S \leq \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} r^2.}$$

Rovnost přitom nastane, právě když

$$r+x = 3r-3x \iff \boxed{x = \frac{r}{2}}.$$

Optimální lichoběžník tedy bude vypadat následovně:



ÚLOHA

Ze všech válců o daném objemu $V>0$ najděte ten, který má minimální povrch.

ŘEŠENÍ

$$V = \pi r^2 \cdot v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}.$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \overset{\text{AG}\ [r>0]}{\geq}$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = \underbrace{3 \cdot \sqrt[3]{2\pi V^2}}_{\text{konst.}}.$$

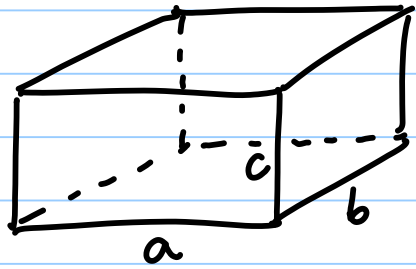
Rovnost přitom nastane, právě když $\boxed{2\pi r^2 = \frac{V}{r}}$

$$\iff \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} \quad \left(v = \frac{V}{\pi r^2} = 2r \right).$$

ÚLOHA

Ze všech krabic bez víka (ve tvaru kvádru) o daném objemu najděte tu, na jejíž výrobu je třeba co nejméně materiálu.

ŘEŠENÍ



$[a, b, c > 0]$

$$V = abc, \quad \underset{\text{(množství materiálu)}}{S} = ab + 2ac + 2bc.$$

Platí, že

$$S = ab + 2ac + 2bc \overset{AG}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{ab \cdot 2ac \cdot 2bc} =$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{4a^2b^2c^2} = \underbrace{3 \cdot \sqrt[3]{4V^2}}_{\text{konst.}}.$$

Rovnost přitom nastane, právě když

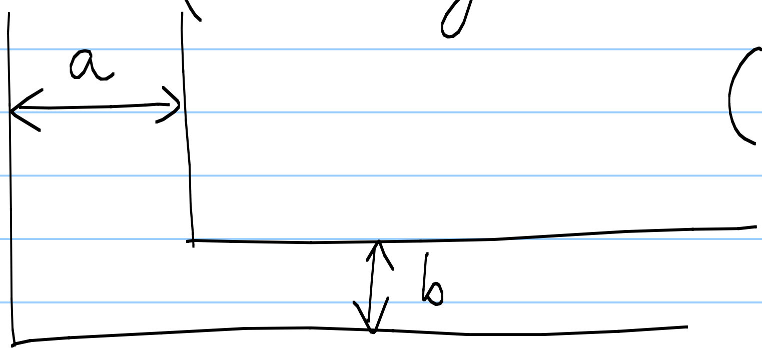
$$\boxed{ab = 2ac = 2bc} \iff \boxed{b = 2c \wedge a = b}.$$

DOMÁCÍ CVIČENÍ

Bez použití derivací najděte globální extrémy (na $\mathbb{R}$) funkce

$$f(x) = x^{2017} - x^{2018}.$$

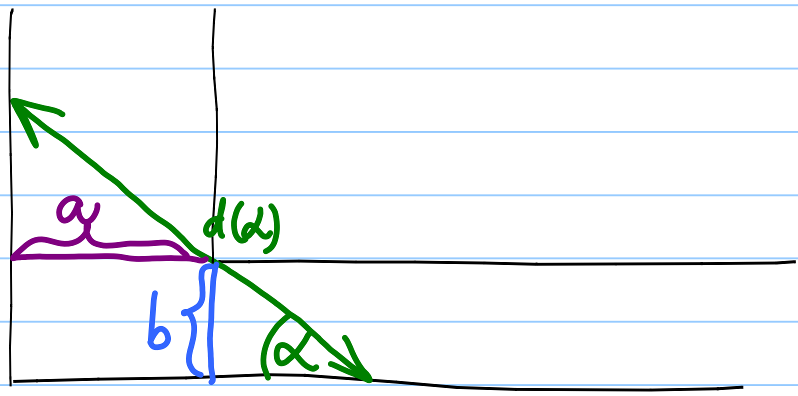
ÚLOHA (dvě chodby a žebřík)



($a, b > 0$ – šířky na sebe kolmých chodeb)

Jaký nejdelší žebřík proneseme ve vodorovné poloze?

ŘEŠENÍ



Délka

$$\boxed{d(\alpha)=\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha}.}\qquad \left(\alpha\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

Hledáme minimum funkce d (promyslete!)

HÖLDEROVA NEROVNOST $\left(p=-2,\ q=\frac{2}{3}\right)$:

$$d(\alpha)=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\cdot a+\frac{1}{\sin\alpha}\cdot b\right)\geq$$

$$\geq \underbrace{\left[\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{-2}\right]}_{1}{}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

CELKEM MÁME

$$\left(\forall \alpha \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)\right): \quad d(\alpha) \geq \underbrace{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{konst.}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když vektory $(\cos^2\alpha, \sin^2\alpha)$ a $\left(a^{\frac{2}{3}}, b^{\frac{2}{3}}\right)$ jsou závislé, tj.

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\cos^2\alpha} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{\sin^2\alpha} \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \iff \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.}$$

Takové $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jistě existuje $\implies$

$$\implies \min_{\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} d(\alpha) = \underbrace{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{maximální délka žebříku.}}.$$