Möbiova inverzní formule

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

20.6.–22.6. 2018

(Výjezdní zasedání KAM, Bořetice)

Formulace problému

Uvažujme posloupnost $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a definujme posloupnost $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích „částečných součtů“ předpisem

$$b(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} a(d).$$

Formulace problému

Uvažujme posloupnost $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a definujme posloupnost $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích „částečných součtů“ předpisem

$$b(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} a(d).$$

Ve výše uvedené sumě sčítáme přes všechny kladné dělitele čísla n.

Formulace problému

Uvažujme posloupnost $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a definujme posloupnost $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích „částečných součtů“ předpisem

$$b(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} a(d).$$

Ve výše uvedené sumě sčítáme přes všechny kladné dělitele čísla n.

Například

$$b(20) = a(1) + a(2) + a(4) + a(5) + a(10) + a(20).$$

Formulace problému

Uvažujme posloupnost $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a definujme posloupnost $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích „částečných součtů“ předpisem

$$b(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} a(d).$$

Ve výše uvedené sumě sčítáme přes všechny kladné dělitele čísla n.

Například

$$b(20) = a(1) + a(2) + a(4) + a(5) + a(10) + a(20).$$

Problém.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ bychom chtěli zpětně vyjádřit $a(n)$ pomocí čísel $b(1), b(2), \ldots$.

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad
a(1) = b(1),
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),\\
a(6) &= b(6)-b(3)-b(2)+b(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad\Longrightarrow\qquad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),\\
a(6) &= b(6)-b(3)-b(2)+b(1),\\
a(7) &= b(7)-b(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),\\
a(6) &= b(6)-b(3)-b(2)+b(1),\\
a(7) &= b(7)-b(1),\\
a(8) &= b(8)-b(4),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad\Longrightarrow\qquad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),\\
a(6) &= b(6)-b(3)-b(2)+b(1),\\
a(7) &= b(7)-b(1),\\
a(8) &= b(8)-b(4),\\
a(9) &= b(9)-b(3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad\Longrightarrow\qquad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),\\
a(6) &= b(6)-b(3)-b(2)+b(1),\\
a(7) &= b(7)-b(1),\\
a(8) &= b(8)-b(4),\\
a(9) &= b(9)-b(3),\\
a(10) &= b(10)-b(5)-b(2)+b(1),\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),\\
a(6) &= b(6)-b(3)-b(2)+b(1),\\
a(7) &= b(7)-b(1),\\
a(8) &= b(8)-b(4),\\
a(9) &= b(9)-b(3),\\
a(10) &= b(10)-b(5)-b(2)+b(1),\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$a(1500) =$

$$
\begin{aligned}
b(1) &= a(1),\\
b(2) &= a(1)+a(2),\\
b(3) &= a(1)+a(3),\\
b(4) &= a(1)+a(2)+a(4),\\
b(5) &= a(1)+a(5),\\
b(6) &= a(1)+a(2)+a(3)+a(6),\\
b(7) &= a(1)+a(7),\\
b(8) &= a(1)+a(2)+a(4)+a(8),\\
b(9) &= a(1)+a(3)+a(9),\\
b(10) &= a(1)+a(2)+a(5)+a(10),\\
&\vdots
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
a(1) &= b(1),\\
a(2) &= b(2)-b(1),\\
a(3) &= b(3)-b(1),\\
a(4) &= b(4)-b(2),\\
a(5) &= b(5)-b(1),\\
a(6) &= b(6)-b(3)-b(2)+b(1),\\
a(7) &= b(7)-b(1),\\
a(8) &= b(8)-b(4),\\
a(9) &= b(9)-b(3),\\
a(10) &= b(10)-b(5)-b(2)+b(1),\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$a(1500) = b(1500) - b(750) - b(500) - b(300) + b(250) + b(150) + b(100) - b(50).$$

Dirichletův součin $\star$

Definice.

Pro dvě posloupnosti $u = \{u(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $v = \{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *bude symbol* $u \star v$ *(Dirichletův součin) představovat posloupnost*

$$(u \star v)(n) \stackrel{def}{=} \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d)$$

Dirichletův součin $\star$

Definice.

Pro dvě posloupnosti $u = \{u(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $v = \{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *bude symbol* $u \star v$ *(Dirichletův součin) představovat posloupnost*

$$(u \star v)(n) \stackrel{def}{=} \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\frac{n}{d}\right)$$

Dirichletův součin $\star$

Definice.

Pro dvě posloupnosti $u = \{u(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $v = \{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *bude symbol* $u \star v$ *(Dirichletův součin) představovat posloupnost*

$$(u \star v)(n) \stackrel{def}{=} \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2).$$

Dirichletův součin $\star$

Definice.

Pro dvě posloupnosti $u = \{u(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $v = \{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ bude symbol $u \star v$ (Dirichletův součin) představovat posloupnost

$$(u \star v)(n) \stackrel{def}{=} \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2).$$

Poznámka.

Operace $\star$ je zřejmě komutativní (rovnost $\sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\frac{n}{d}\right)$) a není obtížné ukázat i její asociativitu

Dirichletův součin $\star$

Definice.

Pro dvě posloupnosti $u = \{u(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $v = \{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ bude symbol $u \star v$ (Dirichletův součin) představovat posloupnost

$$(u \star v)(n) \stackrel{def}{=} \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2).$$

Poznámka.

Operace $\star$ je zřejmě komutativní (rovnost $\sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\frac{n}{d}\right)$) a není obtížné ukázat i její asociativitu, neboť

$$[(u \star v) \star w](n) = \sum_{d_0 d_3 = n} (u \star v)(d_0) w(d_3) = \sum_{d_0 d_3 = n} \left[\left(\sum_{d_1 d_2 = d_0} u(d_1) v(d_2) \right) w(d_3) \right] =$$

$$= \sum_{d_0 d_3 = n} \left[\sum_{d_1 d_2 = d_0} u(d_1) v(d_2) w(d_3) \right] = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} u(d_1) v(d_2) w(d_3)$$

Dirichletův součin $\star$

Definice.

Pro dvě posloupnosti $u = \{u(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $v = \{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ bude symbol $u \star v$ (Dirichletův součin) představovat posloupnost

$$(u \star v)(n) \overset{def}{=} \sum_{d|n} u\left(\tfrac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2).$$

Poznámka.

Operace $\star$ je zřejmě komutativní (rovnost $\sum_{d|n} u\left(\tfrac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\tfrac{n}{d}\right)$) a není obtížné ukázat i její asociativitu, neboť

$$[(u \star v) \star w](n) = \sum_{d_0 d_3 = n} (u \star v)(d_0) w(d_3) = \sum_{d_0 d_3 = n} \left[\left(\sum_{d_1 d_2 = d_0} u(d_1) v(d_2) \right) w(d_3) \right] =$$

$$= \sum_{d_0 d_3 = n} \left[\sum_{d_1 d_2 = d_0} u(d_1) v(d_2) w(d_3) \right] = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} u(d_1) v(d_2) w(d_3) = \cdots = [u \star (v \star w)](n).$$

$$(u \star v)(n) = \sum_{d|n} u\left(\tfrac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2)$$

Příklad.

Nechť $\mathbf{1}$ *představuje posloupnost samých jedniček, tj* $\mathbf{1}(n) = 1$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $(\mathbf{1} \star \mathbf{1})(n)$ *je*

$$(u \star v)(n) = \sum_{d|n} u\left(\tfrac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2)$$

Příklad.

Nechť $\mathbf{1}$ *představuje posloupnost samých jedniček, tj* $\mathbf{1}(n) = 1$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $(\mathbf{1} \star \mathbf{1})(n)$ *je počet všech kladných dělitelů čísla* n.

$$(u \star v)(n) = \sum_{d|n} u\left(\tfrac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2)$$

Příklad.

Nechť $\mathbf{1}$ *představuje posloupnost samých jedniček, tj* $\mathbf{1}(n) = 1$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $(\mathbf{1} \star \mathbf{1})(n)$ *je počet všech kladných dělitelů čísla* n.

Poznámka.

Neutrálním prvkem operace $\star$ je posloupnost $e = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$, neboť pro každou posloupnost u platí $u \star e = u$.

$$(u \star v)(n) = \sum_{d|n} u\left(\tfrac{n}{d}\right) v(d) = \sum_{d|n} u(d) v\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) v(d_2)$$

Příklad.

Nechť $\mathbf{1}$ *představuje posloupnost samých jedniček, tj* $\mathbf{1}(n) = 1$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $(\mathbf{1} \star \mathbf{1})(n)$ *je počet všech kladných dělitelů čísla* n.

Poznámka.

Neutrálním prvkem operace $\star$ je posloupnost $e = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$, neboť pro každou posloupnost u platí $u \star e = u$.

Poznámka.

Uvědomme si, že vztah mezi posloupností $a = \{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupností jejích „částečných součtů“ $b = \{b(n)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{d|n} a(d) \right\}_{n=1}^{\infty}$ lze zapsat pomocí operace $\star$ jako

$$b = a \star \mathbf{1}.$$

Möbiova funkce

Definice.

Möbiovou funkcí $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ *rozumíme funkci definovanou následovně:*

- $\mu(1) \overset{def}{=} 1$,

Möbiova funkce

Definice.

Möbiovou funkcí $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ *rozumíme funkci definovanou následovně:*

- $\mu(1) \stackrel{def}{=} 1$,
- *pro* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *uvažujme rozklad čísla* n *na prvočinitele, tzn.* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *kde* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *jsou vzájemně různá prvočísla a* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, *a definujme*

$$\mu(n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (-1)^k, & \text{je-li } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1, \\ 0, & \text{existuje-li } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ takové, že } \alpha_i > 1. \end{cases}$$

Möbiova funkce

Definice.

Möbiovou funkcí $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ *rozumíme funkci definovanou následovně:*

- $\mu(1) \stackrel{def}{=} 1$,
- *pro* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *uvažujme rozklad čísla* n *na prvočinitele, tzn.* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *kde* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *jsou vzájemně různá prvočísla a* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, *a definujme*

$$\mu(n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (-1)^k, & \text{je-li } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1, \\ 0, & \text{existuje-li } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ takové, že } \alpha_i > 1. \end{cases}$$

Příklad.

$$\mu(10) = \mu(2 \cdot 5) = (-1)^2 = 1,$$

Möbiova funkce

Definice.

Möbiovou funkcí $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ *rozumíme funkci definovanou následovně:*

- $\mu(1) \stackrel{def}{=} 1$,
- *pro* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *uvažujme rozklad čísla* n *na prvočinitele, tzn.* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *kde* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *jsou vzájemně různá prvočísla a* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, *a definujme*

$$\mu(n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (-1)^k, & \text{je-li } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1, \\ 0, & \text{existuje-li } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ takové, že } \alpha_i > 1. \end{cases}$$

Příklad.

$$\mu(10) = \mu(2 \cdot 5) = (-1)^2 = 1, \quad \mu(20) = \mu(2^2 \cdot 5) = 0,$$

Möbiova funkce

Definice.

Möbiovou funkcí $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ *rozumíme funkci definovanou následovně:*

- $\mu(1) \overset{def}{=} 1$,
- *pro* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *uvažujme rozklad čísla* n *na prvočinitele, tzn.* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *kde* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *jsou vzájemně různá prvočísla a* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, *a definujme*

$$\mu(n) \overset{def}{=} \begin{cases} (-1)^k, & \text{je-li } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1, \\ 0, & \text{existuje-li } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ takové, že } \alpha_i > 1. \end{cases}$$

Příklad.

$$\mu(10) = \mu(2 \cdot 5) = (-1)^2 = 1, \quad \mu(20) = \mu(2^2 \cdot 5) = 0,$$

$$\mu(30) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5) = (-1)^3 = -1.$$

Nyní dokážeme jednu důležitou vlastnost Möbiovy funkce μ.

Lemma.

Platí $\mathbf{1} \star \mu = e$,

Nyní dokážeme jednu důležitou vlastnost Möbiovy funkce μ.

Lemma.

Platí $\mathbf{1} \star \mu = e$, *tzn.*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{pro } n = 1, \\ 0, & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Nyní dokážeme jednu důležitou vlastnost Möbiovy funkce μ.

Lemma.

Platí $\mathbf{1} \star \mu = e$, *tzn.*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{pro } n = 1, \\ 0, & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Důkaz.

Případ $n = 1$ je triviální, neboť $\mu(1) = 1$.

Nyní dokážeme jednu důležitou vlastnost Möbiovy funkce μ.

Lemma.

Platí $\mathbf{1} \star \mu = e$, *tzn.*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{pro } n = 1, \\ 0, & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Důkaz.

Případ $n = 1$ je triviální, neboť $\mu(1) = 1$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (rozklad na prvočinitele).
Z definice Möbiovy funkce

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots + (-1)^k \binom{k}{k}$$

Nyní dokážeme jednu důležitou vlastnost Möbiovy funkce μ.

Lemma.

Platí $\mathbf{1} \star \mu = e$, *tzn.*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{pro } n = 1, \\ 0, & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Důkaz.

Případ $n = 1$ je triviální, neboť $\mu(1) = 1$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (rozklad na prvočinitele).
Z definice Möbiovy funkce a z binomické věty pak dostaneme

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} = (1-1)^k = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Möbiova inverzní formule

Věta.

Nechť $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti splňující vztah*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

Möbiova inverzní formule

Věta.

Nechť $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti splňující vztah*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

Pak platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d).$$

Möbiova inverzní formule

Věta.

Nechť $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti splňující vztah*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

Pak platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d).$$

Poznámka.

Například platí, že

$$a(12) = b(12)\mu(1) + b(6)\mu(2) + b(4)\mu(3) + b(3)\mu(4) + b(2)\mu(6) + b(1)\mu(12)$$

Möbiova inverzní formule

Věta.

Nechť $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti splňující vztah*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

Pak platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d).$$

Poznámka.

Například platí, že

$$a(12) = b(12)\mu(1) + b(6)\mu(2) + b(4)\mu(3) + b(3)\mu(4) + b(2)\mu(6) + b(1)\mu(12) =$$

$$= b(12)\cdot 1 + b(6)\cdot(-1) + b(4)\cdot(-1) + b(3)\cdot 0 + b(2)\cdot 1 + b(1)\cdot 0$$

Möbiova inverzní formule

Věta.

Nechť $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti splňující vztah*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

Pak platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d).$$

Poznámka.

Například platí, že

$$a(12) = b(12)\mu(1) + b(6)\mu(2) + b(4)\mu(3) + b(3)\mu(4) + b(2)\mu(6) + b(1)\mu(12) =$$

$$= b(12) \cdot 1 + b(6) \cdot (-1) + b(4) \cdot (-1) + b(3) \cdot 0 + b(2) \cdot 1 + b(1) \cdot 0 =$$

$$= b(12) - b(6) - b(4) + b(2).$$

Důkaz Möbiovy inverzní formule (Pamatujme, že $\mathbf{1} \star \mu = e$.)

$$\left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d) \right] \quad \Longrightarrow \quad \left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right) \mu(d) \right].$$

Důkaz Möbiovy inverzní formule (Pamatujme, že $\mathbf{1} \star \mu = e$.)

$$\left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d)\right] \quad \Longrightarrow \quad \left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d)\right].$$

Důkaz.

Předpoklad

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d)$$

znamená, že $b = a \star \mathbf{1}$.

Důkaz Möbiovy inverzní formule (Pamatujme, že $\mathbf{1} \star \mu = e$.)

$$\left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d)\right] \quad \Longrightarrow \quad \left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d)\right].$$

Důkaz.

Předpoklad

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d)$$

znamená, že $b = a \star \mathbf{1}$. Pak je ale jasné, že

$$b \star \mu = (a \star \mathbf{1}) \star \mu = a \star (\mathbf{1} \star \mu) = a \star e = a.$$

Důkaz Möbiovy inverzní formule (Pamatujme, že $\mathbf{1} \star \mu = e$.)

$$\left[(\forall n \in \mathbb{N}) :\ b(n) = \sum_{d|n} a(d)\right] \quad \Longrightarrow \quad \left[(\forall n \in \mathbb{N}) :\ a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d)\right].$$

Důkaz.

Předpoklad

$$(\forall n \in \mathbb{N}) :\ b(n) = \sum_{d|n} a(d)$$

znamená, že $b = a \star \mathbf{1}$. Pak je ale jasné, že

$$b \star \mu = (a \star \mathbf{1}) \star \mu = a \star (\mathbf{1} \star \mu) = a \star e = a.$$

□

Poznámka.

Ve skutečnosti platí i opačná implikace, neboť

$$a = b \star \mu \quad \Longrightarrow \quad a \star \mathbf{1} = (b \star \mu) \star \mathbf{1} = b \star (\mu \star \mathbf{1}) = b \star e = b.$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Definice.

Eulerovu funkci $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definujeme předpisem*

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \left|\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n \ \wedge \ \mathrm{nsd}(k, n) = 1\}\right|.$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Definice.

Eulerovu funkci $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definujeme předpisem*

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \left|\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n \ \wedge \ \mathrm{nsd}(k, n) = 1\}\right|.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ tedy $\varphi(n)$ představuje počet čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$, která jsou s číslem n nesoudělná.

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Definice.

Eulerovu funkci $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definujeme předpisem*

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \left|\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n \ \wedge \ \mathrm{nsd}(k, n) = 1\}\right|.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ tedy $\varphi(n)$ představuje počet čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$, která jsou s číslem n nesoudělná.

Příklad.

$$\varphi(4) = \left|\{1, 3\}\right| = 2,$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Definice.

Eulerovu funkci $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definujeme předpisem*

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \left|\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n \ \wedge \ \mathrm{nsd}(k, n) = 1\}\right|.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ tedy $\varphi(n)$ představuje počet čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$, která jsou s číslem n nesoudělná.

Příklad.

$$\varphi(4) = \left|\{1, 3\}\right| = 2, \quad \varphi(12) = \left|\{1, 5, 7, 11\}\right| = 4,$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Definice.

Eulerovu funkci $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definujeme předpisem*

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \left|\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n \ \wedge \ \mathrm{nsd}(k, n) = 1\}\right|.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ tedy $\varphi(n)$ představuje počet čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$, která jsou s číslem n nesoudělná.

Příklad.

$$\varphi(4) = \left|\{1, 3\}\right| = 2, \quad \varphi(12) = \left|\{1, 5, 7, 11\}\right| = 4,$$

$$\varphi(1\,000\,000) = ?$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Definice.

Eulerovu funkci $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definujeme předpisem*

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \left|\{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n \ \wedge \ \mathrm{nsd}(k, n) = 1\}\right|.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ tedy $\varphi(n)$ představuje počet čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$, která jsou s číslem n nesoudělná.

Příklad.

$$\varphi(4) = \left|\{1, 3\}\right| = 2, \quad \varphi(12) = \left|\{1, 5, 7, 11\}\right| = 4,$$

$$\varphi(1\,000\,000) = ?$$

Poznámka.

Eulerova funkce hraje naprosto zásadní úlohu v kryptografii.

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Konkrétní situace pro $n = 12$.

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{2}{12}, \quad \frac{3}{12}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{12}{12}$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Konkrétní situace pro $n = 12$.

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{2}{12}, \quad \frac{3}{12}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{12}{12}$$

$$\frac{1}{1}$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Konkrétní situace pro $n = 12$.

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{2}{12}, \quad \frac{3}{12}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{12}{12}$$

$$\frac{1}{2}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{1}$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Konkrétní situace pro $n = 12$.

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{2}{12}, \quad \frac{3}{12}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{12}{12}$$

$$\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{1}$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Konkrétní situace pro $n = 12$.

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{2}{12}, \quad \frac{3}{12}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{12}{12}$$

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{1}$$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Konkrétní situace pro $n = 12$.

$\frac{1}{12}$,	$\frac{2}{12}$,	$\frac{3}{12}$,	$\frac{4}{12}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{6}{12}$,	$\frac{7}{12}$,	$\frac{8}{12}$,	$\frac{9}{12}$,	$\frac{10}{12}$,	$\frac{11}{12}$,	$\frac{12}{12}$
	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{3}$,		$\frac{1}{2}$,		$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{5}{6}$,		$\frac{1}{1}$

Aplikace Möbiovy inv. formule – Eulerova funkce φ

Věta.

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Důkaz.

Uvažujme n zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, které převedeme do základního tvaru a roztřídíme podle jmenovatelů. Jmenovatelé po vykrácení jsou pak právě dělitelé čísla n. Zároveň je jasné, že různých zlomků se jmenovatelem d je přesně $\varphi(d)$. □

Konkrétní situace pro $n = 12$.

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{2}{12}, \quad \frac{3}{12}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{12}{12}$$

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{1}{1}$$

Eulerova funkce $\left(\text{Pamatujme, že } \sum_{d|n} a(d) = b(n) \Rightarrow a(n) = \sum_{d|n} b\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d).\right)$

Věta.

Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *pak*

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Eulerova funkce $\left(\text{Pamatujme, že } \sum_{d|n} a(d) = b(n) \Rightarrow a(n) = \sum_{d|n} b\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d).\right)$

Věta.

Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *pak*

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Důkaz.

Z Möbiovy inverzní formule $\left(a(n) = \varphi(n),\ b(n) = n\right)$ a vztahu $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ plyne

$$\varphi(n) = a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right) \mu(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Eulerova funkce $\left(\text{Pamatujme, že } \sum_{d|n} a(d) = b(n) \Rightarrow a(n) = \sum_{d|n} b\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d).\right)$

Věta.

Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *pak*

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Důkaz.

Z Möbiovy inverzní formule $\left(a(n) = \varphi(n),\ b(n) = n\right)$ a vztahu $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ plyne

$$\varphi(n) = a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}\mu(d) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} =$$

$$= n\left(1 + \sum_{1\leq i\leq k} \frac{(-1)}{p_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k} \frac{1}{p_i p_j} + \dots + \frac{(-1)^k}{p_1 \dots p_k}\right)$$

Eulerova funkce $\left(\text{Pamatujme, že } \sum_{d|n} a(d) = b(n) \Rightarrow a(n) = \sum_{d|n} b\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d).\right)$

Věta.

Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, *pak*

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Důkaz.

Z Möbiovy inverzní formule $\left(a(n) = \varphi(n),\ b(n) = n\right)$ a vztahu $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ plyne

$$\varphi(n) = a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}\mu(d) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} =$$

$$= n\left(1 + \sum_{1\leq i\leq k} \frac{(-1)}{p_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k} \frac{1}{p_i p_j} + \dots + \frac{(-1)^k}{p_1 \dots p_k}\right) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

□

Eulerova funkce – výpočet $\left(\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right)$

Příklad.

$$\varphi(2018) = \varphi(2 \cdot 1009) = 2018 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{1009}\right) = 1008,$$

Eulerova funkce – výpočet $\left(\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right)$

Příklad.

$$\varphi(2018) = \varphi(2 \cdot 1009) = 2018 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{1009}\right) = 1008,$$

$$\varphi(1\,000\,000) = \varphi(2^6 \cdot 5^6) = 1\,000\,000 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400\,000,$$

$$\vdots$$

Eulerova funkce – výpočet $\left(\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right)$

Příklad.

$$\varphi(2018) = \varphi(2 \cdot 1009) = 2018 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{1009}\right) = 1008,$$

$$\varphi(1\,000\,000) = \varphi(2^6 \cdot 5^6) = 1\,000\,000 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400\,000,$$

$$\vdots$$

Cvičení.

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí

$$\varphi(n) = \frac{n}{3}.$$

Příklady $\left((u \star v)(n) = \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d)\right)$

Cvičení.

Nechť $\tau(n)$ představuje počet dělitelů čísla n a $\sigma(n)$ jejich součet. Dokažte, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \sigma(n) = \sum_{d|n} \tau\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d).$$

Příklady $\left((u \star v)(n) = \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d)\right)$

Cvičení.

Nechť $\tau(n)$ představuje počet dělitelů čísla n a $\sigma(n)$ jejich součet. Dokažte, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \sigma(n) = \sum_{d|n} \tau\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d).$$

Řešení.

Víme, že

$$\mathbf{1} \star \mathbf{1} = \tau, \quad \mathbf{1} \star \varphi = \mathrm{id} \quad \text{a} \quad \mathbf{1} \star \mathrm{id} = \sigma.$$

Příklady $\left((u \star v)(n) = \sum_{d|n} u\left(\frac{n}{d}\right) v(d)\right)$

Cvičení.

Nechť $\tau(n)$ představuje počet dělitelů čísla n a $\sigma(n)$ jejich součet. Dokažte, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \sigma(n) = \sum_{d|n} \tau\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d).$$

Řešení.

Víme, že

$$\mathbf{1} \star \mathbf{1} = \tau, \quad \mathbf{1} \star \varphi = \mathrm{id} \quad \text{a} \quad \mathbf{1} \star \mathrm{id} = \sigma.$$

Proto platí

$$\sigma = \mathbf{1} \star \mathrm{id} = \mathbf{1} \star (\mathbf{1} \star \varphi) = (\mathbf{1} \star \mathbf{1}) \star \varphi = \tau \star \varphi.$$

Příklady

Cvičení.

Je známo, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Pokuste se stanovit součty řad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^2} \qquad a \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}.$$

Příklady

Cvičení.

Je známo, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Pokuste se stanovit součty řad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^2} \qquad a \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}.$$

Zobecnění pro Riemannovu funkci.

Víme, že $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Vyjádřete součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^x}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^x}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} \qquad a \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^x}$$

pomocí Riemannovy funkce ζ.

Věta.

Nechť $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti a* $x \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^x}$ *konvergují absolutně. Pak pro posloupnost* $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definovanou předpisem* $c = a \star b$ *(Dirichletův součin) platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^x}.$$

Věta.

Nechť $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti a* $x \in \mathbb{R}$.
Předpokládejme, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^x}$ *konvergují absolutně. Pak pro posloupnost* $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definovanou předpisem* $c = a \star b$ *(Dirichletův součin) platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^x}.$$

Důkaz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^x} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{l^x} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_k b_l}{(kl)^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{kl=n} \frac{a_k b_l}{n^x} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \left(\sum_{kl=n} a_k b_l \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}.$$

□

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1 - z^n}$$

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1 - z^n} \qquad \left[\text{Tuto řadu budeme chtít vyjádřit ve tvaru } \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n. \right]$$

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} \qquad \left[\text{Tuto řadu budeme chtít vyjádřit ve tvaru } \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.\right]$$

$$\frac{a_1 z}{1-z} = a_1 z \quad + a_1 z^2 \quad + a_1 z^3 \quad + a_1 z^4 \quad + a_1 z^5 \quad + a_1 z^6 \quad + \dots$$

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} \qquad \left[\text{Tuto řadu budeme chtít vyjádřit ve tvaru } \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.\right]$$

$$\frac{a_1 z}{1-z} = a_1 z + a_1 z^2 + a_1 z^3 + a_1 z^4 + a_1 z^5 + a_1 z^6 + \dots$$

$$\frac{a_2 z^2}{1-z^2} = + a_2 z^2 + a_2 z^4 + a_2 z^6 + \dots$$

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} \qquad \left[\text{Tuto řadu budeme chtít vyjádřit ve tvaru } \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 z}{1-z} &= a_1 z + a_1 z^2 + a_1 z^3 + a_1 z^4 + a_1 z^5 + a_1 z^6 + \dots \\
\frac{a_2 z^2}{1-z^2} &= \quad + a_2 z^2 \quad\quad + a_2 z^4 \quad\quad + a_2 z^6 + \dots \\
\frac{a_3 z^3}{1-z^3} &= \quad\quad\quad + a_3 z^3 \quad\quad\quad + a_3 z^6 + \dots
\end{aligned}$$

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} \qquad \left[\text{Tuto řadu budeme chtít vyjádřit ve tvaru } \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 z}{1-z} &= a_1 z + a_1 z^2 + a_1 z^3 + a_1 z^4 + a_1 z^5 + a_1 z^6 + \dots \\
\frac{a_2 z^2}{1-z^2} &= \qquad + a_2 z^2 \qquad\quad + a_2 z^4 \qquad\quad + a_2 z^6 + \dots \\
\frac{a_3 z^3}{1-z^3} &= \qquad\qquad + a_3 z^3 \qquad\qquad\quad + a_3 z^6 + \dots \\
\frac{a_4 z^4}{1-z^4} &= \qquad\qquad\qquad + a_4 z^4 \qquad\qquad + \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} \qquad \left[\text{Tuto řadu budeme chtít vyjádřit ve tvaru } \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 z}{1-z} &= a_1 z + a_1 z^2 + a_1 z^3 + a_1 z^4 + a_1 z^5 + a_1 z^6 + \dots \\
\frac{a_2 z^2}{1-z^2} &= \qquad + a_2 z^2 \qquad\quad + a_2 z^4 \qquad\quad + a_2 z^6 + \dots \\
\frac{a_3 z^3}{1-z^3} &= \qquad\qquad + a_3 z^3 \qquad\qquad\quad + a_3 z^6 + \dots \\
\frac{a_4 z^4}{1-z^4} &= \qquad\qquad\qquad + a_4 z^4 \qquad\qquad + \dots \\
&\vdots \\
\hline
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} &= b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + b_5 z^5 + b_6 z^6 + \dots
\end{aligned}$$

Lambertova řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} \qquad \left[\text{Tuto řadu budeme chtít vyjádřit ve tvaru } \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 z}{1-z} &= a_1 z + a_1 z^2 + a_1 z^3 + a_1 z^4 + a_1 z^5 + a_1 z^6 + \dots \\
\frac{a_2 z^2}{1-z^2} &= \quad + a_2 z^2 \quad\quad + a_2 z^4 \quad\quad + a_2 z^6 + \dots \\
\frac{a_3 z^3}{1-z^3} &= \quad\quad + a_3 z^3 \quad\quad\quad + a_3 z^6 + \dots \\
\frac{a_4 z^4}{1-z^4} &= \quad\quad\quad + a_4 z^4 \quad\quad\quad + \dots \\
&\vdots \\
\hline
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} &= b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + b_5 z^5 + b_6 z^6 + \dots
\end{aligned}$$

$$b_n = \sum_{d|n} a_d$$

Příklad.

Víme, že

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Příklad.

Víme, že

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Proto platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) z^n = z.$$

Příklad.

Víme, že

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Proto platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) z^n = z.$$

Příklad.

Protože platí $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$,

Příklad.

Víme, že

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Proto platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) z^n = z.$$

Příklad.

Protože platí $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, *dostaneme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

Příklad.

Víme, že

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Proto platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) z^n = z.$$

Příklad.

Protože platí $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, *dostaneme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\Big(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\Big)' = z\Big(\frac{z}{1-z}\Big)' = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Příklad.

Víme, že

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Proto platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) z^n = z.$$

Příklad.

Protože platí $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, *dostaneme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\Big(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\Big)' = z\Big(\frac{z}{1-z}\Big)' = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n.$$

Zobecnění Möbiovy inverzní formule

Věta.

Nechť f a g jsou dvě funkce definované na intervalu $\langle 1, +\infty)$. Pak platí

$$\left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; g(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\tfrac{x}{k}\right) \right] \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} g\left(\tfrac{x}{k}\right) \mu(k) \right].$$

Zobecnění Möbiovy inverzní formule

Věta.

Nechť f a g jsou dvě funkce definované na intervalu $\langle 1, +\infty)$. Pak platí

$$\left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; g(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\tfrac{x}{k}\right) \right] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} g\left(\tfrac{x}{k}\right) \mu(k) \right].$$

Symbol $\lfloor x \rfloor$ představuje dolní celou část čísla x, tj. $\lfloor x \rfloor$ je celé číslo splňující

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Poznámka.

Jsou-li $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti, klasickou verzi Möbiovy inverzní formule dostaneme z výše uvedené věty tak, že definujeme

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a(x) & \text{pro } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} b(x) & \text{pro } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\tfrac{x}{k}\right) \iff f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} g\left(\tfrac{x}{k}\right)\mu(k)$$

Poznámka.

Jsou-li $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti, klasickou verzi Möbiovy inverzní formule dostaneme z výše uvedené věty tak, že definujeme

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a(x) & \text{pro } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} b(x) & \text{pro } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Uvědomme si totiž, že pak platí

$$\left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; b(n) = \sum_{d|n} a(d)\right] \iff \left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; g(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\tfrac{x}{k}\right)\right]$$

a

$$\left[(\forall n \in \mathbb{N}) : \; a(n) = \sum_{d|n} b\left(\tfrac{n}{d}\right)\mu(d)\right] \iff \left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} g\left(\tfrac{x}{k}\right)\mu(k)\right]$$

Jiná verze Möbiovy inverzní formule

Věta.

Nechť f a g jsou funkce definované na intervalu $\langle 1, +\infty)$. Dále buď $s \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \langle 1, +\infty)$ řady

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{f(klx)}{(kl)^s} \quad a \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{g(klx)}{(kl)^s}$$

absolutně konvergují. Pak platí

$$\left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(kx)}{k^s}\right] \iff$$

$$\iff \left[(\forall x \in \langle 1, +\infty)) : \; f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(kx)\mu(k)}{k^s}\right].$$

A ještě jedna úloha na závěr

Cvičení.

Pro $x \in \mathbb{R}^+$ najděte součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor \mu(k).$$

Literatura


Michal Bulant, Algebra 2 – Teorie čísel,
https://www.math.muni.cz/~bulik/vyuka/Algebra-2/alg2-screen.pdf.


https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_inversion_formula.

Děkuji za pozornost.