

Kolik kořenů má polynom?

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, 19.11.2019

Dvadsať minút, a nič som sa nedozvedel . . .

(komentár k videozáznamu prednášky v Brně)

Kolik kořenů má polynom?

Kolik kořenů má polynom?

ČKO (často kladené odpovědi):

Kolik kořenů má polynom?

ČKO (často kladené odpovědi):

- méně než n (kde n je stupeň polynomu),

Kolik kořenů má polynom?

ČKO (často kladené odpovědi):

- méně než n (kde n je stupeň polynomu),
- přesně n (počítáme-li komplexní kořeny i s násobnostmi),

Kolik kořenů má polynom?

ČKO (často kladené odpovědi):

- méně než n (kde n je stupeň polynomu),
- přesně n (počítáme-li komplexní kořeny i s násobnostmi),
- neexistují žádné algoritmy pro určení kořenů.

Dokážeme tři kacířské výroky:

Dokážeme tři kacířské výroky:

- počet reálných kořenů polynomu s reálnými koeficienty *nezávisí na stupni*, nýbrž na počtu nenulových koeficientů,

Dokážeme tři kacířské výroky:

- počet reálných kořenů polynomu s reálnými koeficienty *nezávisí na stupni*, nýbrž na počtu nenulových koeficientů,
- dá se určit, kolik kořenů se nachází v daném segmentu,

Dokážeme tři kacířské výroky:

- počet reálných kořenů polynomu s reálnými koeficienty *nezávisí na stupni*, nýbrž na počtu nenulových koeficientů,
- dá se určit, kolik kořenů se nachází v daném segmentu,
- takzvaná *základní věta algebry* nemá nic společného s algebrou.

Máločlenem (anglicky *fewnomial*) nazýváme polynom vysokého stupně, který má jen málo nenulových členů.

Máločlenem (anglicky *fewnomial*) nazýváme polynom vysokého stupně, který má jen málo nenulových členů.

Příklady:

Máločlenem (anglicky *fewnomial*) nazýváme polynom vysokého stupně, který má jen málo nenulových členů.

Příklady:

- $x^{100} - 1$,

Máločlenem (anglicky *fewnomial*) nazýváme polynom vysokého stupně, který má jen málo nenulových členů.

Příklady:

- $x^{100} - 1$,
- $ax^n + bx^m$.

Hlavní vlastnost máločlenu

Hlavní vlastnost máločlenu

Lidová forma sdělení:

Hlavní vlastnost máločlenu

Lidová forma sdělení: *Máločlen má jen málo kořenů.*

Hlavní vlastnost máločlenu

Lidová forma sdělení: *Máločlen má jen málo kořenů.*

Matematická forma sdělení:

Hlavní vlastnost máločlenu

Lidová forma sdělení: *Máločlen má jen málo kořenů.*

Matematická forma sdělení:

Věta (o kořenech máločlenu)

Polynom s k nenulovými koeficienty má nejvýše $2k - 1$ reálných kořenů.

Descartovo pravidlo

Zajímají-li nás jen kladné kořeny, pak je předcházející věta je moc slabá.

Descartovo pravidlo

Zajímají-li nás jen kladné kořeny, pak je předcházející věta je moc slabá.

Příklad: polynom s nezápornými koeficienty nemá kořeny vůbec!

Descartovo pravidlo

Zajímají-li nás jen kladné kořeny, pak je předcházející věta je moc slabá.

Příklad: polynom s nezápornými koeficienty nemá kořeny vůbec!

Proto zde máme drobné vylepšení:

Descartovo pravidlo

Zajímají-li nás jen kladné kořeny, pak je předcházející věta je moc slabá.

Příklad: polynom s nezápornými koeficienty nemá kořeny vůbec!

Proto zde máme drobné vylepšení:

Věta (Descartovo pravidlo)

Počet kladných kořenů polynomu je menší nebo roven počtu změn znamének v posloupnosti nenulových koeficientů.

Descartovo pravidlo

Zajímají-li nás jen kladné kořeny, pak je předcházející věta je moc slabá.

Příklad: polynom s nezápornými koeficienty nemá kořeny vůbec!

Proto zde máme drobné vylepšení:

Věta (Descartovo pravidlo)

Počet kladných kořenů polynomu je menší nebo roven počtu změn znamének v posloupnosti nenulových koeficientů.

Pozorování: Descartovo pravidlo implikuje větu o máločlenech.

Kolik kořenů má polynom na (a, b) ?

Kolik kořenů má polynom na (a, b) ?

Definice

Nechť f je polynom bez násobných kořenů. *Sturmovou posloupností* nazýváme $\{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ s klesajícími stupni splňující

- $p_0(x) = f(x)$, $p_1(x) = f'(x)$,

Kolik kořenů má polynom na (a, b) ?

Definice

Nechť f je polynom bez násobných kořenů. *Sturmovou posloupností* nazýváme $\{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ s klesajícími stupni splňující

- $p_0(x) = f(x)$, $p_1(x) = f'(x)$,
- je-li $p_k(t) = 0$, pak jsou čísla $p_{k-1}(t)$ a $p_{k+1}(t)$ nenulová a mají opačná znaménka,

Kolik kořenů má polynom na (a, b) ?

Definice

Nechť f je polynom bez násobných kořenů. *Sturmovou posloupností* nazýváme $\{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ s klesajícími stupni splňující

- $p_0(x) = f(x)$, $p_1(x) = f'(x)$,
- je-li $p_k(t) = 0$, pak jsou čísla $p_{k-1}(t)$ a $p_{k+1}(t)$ nenulová a mají opačná znaménka,
- $p_n(x)$ nemá kořeny.

Kolik kořenů má polynom na (a, b) ?

Definice

Nechť f je polynom bez násobných kořenů. *Sturmovou posloupností* nazýváme $\{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ s klesajícími stupni splňující

- $p_0(x) = f(x)$, $p_1(x) = f'(x)$,
- je-li $p_k(t) = 0$, pak jsou čísla $p_{k-1}(t)$ a $p_{k+1}(t)$ nenulová a mají opačná znaménka,
- $p_n(x)$ nemá kořeny.

Věta (o kořenech na segmentu)

Počet kořenů polynomu na (a, b) je roven $S(a) - S(b)$, kde $S(x)$ je počet alternací v posloupnosti $p_0(x), \dots, p_n(x)$.

Konstrukce Sturmovy posloupnosti

Konstrukce Sturmovy posloupnosti

Postupujeme indukcí podle rekurentního vzorce

Postupujeme indukcí podle rekurentního vzorce

$$p_{k-1}(x) = q(x)p_k(x) - p_{k+1}(x).$$

$$f(x) = x^5 - x + a$$

$$f(x) = x^5 - x + a$$

Potom Sturmova posloupnost má tvar

$$x^5 - x + a, \quad x^4 - \frac{1}{5}, \quad x - \frac{5}{4}a, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4 a^4 - \frac{1}{5}.$$

Uctivá poznámka na závěr

Uctívá poznámka na závěr



Uctivá poznámka na závěr

MR3419962 65N55 65N30

Lukáš, Dalibor (CZ-TUOEE-AM); Bouchala, Jiří (CZ-TUOEE-AM);
Vodstrěl, Petr (CZ-TUOEE-AM); Malý, Lukáš [Malý, Lukáš*] (CZ-TUOEE-AM)
2-dimensional primal domain decomposition theory in detail. (English
summary)

Appl. Math. **60** (2015), no. 3, 265–283.

The paper provides details of a domain decomposition method for elliptic equations of 2nd order on a 2-dimensional domain. If the equations inside the subdomains of size H are inverted exactly, the typical approximation of the Schur complement leads to a preconditioner of the order $O((1 + \log(H/h))^2)$. The theory dates back to Bramble, Pasciak and Schatz, and it has been revisited by many authors. The authors of the present paper point out that understanding the theory is hard and that some details have never been published. Therefore they want to present all the proofs in detail.

Dietrich Bruns

References

1. J. H. Bramble, J. E. Pasciak, A. H. Schatz: The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I. *Math. Comput.* **47** (1986), 103–134. [MR0842125](#)
2. M. Dryja, B. F. Smith, O. B. Widlund: Schwarz analysis of iterative substructuring algorithms for elliptic problems in three dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.* **31** (1994), 1662–1694. [MR1302680](#)
3. M. Dryja, O. B. Widlund: Some domain decomposition algorithms for elliptic problems. *Iterative Methods for Large Linear Systems*. Austin, TX, 1988. Academic Press, Boston, 1990, pp. 273–291. [MR1038100](#)
4. C. Farhat, F.-X. Roux: A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **32** (1991), 1205–1227.
5. A. George: Nested dissection of a regular finite element mesh. *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 345–363. [MR0388756](#)
6. J. Mandel, M. Brezina: Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients. *Math. Comput.* **65** (1996), 1387–1401. [MR1351204](#)
7. J. Mandel, R. Tezaur: Convergence of a substructuring method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.* **73** (1996), 473–487. [MR1393176](#)
8. L. E. Payne, H. F. Weinberger: An optimal Poincaré inequality for convex domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **5** (1960), 286–292. [MR0117419](#)
9. A. Toselli, O. Widlund: *Domain Decomposition Methods—Algorithms and Theory*. Springer Series in Computational Mathematics 34, Springer, Berlin, 2005. [MR2104179](#)

Note: This list reflects references listed in the original paper as accurately as possible with no attempt to correct errors.