KDE SA VZALI KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1*

i imaginárne čísla (sen o imaginárnom konte ...?)
Descartes

$i = \sqrt{-1}$

kvadratické rovnice

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2+1 \\ \sqrt{-39} \end{array} \right.$ nemožné

zastavme sa u nich

odkiaľ príde vzorec?

Vietove vzorce!

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

$$x_1 x_2 = c$$

$$-(x_1 + x_2) = b$$

komplexné čísla sa prekvapivo nezrodili pri riešení kv. rovníc ale kubických rovníc.

1. SCIPIONE DEL FERRO (1465 - 1526)

$\boxed{x^3 + ax = b}$, $a, b > 0$ poznali len kladné číslo, (preto im ani nevadilo, že kv. rovnica má len 1 koreň)

↓

žiak ANTONIUS MARIA FIORE

2. NICCOLO FONTANA, TARTAGLIA (1499 - 1527)

matematický súboj - 30 zlatých, kto prehrá zaplatí 30 zlatých

Noc pred súbojom sa dozvedel, že FIORE vie vyriešiť kub. rovnicu

vymyslel to za noc, dnes a súboj vyhral. $\boxed{x^3 + mx^2 = n}$ príliš ťažko pre FIORE

3. GIROLAMO CARDANO ... ARS MAGNA 1545

3 typy

$$x^3 + bx = c$$

$$x^3 = bx + c$$

$$x^3 + c = bx$$

Všeobecná rovnica 3. stupňa

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

substitúcia $x = y - \frac{a}{3}$

$$x^2 = y^2 - \frac{2ay}{3} + \frac{a^2}{9}$$

$$x^3 = y^3 - \frac{a}{3}y^2 - \frac{2}{3}ay^2 + \frac{2}{9}a^2y + \frac{a^2y}{9} - \frac{a^3}{27}$$

dosadíme

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{27} + by - \frac{ba}{3} + c = 0$$

$$y^3 + y\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + c - \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} = 0$$

$$y^3 + py + q = 0$$

Takže stačí sa zaoberať takými rovnicami.

CARDANO $x^3 = ax + b$

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

$x^3 = 15x + 4$ s tým začnem

Vedia nakresliť graf? Koľko má tá rovnica koreňov? 3
$x = -2 \pm \sqrt{3}$

$x = 4$

Keď do vzorca dosadíme $a = 15$ $b = 4$

dostaneme

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

nepochopiteľný výsledok

KDE SA VZALI ...

KOMPLEXNÉ ČÍSLA ...

PRÍKLAD: ako na tie vzorce prišli?

$$x^3 + 6x = 2$$

$$x = u + v \Rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uv^2 + 3u^2v =$$

$$= u^3 + v^3 + 3uv\underbrace{(u+v)}_{x}$$

$$u^3 + v^3 + 3uv\,x + 6x = 2$$

porovnáme

$$\underline{u^3 + v^3 = 2} \qquad \underline{3uv + 6 = 0}$$

$$uv = -2$$

$$u^3v^3 = -8$$

$$v^3 = \frac{-8}{u^3}$$

$$u^3 - \frac{8}{u^3} = 2 \Rightarrow u^6 - 2u^3 - 8 = 0$$

$u^3 = z$ kvadr. rovnica

$$z^2 - 3z - 8 = 0$$

$$\underline{z = 4}, \quad z = -2$$

$x = u + v = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ je jeden koreň pôv. rovnice

PRÍKLAD: $x^3 = 9x + 10$ rovnaký postup $\underline{x = -2}$ uhádneme?

$$u^3 + v^3 = 10 \qquad uv = 3$$

$u^3 = 5 \pm \sqrt{-2}$ čo s tým?

IGNORUJME TO

$$u = \sqrt[3]{5 + \sqrt{-2}} = a + b\sqrt{-2}$$

tu by možno šlo niečo viac o odmocninách dvojitých

$$5 + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3 =$$

$$a^3 - 6ab^2 + (3a^2b - 2b^3)\sqrt{-2}$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= a^3 - 6ab^2 \\ 1 &= 3a^2b - 2b^3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 1 \end{aligned} \quad \text{uhádol}$$

$$\sqrt[3]{5 + \sqrt{-2}} = -1 + \sqrt{-2} \qquad \sqrt[3]{5 - \sqrt{-2}} = -1 - \sqrt{-2}$$

$-1 + \sqrt{-2} - 1 - \sqrt{-2}$

$$x = u + v = \underbrace{\sqrt[3]{5 + \sqrt{-2}}}_{-1+} + \underbrace{\sqrt[3]{5 - \sqrt{-2}}}_{-1} = -2$$

výsledok sedí

$x^3 = 15x + 4$ $\qquad (2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$

o ~~30 rokov neskôr~~ BOMBELLI

podobný trik

MEANING TO THE MEANINGLESS

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = x + \sqrt{-y}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = x - \sqrt{-y}$$

$x = 2$
$y = 1$ $\qquad (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$

GEORG JOACHIM VON LAUCHEN-RHÄTICUS

$$x^3 = bx + c$$

$x = y + z$ (komplexne združené čísla)

$$(y+z)^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = y^3 + z^3 + 3yz\underbrace{(y+z)}_{x}$$

$$3yz = b$$
$$y^3 + z^3 = c$$

Nech teraz $y = u + iv$ $\qquad z = u - iv$

Po dosadení

$$3yz = 3(u^2+v^2) = b$$
$$y^3+z^3 = (u+iv)^3 + (u-iv)^3 = 2u^3 - 6uv^2 = c$$

dostaneme
$$\begin{cases} u^2+v^2 = \dfrac{b}{3} \\ u^3 - 3uv^2 = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

táto rovnica mu pripomenula súčtový vzorec pre kosínus, ktorý používal pri zostavovaní tabuliek

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \sin^2\alpha$$

keď $\quad u = \sqrt{\frac{b}{3}} \cos\alpha \qquad v = \sqrt{\frac{b}{3}} \sin\alpha$

prvá rovnica bude splnená automaticky

po dosadení do druhej máme

$$\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \sin^2\alpha) = \frac{c}{2}$$

$$\cos 3\alpha = \frac{3c\sqrt{3}}{2b\sqrt{b}} < 1 \iff \left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

α nájdeme v tabuľkách

číslo pod od. je záporné

$u = \sqrt{\frac{b}{3}} \cos\alpha$

$x = y + z = \underline{2u}$ je riešení

u

Geometrická interpretácia kompl. čísel - 300 rokov neskôr.

Všeobecný postup

$$\underbrace{x^3 + ax + b = 0}$$

$x = u + v$

$u^3 + v^3 + (3uv + a)(x) + b = 0$

$3uv = -a \qquad u^3 + v^3 = -b$

$v = \frac{-a}{3u} \qquad u^6 + bu^3 - \frac{a^3}{27} = 0$

$u^3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}$

$u^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \longleftarrow$ o.k.

$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \qquad v^3 = -b - u^3 = -b + \frac{b}{2} \mp \sqrt{}$

Ako s tým počítame

CARDANO $\qquad x(10 - x) = 40 \qquad x_1 + x_2 = 10$

$x_1 x_2 = 40$

$x_1 = 5 + \sqrt{-15}$

$x_2 = 5 - \sqrt{-15}$

$x_1 x_2 = (5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15}) = 25 - (\sqrt{-15})^2 = 40$

$$\boxed{\sqrt{-15}\,\sqrt{-15} = -15}$$

Gauss základná veta algebry - len okrajovo

D

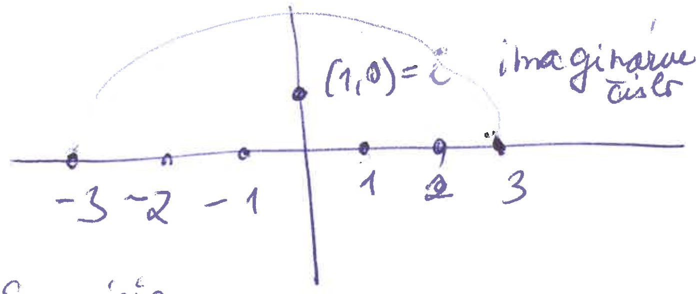
KOMPLEXNÉ ČÍSLA DNES

JOHN WALLIS
BOD V ROVINE, ostatní to ignorovali

DESCARTES
kartézske súradnice

študujeme geometrické úlohy pomocou čísel

je to niečo vymyslené ako KENTAURUS, existuje len v našej fantázii



~~operácie~~ Transformácia

$x-1$ posunutie (všetky čísla posuniem o 1 doľava)

$2x$ naťahovanie

$-x$ symetria okolo počiatku

$-2x$ zloženie naťahovania + symetrie

$(-1)(-1)=1$ teda bod ide posunúť

$\sqrt{-1}$ neexistuje dogma

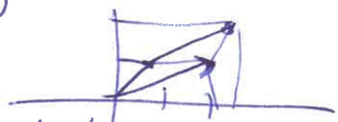
(-1) otočenie o 180° teda $\sqrt{-1}$ otočenie o 90°

Body roviny → čísla (-)
komplexné čísla
$z = x + iy$

Základná veta algebry
záp. čísla

Operácie na komplexných číslach

$(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$ sčítanie vektorov



Násobenie
$(x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$

Veľkosť komplexného čísla - vzdialenosť od počiatku
$= \sqrt{x^2+y^2}$ $|i| = 1$
$|i+1| = \sqrt{2}$

Argument smer z uhol s x-ovou osou
$\mathrm{Arg}(i) = 90^\circ$
$\mathrm{Arg}(1) = 0$
$\mathrm{Arg}(-1) = 180^\circ$
$\mathrm{Arg}(1+i) = 45^\circ$

Násobiť body v 3D?

Násobenie $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$
$(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$

Fraktály?

K histórii čísla

RENÉ DESCARTES (1594-1650)

ALBERT GIRARD (1595-1632)

zákl. veta algebry

ISAC NEWTON (1643-1727)

rovnice kružnice → priesečník
rieš. kv. rovnice
všetky by sa predinali

LEONARD EULER (1707-1783)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

do rozvoja gon. funkcií dosadil imag. veličiny

vzorce pre násobné uhly gon. funkcií

interpretácia - žiadny pokrok oproti Descartovi
imag. čísla - nemožné čísla

Ako výpočty s neexistujúcimi veličinami vedú k správnym výsledkom o reálnych veličinách

Podobne ako keby mäkko úvahami o jednorožcoch prinášal nové biologické poznatky

↓ Model geom. interpretácia
Gauss. rov.

CASPAR WESSEL (1745-1818)

prvý pokus o geom. model

do 3D - ale tam nevedel definovať násobenie

1, -1
i-1, -i-1
i, -i

geometria orientovaných úsečiek

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

4 dôkazy zákl. vety algebry

MANDELBROTOVA MNOŽINA

c - komplexní číslo

$z^2 + c$

$z_0 = 0 \qquad z_{n+1} = z_n^2 + c$

ohraničená posl. → podle toho o padaní do M M

Duch svatý si našel vznešené útočiště v divu analýzy, podradu ideálního světa, obojživelníku mezi bytím a nebytím, který ~~se~~ nazývá imaginární odmocnina záporné jednotky
Leibniz

PROBLÉMY jiné
BERNOULLI $\int \frac{1}{x^2+3x+1}\,dx$ logaritmy kompl. čísel

log záp. čísla ?
$\log -x = \log x$

EULER 1748

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\log(-1) = i\pi$$

?

ale i ln $e^{3i\pi} = -1$

$$\ln(-1) = 3i\pi$$

RIEMANNOVA HYPOTÉZA $\sim \frac{x}{\log x}$

$\pi(x)$ počet prvočísel menších než x

$\frac{1}{2} + iy$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}$$

RIEMAN komplexní čísla ...