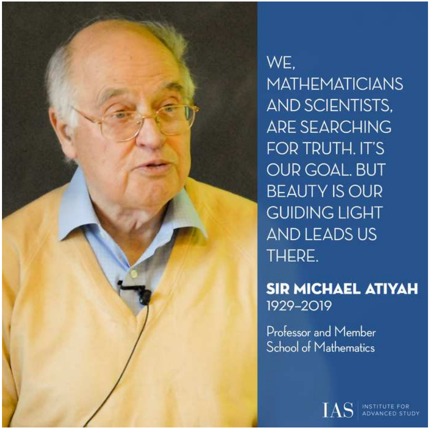
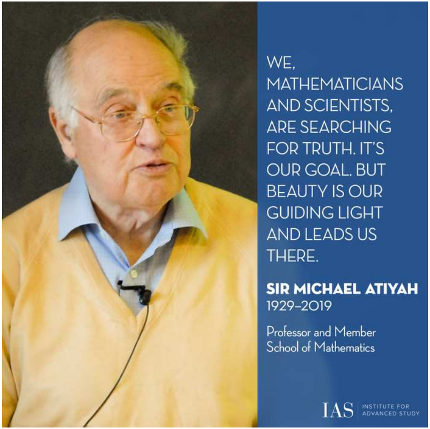
Riemannova hypotéza – 160 let boje bez vítěze

OSMA, 22.10.2019

Mirko Rokyta

KMA MFF UK Praha


WE, MATHEMATICIANS AND SCIENTISTS, ARE SEARCHING FOR TRUTH. IT'S OUR GOAL. BUT BEAUTY IS OUR GUIDING LIGHT AND LEADS US THERE.
SIR MICHAEL ATIYAH
1929–2019
Professor and Member
School of Mathematics
IAS INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY



Michael Atiyah

22. 4. 1929 – 11. 1. 2019

(Fieldsova medaile 1966, Abelova cena 2004)

Drobná historka na úvod:

Drobná historka na úvod:

Říká se, že se kdosi slavného matematika Davida Hilberta (1862-1943) zeptal: „Kdybyste měl podobně jako bájný Frederick Barbarossa obživnout po pěti stech letech, co byste dělal?“

Drobná historka na úvod:

Říká se, že se kdosi slavného matematika Davida Hilberta (1862-1943) zeptal: „Kdybyste měl podobně jako bájný Frederick Barbarossa obživnout po pěti stech letech, co byste dělal?“

Hilbert odpověděl: „Zeptal bych se, jestli už někdo dokázal Riemannovu hypotézu.“

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

(39 let, 10 měsíců, 3 dny)

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

(39 let, 10 měsíců, 3 dny)

O čem bude dnes řeč:

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

(39 let, 10 měsíců, 3 dny)

O čem bude dnes řeč:

- Co to vlastně je, ta Riemannova hypotéza (RH).

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

(39 let, 10 měsíců, 3 dny)

O čem bude dnes řeč:

- Co to vlastně je, ta Riemannova hypotéza (RH).
- Souvislost RH s prvočísly a jejich rozložením.

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

(39 let, 10 měsíců, 3 dny)

O čem bude dnes řeč:

- Co to vlastně je, ta Riemannova hypotéza (RH).
- Souvislost RH s prvočísly a jejich rozložením.
- Vliv RH na jiné vědní obory (šifrování a kódování, kvantová fyzika...).

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

(39 let, 10 měsíců, 3 dny)

O čem bude dnes řeč:

- Co to vlastně je, ta Riemannova hypotéza (RH).
- Souvislost RH s prvočísly a jejich rozložením.
- Vliv RH na jiné vědní obory (šifrování a kódování, kvantová fyzika...).
- Krása matematiky kolem i uvnitř RH.

První přiblížení k formulaci RH:

První přiblížení k formulaci RH:

Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ (čti "zeta/dzeta") do komplexní roviny.

První přiblížení k formulaci RH:

Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ (čti "zeta/dzeta") do komplexní roviny.

Přirozené otázky:

První přiblížení k formulaci RH:

Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ (čti "zeta/dzeta") do komplexní roviny.

Přirozené otázky:

- Co je Riemannova funkce ζ?

První přiblížení k formulaci RH:

Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ (čti "zeta/dzeta") do komplexní roviny.

Přirozené otázky:

- Co je Riemannova funkce ζ?
- Co je to analytické prodloužení do komplexní roviny?

První přiblížení k formulaci RH:

Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ (čti "zeta/dzeta") do komplexní roviny.

Přirozené otázky:

- Co je Riemannova funkce ζ?
- Co je to analytické prodloužení do komplexní roviny?
- Co je to "netriviální kořen"?

První přiblížení k formulaci RH:

Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ (čti "zeta/dzeta") do komplexní roviny.

Přirozené otázky:

- Co je Riemannova funkce ζ?
- Co je to analytické prodloužení do komplexní roviny?
- Co je to "netriviální kořen"? Znamená to, že jsou i nějaké jiné (triviální) kořeny?

První přiblížení k formulaci RH:

Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ (čti "zeta/dzeta") do komplexní roviny.

Přirozené otázky:

- Co je Riemannova funkce ζ?
- Co je to analytické prodloužení do komplexní roviny?
- Co je to "netriviální kořen"? Znamená to, že jsou i nějaké jiné (triviální) kořeny?
- A proč se to všechno vlastně studuje?

2. Na cestě k Riemannově funkci ζ

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$.

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$.
Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$:

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$. Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} \quad = \quad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$.
Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{f(x),\ \text{definovaná (dává výsledek) jen pro } |x| < 1}$$

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$.
Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$:

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{g(x),\ \text{má smysl pro všechna } x \neq 1} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{f(x),\ \text{definovaná (dává výsledek) jen pro } |x| < 1}$$

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$.
Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$:

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{g(x),\text{ má smysl pro všechna } x \neq 1} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{f(x),\text{ definovaná (dává výsledek) jen pro } |x| < 1}$$

Funkce g je analytickým prodloužením funkce f, pokud

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$. Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$:

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{g(x),\text{ má smysl pro všechna } x \neq 1} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots}_{f(x),\text{ definovaná (dává výsledek) jen pro } |x| < 1}$$

Funkce g je analytickým prodloužením funkce f, pokud

- g je definovaná "pro více hodnot", než f,

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$. Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$:

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{g(x),\ \text{má smysl pro všechna } x \neq 1} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots}_{f(x),\ \text{definovaná (dává výsledek) jen pro } |x| < 1}$$

Funkce g je analytickým prodloužením funkce f, pokud

- g je definovaná "pro více hodnot", než f,
- g se shoduje s f tam, kde je definována f,

Zkoumejme nekonečnou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$. Protože jde o **geometrickou řadu s kvocientem** x, je pro $x \in \mathbb{C}, |x| < 1$:

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{g(x),\text{ má smysl pro všechna } x \neq 1} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{f(x),\text{ definovaná (dává výsledek) jen pro } |x| < 1}$$

Funkce g je analytickým prodloužením funkce f, pokud

- g je definovaná "pro více hodnot", než f,
- g se shoduje s f tam, kde je definována f,
- f i g jsou analytické.

Analytičnost (holomorfnost) matematicky:

Analytičnost (holomorfnost) matematicky: existence konečné **komplexní** první derivace (ve všech bodech).

Analytičnost (holomorfnost) matematicky: existence konečné **komplexní** první derivace (ve všech bodech).

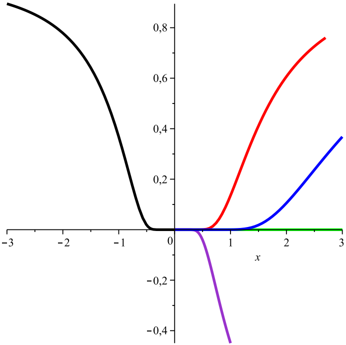
Představa (ne zcela přesná): "hladkost grafu" a "hladké napojení grafu" dané funkce.

Analytičnost (holomorfnost) matematicky: existence konečné **komplexní** první derivace (ve všech bodech).

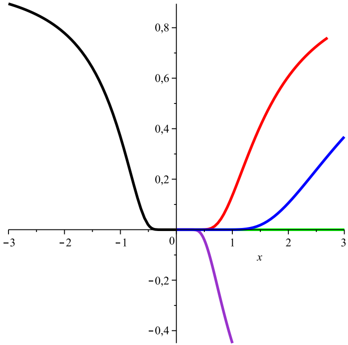
Představa (ne zcela přesná): "hladkost grafu" a "hladké napojení grafu" dané funkce.

V komplexní rovině je analytické prodloužení určeno **jednoznačně** (a stačí ona jedna derivace). Na reálné ose nestačí pro jednoznačnost prodloužení ani shoda ve všech derivacích.

Hladké napojení reálné funkce



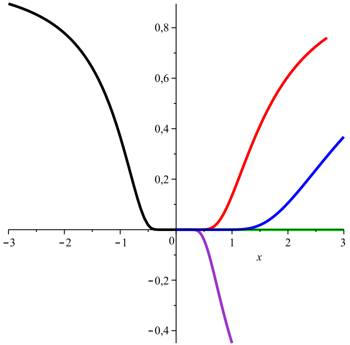
Hladké napojení reálné funkce



Ani shoda ve všech derivacích v bodě 0 nestačí k jednoznačnému pokračování.

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}},\ e^{-\frac{2}{x^2}},\ e^{-\frac{9}{x^2}},\ 0,\ -e^{-\frac{0.8}{x^2}}\right)$$

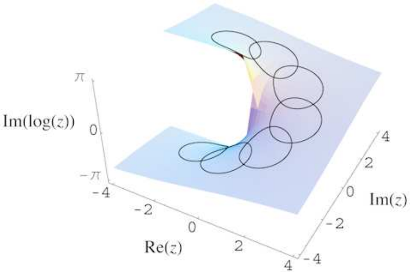
Hladké napojení reálné funkce



Ani shoda ve všech derivacích v bodě 0 nestačí k jednoznačnému pokračování.

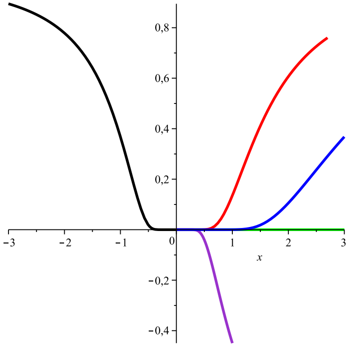
$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}, e^{-\frac{2}{x^2}}, e^{-\frac{9}{x^2}}, 0, -e^{-\frac{0.8}{x^2}}\right)$$

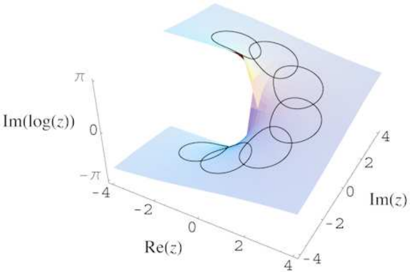
Komplexní analytické prodloužení



Hladké napojení reálné funkce

Komplexní analytické prodloužení





Ani shoda ve všech derivacích v bodě 0 nestačí k jednoznačnému pokračování.

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}},\ e^{-\frac{2}{x^2}},\ e^{-\frac{9}{x^2}},\ 0,\ -e^{-\frac{0.8}{x^2}}\right)$$

Shoda v jediné komplexní derivaci stačí k jednoznačnému pokračování.

(Zde zobrazeno analytické pokračování komplexního logaritmu – imaginární část.)

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\, |x| < 1} = \underbrace{\frac{1}{1 - x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\, x \neq 1}$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}:$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2}$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ \ (ok)$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1 - x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ \ (ok)$$

$$x = -1:$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1 - x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \overset{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)}$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \ (?!)$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \ \ (?!)$$

$$x = 2:$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \ (?!)$$

$$x = 2: \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \quad (?!)$$

$$x = 2: \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - 2}$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} = \frac{1}{\underbrace{1 - x}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \ (?!)$$

$$x = 2: \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - 2} = -1$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \quad (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \quad (?!)$$

$$x = 2: \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-2} = -1 \quad (???)$$

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{\text{definováno pro } x \in \mathbb{C},\ |x| < 1} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{prodloužení, definované pro všechna } x \in \mathbb{C},\ x \neq 1}$$

$$x = \frac{1}{2}: \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \ \ (ok)$$

$$x = -1: \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \overset{?}{=} \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \ \ (?!)$$

$$x = 2: \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \overset{?}{=} \frac{1}{1 - 2} = -1 \ \ (???)$$

Pozor, to není součet! V případě $x = -1$ a $x = 2$ jsme nespočetli součet příslušné řady, ale přiřadili jsme oné řadě hodnotu, kterou v bodě x nabývá její analytické prodloužení.

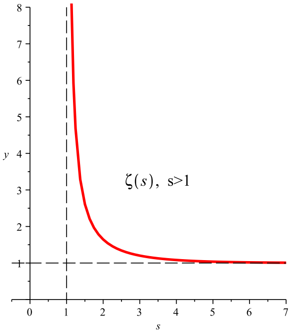
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

3. Konečně: ζ, její prodloužení a Hypotéza

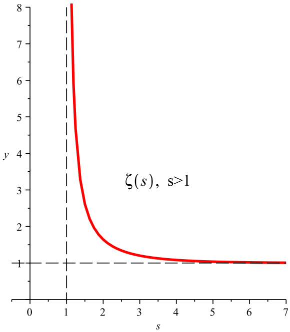
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$

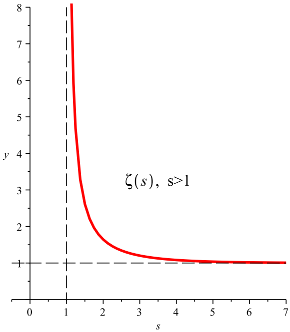


$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

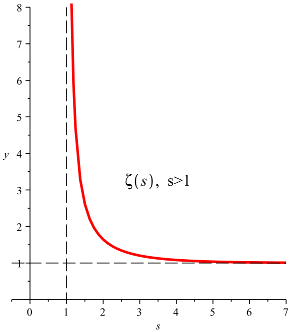
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

3. Konečně: ζ, její prodloužení a Hypotéza

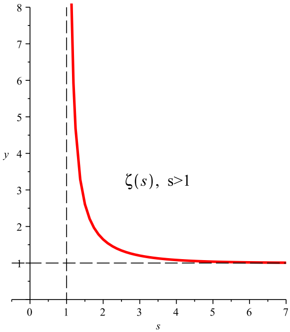
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

(Harmonická řada)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$

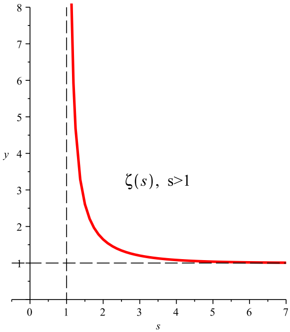


$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

(Harmonická řada)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$

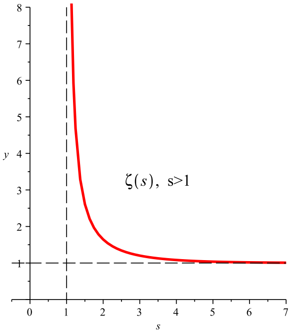


$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

(Harmonická řada)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



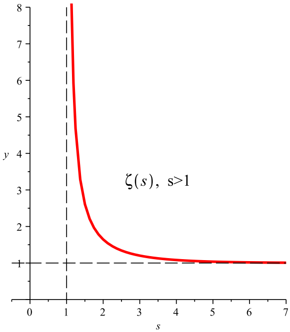
$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

(Harmonická řada)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Basilejský problém, Euler, 1735)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

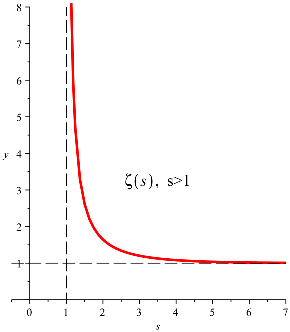
(Harmonická řada)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Basilejský problém, Euler, 1735)

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

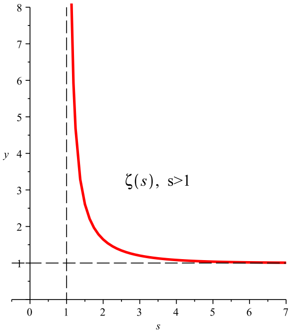
(Harmonická řada)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Basilejský problém, Euler, 1735)

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = ???$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

(Harmonická řada)

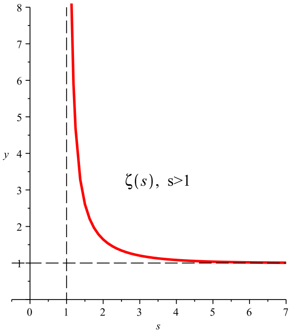
$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Basilejský problém, Euler, 1735)

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = ???$$

$\approx 1.202056903\ldots$ (Apéryho konstanta)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

(Harmonická řada)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

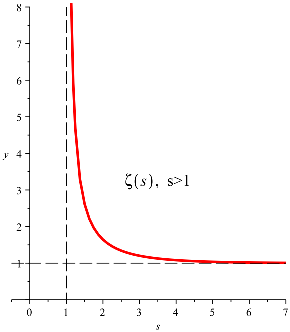
(Basilejský problém, Euler, 1735)

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = ???$$

$\approx 1.202056903\ldots$ (Apéryho konstanta)

ζ(sudá čísla) $=$ známe,

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots, \qquad s\in\mathbb{R}, s>1$$



$$\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$$

(Harmonická řada)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

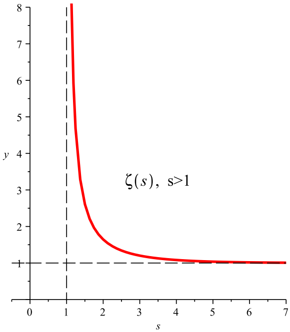
(Basilejský problém, Euler, 1735)

$$\zeta(3)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots=???$$

$\approx 1.202056903\ldots$ (Apéryho konstanta)

$$\zeta(\text{sudá čísla})=\text{známe}, \qquad \zeta(2n)=q_n\pi^{2n},\ q_n\in\mathbb{Q},$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{R}, s > 1$$



$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

(Harmonická řada)

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Basilejský problém, Euler, 1735)

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = ???$$

$\approx 1.202056903\ldots$ (Apéryho konstanta)

ζ(sudá čísla) $=$ známe, $\qquad \zeta(2n) = q_n \pi^{2n}, \; q_n \in \mathbb{Q}$,

ζ(lichá čísla) $=$ nevíme (téměř) nic.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \quad s \in \mathbb{R}, \quad s > 1.$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) =$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ \end{cases}$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\,,\qquad s\in\mathbb{C},\Re(s)>1.$$

$$\zeta(s)=\begin{cases}\frac{1}{s-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1),\\ 2^s\pi^{s-1}\cdot\Gamma(1-s)\cdot\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C}\text{ modulo lim}).\end{cases}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, & (0 < \Re(s) \leq 1,\ s \neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s) \leq 0,\ \text{resp. } s \in \mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$).

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, & (0<\Re(s)\le 1,\ s\ne 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s)\le 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$\zeta(-1)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, & (0 < \Re(s) \le 1,\ s \ne 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s) \le 0,\ \text{resp. } s \in \mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots, \qquad s\in\mathbb{C}, \Re(s)>1.$$

$$\zeta(s)=\begin{cases}\frac{1}{s-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1),\\ 2^s\pi^{s-1}\cdot\Gamma(1-s)\cdot\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}).\end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n)=(n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1)=2^{-1}\pi^{-2}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \cdot 1! \cdot \sin \frac{(-\pi)}{2}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!\cdot \sin\frac{(-\pi)}{2}\cdot\zeta(2)$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\,,\qquad s\in\mathbb{C},\Re(s)>1.$$

$$\zeta(s)=\begin{cases}\frac{1}{s-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\,, & (0<\Re(s)\le 1,\ s\ne 1),\\ 2^s\pi^{s-1}\cdot\Gamma(1-s)\cdot\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\le 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C}\text{ modulo lim}).\end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n)=(n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1)=2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!\cdot\sin\frac{(-\pi)}{2}\cdot\zeta(2)=\frac{1}{2\cdot\pi^2}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots , \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \cdot 1! \cdot \sin \frac{(-\pi)}{2} \cdot \zeta(2) = \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot 1$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \cdot 1! \cdot \sin \frac{(-\pi)}{2} \cdot \zeta(2) = \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!\cdot \sin\frac{(-\pi)}{2}\cdot\zeta(2) = \frac{1}{2\cdot\pi^2}\cdot 1\cdot(-1)\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!\cdot \sin\frac{(-\pi)}{2}\cdot\zeta(2) = \frac{1}{2\cdot\pi^2}\cdot 1\cdot(-1)\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots, \qquad s\in\mathbb{C}, \Re(s)>1.$$

$$\zeta(s)=\begin{cases}\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\,, & (0<\Re(s)\le 1,\ s\ne 1),\\ 2^s\pi^{s-1}\cdot\Gamma(1-s)\cdot\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\le 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}).\end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n)=(n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1)=2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!\cdot\sin\frac{(-\pi)}{2}\cdot\zeta(2)=\frac{1}{2\cdot\pi^2}\cdot 1\cdot(-1)\cdot\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{12}.$$

Jedna z možných interpretací tohoto výsledku:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \cdot 1! \cdot \sin\frac{(-\pi)}{2} \cdot \zeta(2) = \frac{1}{2\cdot\pi^2} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Jedna z možných interpretací tohoto výsledku:

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, & (0 < \Re(s) \le 1,\ s \ne 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s) \le 0,\ \text{resp. } s \in \mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \cdot 1! \cdot \sin \frac{(-\pi)}{2} \cdot \zeta(2) = \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Jedna z možných interpretací tohoto výsledku:

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \cdots$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!\cdot \sin\frac{(-\pi)}{2}\cdot\zeta(2) = \frac{1}{2\cdot\pi^2}\cdot 1\cdot(-1)\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Jedna z možných interpretací tohoto výsledku:

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \cdots = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s)\leq 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2}\cdot 1!\cdot \sin\frac{(-\pi)}{2}\cdot\zeta(2) = \frac{1}{2\cdot\pi^2}\cdot 1\cdot(-1)\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Jedna z možných interpretací tohoto výsledku:

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \cdots = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

$$\boxed{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \approx -\frac{1}{12}.}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, & (0<\Re(s)\le 1,\ s\ne 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), & (\Re(s)\le 0,\ \text{resp. } s\in\mathbb{C} \text{ modulo lim}). \end{cases}$$

(Připomeňme: $\Gamma(n) = (n-1)!$). Lze spočíst například

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \cdot 1! \cdot \sin \frac{(-\pi)}{2} \cdot \zeta(2) = \frac{1}{2\cdot\pi^2} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Jedna z možných interpretací tohoto výsledku:

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \cdots = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

$$\boxed{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \approx -\frac{1}{12}.}$$

(Pozor, to není součet!)

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s)\leq 0). \end{cases}$$

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx\,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s)\,, & (\Re(s)\leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s)\leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

$$2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) = 0$$

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0 < \Re(s) \leq 1,\ s \neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s) \leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

$$2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) = 0$$

$$\sin \frac{\pi s}{2} = 0$$

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0 < \Re(s) \leq 1,\, s \neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s) \leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

$$\begin{aligned} 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) &= 0 \\ \sin \frac{\pi s}{2} &= 0 \\ \frac{\pi s}{2} &= n\pi \end{aligned}$$

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0 < \Re(s) \leq 1,\ s \neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s) \leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

$$\begin{aligned} 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) &= 0 \\ \sin \frac{\pi s}{2} &= 0 \\ \frac{\pi s}{2} &= n\pi \implies s = 2n \,, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0<\Re(s)\leq 1,\, s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s)\leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

$$\begin{aligned} 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\tfrac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) &= 0 \\ \sin\tfrac{\pi s}{2} &= 0 \\ \tfrac{\pi s}{2} &= n\pi \implies s = 2n\,, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ale máme $\Re(s) < 0$:

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0<\Re(s)\leq 1,\ s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s)\leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

$$\begin{aligned} 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\tfrac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) &= 0 \\ \sin\tfrac{\pi s}{2} &= 0 \\ \tfrac{\pi s}{2} &= n\pi \implies s = 2n \,, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ale máme $\Re(s) < 0$: $\quad s = -2n,\ n \in \mathbb{N}.$

Ještě jednou si napišme jak vypadá analytické prodloužení ζ funkce:

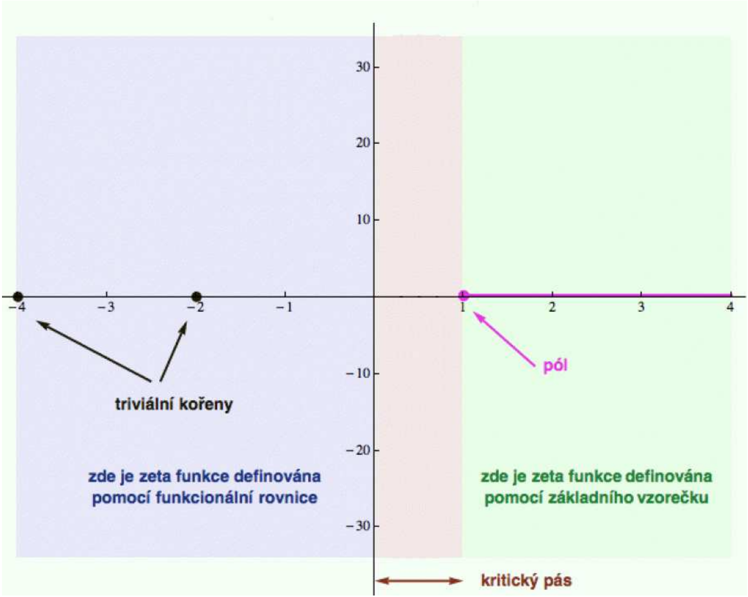
$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \,, & (0<\Re(s)\leq 1,\, s\neq 1), \\ 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) \,, & (\Re(s)\leq 0). \end{cases}$$

Pro $\Re(s) > 1$ je $\zeta(s) \neq 0$ (ještě uvidíme).
Pro $\Re(s) < 0$ není těžké nalézt všechny kořeny ζ:

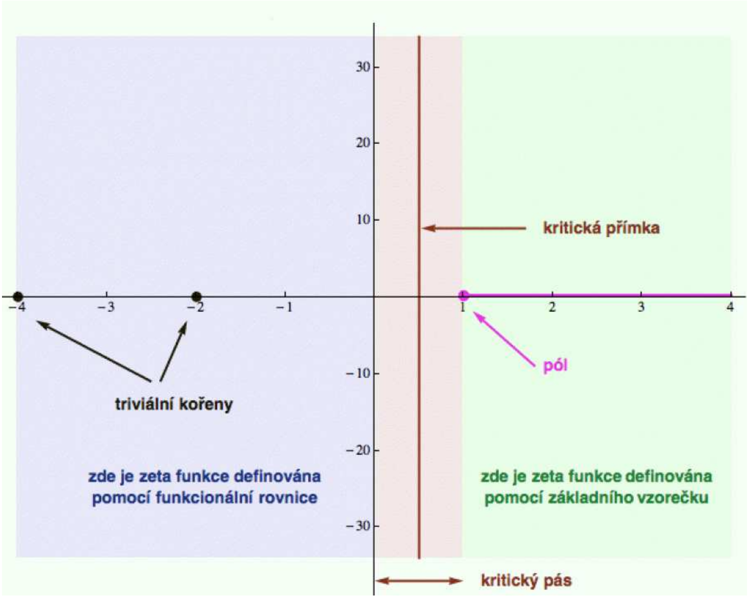
$$\begin{aligned} 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) &= 0 \\ \sin\frac{\pi s}{2} &= 0 \\ \frac{\pi s}{2} &= n\pi \implies s = 2n \,, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ale máme $\Re(s) < 0$: $\quad s = -2n, \; n \in \mathbb{N}.$

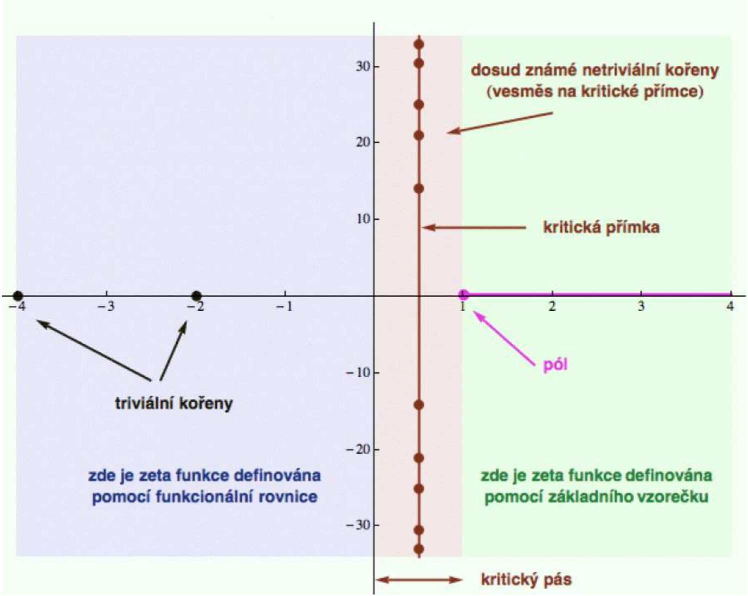
To jsou ony triviální (snadno spočítatelné) kořeny.



(Upravená grafika Jana Řeháčka, janrehacek.blog.idnes.cz)



(Upravená grafika Jana Řeháčka, janrehacek.blog.idnes.cz)

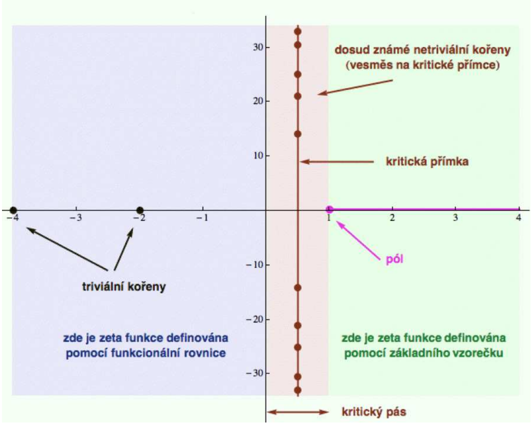


(Upravená grafika Jana Řeháčka, janrehacek.blog.idnes.cz)

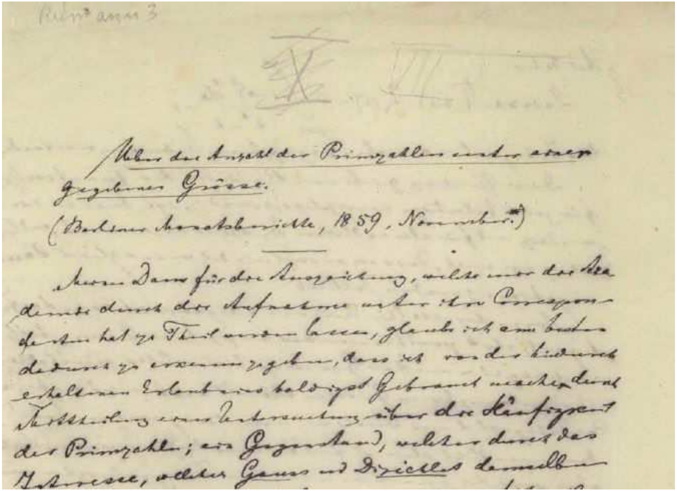
Riemannova hypotéza (listopad 1859):

Riemannova hypotéza (listopad 1859):

Všechny netriviální kořeny analytického prodloužení funkce $\zeta(s)$ do komplexní roviny jsou umístěny na přímce $\Re(s) = \frac{1}{2}$ (která je osou kritického pásu).



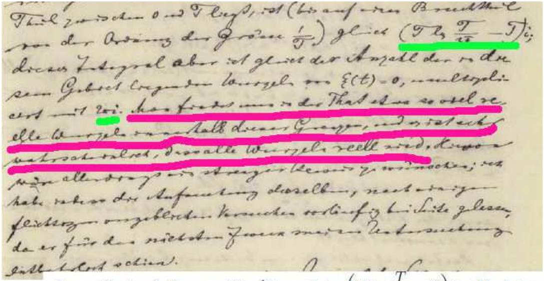
Titulní stránka rukopisu slavného článku z r. 1859:


Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Berliner Monatsberichte, 1859, November.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben

Kritická pasáž (str. 3 z 6)



of magnitude of the quantity $\frac{1}{T}$) equal to $\left(T\log\frac{T}{2\pi}-T\right)i$; this integral however is equal to the number of roots of $\xi(t)=0$ lying within in this region, multiplied by $2\pi i$. One now finds indeed approximately this number of real roots within these limits, and it is very probable that all roots are real. Certainly one would wish for a stricter proof here; I have meanwhile temporarily put aside the search for this after some fleeting futile attempts, as it appears unnecessary for the next objective of my investigation.

... v této oblasti skutečně můžeme nalézt zhruba toto množství kořenů . . . [viz zeleně podtržený vztah] a je pravděpodobné, že i všechny ostatní kořeny jsou reálné. [Riemann si funkci ζ "otočil" tak, že se mu kritické přímka dostala na reálnou osu.] Určitě by bylo dobře mít pro toto tvrzení důkaz, já jsem však jeho hledání po několika marných pokusech vzdal, protože pro cíle mého zkoumání není v této chvíli nutný.

Dvě přirozené otázky:

Dvě přirozené otázky:

1. Proč zrovna osa kritického pásu, $\Re(s) = \frac{1}{2}$?

Dvě přirozené otázky:

1. Proč zrovna osa kritického pásu, $\Re(s) = \frac{1}{2}$?

   Například proto, že vztah ($s \in \mathbb{C}$, pro kritické body ve smyslu limity)

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s),$$

   vykazuje symetrii ve funkci ζ vůči bodu $\frac{1}{2}$.

Dvě přirozené otázky:

1. Proč zrovna osa kritického pásu, $\Re(s) = \frac{1}{2}$?

   Například proto, že vztah ($s \in \mathbb{C}$, pro kritické body ve smyslu limity)

   $$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s),$$

   vykazuje symetrii ve funkci ζ vůči bodu $\frac{1}{2}$.
2. A proč je to rozložení kořenů vlastně tak důležité?

Dvě přirozené otázky:

1. Proč zrovna osa kritického pásu, $\Re(s) = \frac{1}{2}$?

   Například proto, že vztah ($s \in \mathbb{C}$, pro kritické body ve smyslu limity)

   $$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s),$$

   vykazuje symetrii ve funkci ζ vůči bodu $\frac{1}{2}$.

2. A proč je to rozložení kořenů vlastně tak důležité?

   Protože to má překvapivý vliv na spousty dalších věcí. . .

Dvě přirozené otázky:

1. Proč zrovna osa kritického pásu, $\Re(s) = \frac{1}{2}$?

   Například proto, že vztah ($s \in \mathbb{C}$, pro kritické body ve smyslu limity)

   $$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s),$$

   vykazuje symetrii ve funkci ζ vůči bodu $\frac{1}{2}$.

2. A proč je to rozložení kořenů vlastně tak důležité?

   Protože to má překvapivý vliv na spousty dalších věcí…

…například na rozložení prvočísel …

Dvě přirozené otázky:

1. Proč zrovna osa kritického pásu, $\Re(s) = \frac{1}{2}$?

   Například proto, že vztah ($s \in \mathbb{C}$, pro kritické body ve smyslu limity)

   $$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s),$$

   vykazuje symetrii ve funkci ζ vůči bodu $\frac{1}{2}$.

2. A proč je to rozložení kořenů vlastně tak důležité?

   Protože to má překvapivý vliv na spousty dalších věcí…

…například na rozložení prvočísel …

…ale to se musíme vrátit v čase trochu zpět …

Dvě přirozené otázky:

1. Proč zrovna osa kritického pásu, $\Re(s) = \frac{1}{2}$?

   Například proto, že vztah ($s \in \mathbb{C}$, pro kritické body ve smyslu limity)

   $$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s),$$

   vykazuje symetrii ve funkci ζ vůči bodu $\frac{1}{2}$.

2. A proč je to rozložení kořenů vlastně tak důležité?

   Protože to má překvapivý vliv na spousty dalších věcí…

…například na rozložení prvočísel …

…ale to se musíme vrátit v čase trochu zpět …

…pokud ještě máme energii na to, abychom vstřebali nové informace …

Kresba Jiří Winter Neprakta

Nač ještě více informací? Tyhle mi úplně stačí pro nespavost!

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots \\
\frac{1}{2^s}\zeta(s) &= \quad\; +\frac{1}{2^s} \qquad\;\; +\frac{1}{4^s} \qquad\;\; +\frac{1}{6^s}+\cdots
\end{aligned}
$$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$
$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \quad + \frac{1}{2^s} \qquad + \frac{1}{4^s} \qquad + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big| -$$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \quad + \frac{1}{2^s} \qquad + \frac{1}{4^s} \qquad + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big| -$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) =$$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \quad + \frac{1}{2^s} \quad + \frac{1}{4^s} \quad + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big| -$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 \quad + \frac{1}{3^s} \quad + \frac{1}{5^s} \quad + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots \\
\frac{1}{2^s}\zeta(s) &= + \frac{1}{2^s} \phantom{+ \frac{1}{3^s}} + \frac{1}{4^s} \phantom{+ \frac{1}{5^s}} + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big|\, - \\
\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) &= 1 \phantom{+ \frac{1}{2^s}} + \frac{1}{3^s} \phantom{+ \frac{1}{4^s}} + \frac{1}{5^s} \phantom{+ \frac{1}{6^s}} + \cdots \\
\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) &=
\end{aligned}
$$

4. Euler a prvočísla…a prvočíselná věta …

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots \\
\frac{1}{2^s}\zeta(s) &= +\frac{1}{2^s}\phantom{+\frac{1}{3^s}}+\frac{1}{4^s}\phantom{+\frac{1}{5^s}}+\frac{1}{6^s}+\cdots \qquad \Big|\, - \\
\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) &= 1\phantom{+\frac{1}{2^s}}+\frac{1}{3^s}\phantom{+\frac{1}{4^s}}+\frac{1}{5^s}\phantom{+\frac{1}{6^s}}+\cdots \\
\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) &= 1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\cdots
\end{aligned}
$$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \quad + \frac{1}{2^s} \quad + \frac{1}{4^s} \quad + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big| -$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 \quad + \frac{1}{3^s} \quad + \frac{1}{5^s} \quad + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \cdots$$

Eratosthenovo síto …

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = + \frac{1}{2^s} \phantom{+\frac{1}{3^s}} + \frac{1}{4^s} \phantom{+\frac{1}{5^s}} + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big| -$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 \phantom{+\frac{1}{2^s}} + \frac{1}{3^s} \phantom{+\frac{1}{4^s}} + \frac{1}{5^s} \phantom{+\frac{1}{6^s}} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \cdots$$

Eratosthenovo síto ...

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \cdot \zeta(s) = 1,$$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \quad + \frac{1}{2^s} \quad + \frac{1}{4^s} \quad + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big| -$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 \quad + \frac{1}{3^s} \quad + \frac{1}{5^s} \quad + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \cdots$$

Eratosthenovo síto ...

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \cdot \zeta(s) = 1, \quad \Re(s) > 1.$$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \quad + \frac{1}{2^s} \qquad + \frac{1}{4^s} \qquad + \frac{1}{6^s} + \cdots \qquad \Big| -$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 \qquad + \frac{1}{3^s} \qquad + \frac{1}{5^s} \qquad + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \cdots$$

Eratosthenovo síto . . .

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \cdot \zeta(s) = 1, \quad \Re(s) > 1.$$

(Odtud mimo jiné plyne $\zeta(s) \neq 0$ pro $\Re(s) > 1$.)

***L. Euler*, 1737:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

L. Euler, 1737:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1,$$

***L. Euler*, 1737**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1,$$

sčítáme přes všechna přirozená čísla n,

***L. Euler*, 1737**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1,$$

sčítáme přes všechna přirozená čísla n, a násobíme přes všechna prvočísla p.

***L. Euler*, 1737**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1,$$

sčítáme přes všechna přirozená čísla n, a násobíme přes všechna prvočísla p.

Souvislost ζ-funkce a prvočísel!

***L. Euler*, 1737**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1,$$

sčítáme přes všechna přirozená čísla n, a násobíme přes všechna prvočísla p.

Souvislost ζ-funkce a prvočísel!

Str. 1 Riemannova článku:

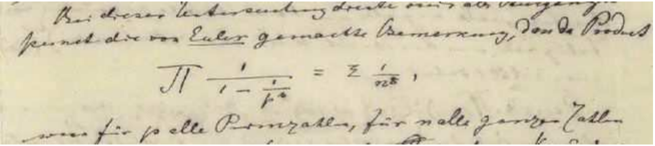
***L. Euler*, 1737**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1,$$

sčítáme přes všechna přirozená čísla n, a násobíme přes všechna prvočísla p.

Souvislost ζ-funkce a prvočísel!

Str. 1 Riemannova článku:


Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen

Ano, Riemannovi šlo hlavně o studium rozložení prvočísel a důkaz nebo i zpřesnění tzv. **prvočíselné věty**.

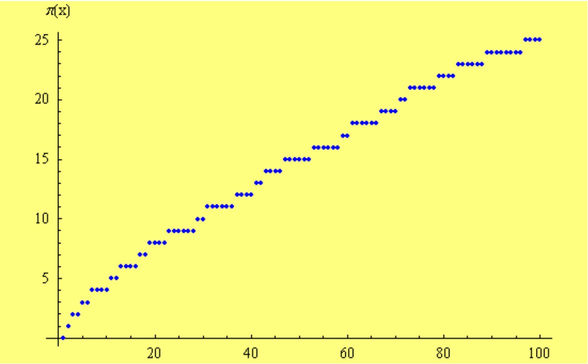
Ano, Riemannovi šlo hlavně o studium rozložení prvočísel a důkaz nebo i zpřesnění tzv. **prvočíselné věty**.
Označme

Ano, Riemannovi šlo hlavně o studium rozložení prvočísel a důkaz nebo i zpřesnění tzv. **prvočíselné věty**.
Označme

$$\pi(x) = \text{počet prvočísel, menších než } x.$$

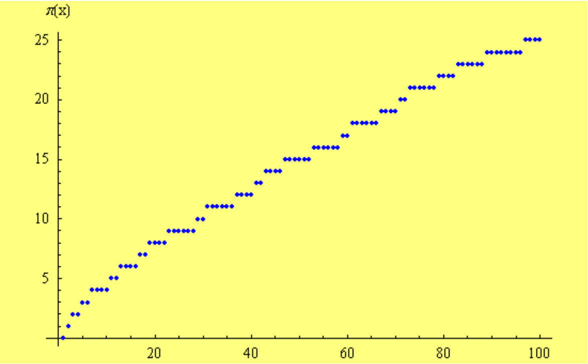
Ano, Riemannovi šlo hlavně o studium rozložení prvočísel a důkaz nebo i zpřesnění tzv. **prvočíselné věty**. Označme

$$\pi(x) = \text{počet prvočísel, menších než } x.$$



Ano, Riemannovi šlo hlavně o studium rozložení prvočísel a důkaz nebo i zpřesnění tzv. **prvočíselné věty**. Označme

$$\pi(x) = \text{počet prvočísel, menších než } x.$$



Prvočíselná věta $\approx$ uměli bychom tím proložit "co nejpřesněji" křivku, popsanou pomocí "známých" funkcí?

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

Tentýž *C. F. Gauss* později (kolem **1849**, bez důkazu i bez publikování, jen v dopise příteli) poskytl alternativní odhad:

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x)$$

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

Tentýž *C. F. Gauss* později (kolem **1849**, bez důkazu i bez publikování, jen v dopise příteli) poskytl alternativní odhad:

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\,.$$

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

Tentýž *C. F. Gauss* později (kolem **1849**, bez důkazu i bez publikování, jen v dopise příteli) poskytl alternativní odhad:

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\,.$$

Gaussův odhad se zdá být "geniálně uhodnutý", přitom však není zas tak obtížné (pokud jsme všímaví) odhad $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ zpozorovat.

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

Tentýž *C. F. Gauss* později (kolem **1849**, bez důkazu i bez publikování, jen v dopise příteli) poskytl alternativní odhad:

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\,.$$

Gaussův odhad se zdá být "geniálně uhodnutý", přitom však není zas tak obtížné (pokud jsme všímaví) odhad $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ zpozorovat. (Hodně těžké je až dokázat jej.)

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} .$$

Tentýž *C. F. Gauss* později (kolem **1849**, bez důkazu i bez publikování, jen v dopise příteli) poskytl alternativní odhad:

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} .$$

Gaussův odhad se zdá být "geniálně uhodnutý", přitom však není zas tak obtížné (pokud jsme všímaví) odhad $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ zpozorovat. (Hodně těžké je až dokázat jej.) Viz následující tabulka.

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$
1 000	168	5,952

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$
1 000	168	5,952
10 000	1 229	8,137

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$
1 000	168	5,952
10 000	1 229	8,137
100 000	9 592	10,425

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$
1 000	168	5,952
10 000	1 229	8,137
100 000	9 592	10,425
1 000 000	78 498	12,739

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$
1 000	168	5,952
10 000	1 229	8,137
100 000	9 592	10,425
1 000 000	78 498	12,739
10 000 000	664 579	15,047

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308

Rozdíl v poměrech je přibližně:

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308
Rozdíl v poměrech je přibližně:			$\ln 10 \approx 2,306$

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308
Rozdíl v poměrech je přibližně:			$\ln 10 \approx 2,306$

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10$$

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308
Rozdíl v poměrech je přibližně:			$\ln 10 \approx 2,306$

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n}$$

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308
Rozdíl v poměrech je přibližně:			$\ln 10 \approx 2,306$

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308
Rozdíl v poměrech je přibližně:			$\ln 10 \approx 2,306$

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

Odtud plyne "Gaussovská" hypotéza:

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10^n$$

x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308
Rozdíl v poměrech je přibližně:			$\ln 10 \approx 2,306$

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

Odtud plyne "Gaussovská" hypotéza:

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10^n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{\pi(x)} \approx \ln x$$

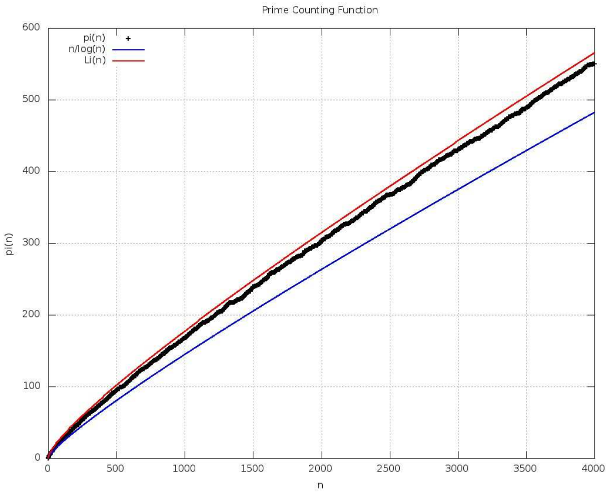
x	$\pi(x)$	Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$	Rozdíl v poměrech
1 000	168	5,952	—
10 000	1 229	8,137	2,185
100 000	9 592	10,425	2,288
1 000 000	78 498	12,739	2,314
10 000 000	664 579	15,047	2,308
Rozdíl v poměrech je přibližně:			$\ln 10 \approx 2,306$

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

Odtud plyne "Gaussovská" hypotéza:

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10^n \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\pi(x)} \approx \ln x \quad \Longrightarrow \quad \pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$



$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < \mathrm{Li}(x)\,, \quad \text{zde pro } \ x \in (0, 4000)$$

Prvočíselnou větu dokázali až v r. 1896 (nezávisle na sobě) *Jacques Hadamard* a *Charles de la Vallée Poussin*.

Prvočíselnou větu dokázali až v r. 1896 (nezávisle na sobě) *Jacques Hadamard* a *Charles de la Vallée Poussin*.

Metoda jejich důkazu: Pokud Riemannova funkce nemá kořeny na hranici kritického pásu, tak platí:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \quad \text{pro } x \to \infty\,,$$

Prvočíselnou větu dokázali až v r. 1896 (nezávisle na sobě) *Jacques Hadamard* a *Charles de la Vallée Poussin*.

Metoda jejich důkazu: Pokud Riemannova funkce nemá kořeny na hranici kritického pásu, tak platí:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \quad \text{pro } x \to \infty \,,$$

přesněji: platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1 \,.$$

Prvočíselnou větu dokázali až v r. 1896 (nezávisle na sobě) *Jacques Hadamard* a *Charles de la Vallée Poussin*.

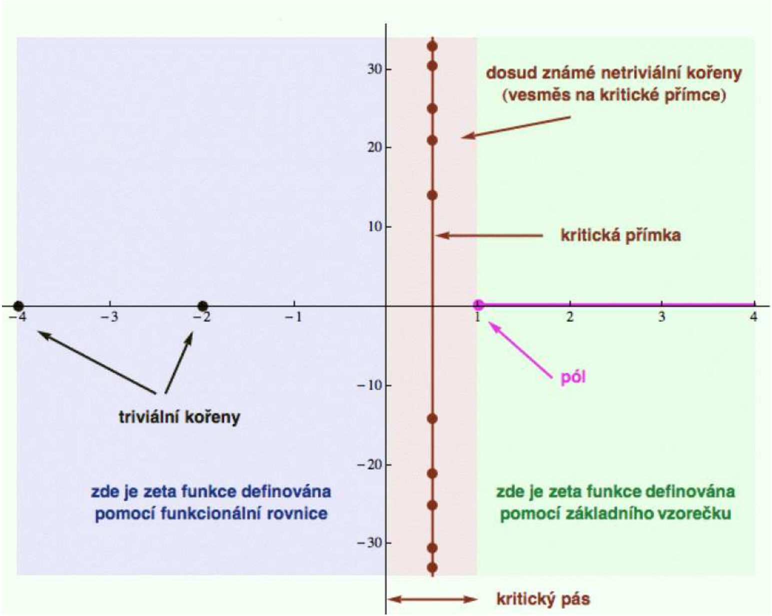
Metoda jejich důkazu: Pokud Riemannova funkce nemá kořeny na hranici kritického pásu, tak platí:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \quad \text{pro } x \to \infty\,,$$

přesněji: platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1\,.$$

Přitom: Čím více dokážeme netriviální kořeny Riemannovy funkce "přiblížit" kritické přímce, tím lépe dokážeme popsat chování prvočíselné funkce $\pi(x)$.


dosud známé netriviální kořeny
(vesměs na kritické přímce)
kritická přímka
pól
triviální kořeny
zde je zeta funkce definována
pomocí funkcionální rovnice
zde je zeta funkce definována
pomocí základního vzorečku
kritický pás
30
20
10
−10
−20
−30
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

Jeden z výsledků, který plyne z Riemannova slavného článku z r. 1859 lze vyjádřit takto:

Jeden z výsledků, který plyne z Riemannova slavného článku z r. 1859 lze vyjádřit takto:

1. Definujme

$$R(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\,\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}\,\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \cdots$$

Jeden z výsledků, který plyne z Riemannova slavného článku z r. 1859 lze vyjádřit takto:

1. Definujme

$$R(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \cdots$$

   kde znaménka (a vlastně i přítomnost) jednotlivých členů řady se řídí tzv. Möbiovou funkcí (ta je dobře známa, $\mu(n) : 1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, \ldots$).

Jeden z výsledků, který plyne z Riemannova slavného článku z r. 1859 lze vyjádřit takto:

1. Definujme

$$R(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \cdots$$

   kde znaménka (a vlastně i přítomnost) jednotlivých členů řady se řídí tzv. Möbiovou funkcí (ta je dobře známa, $\mu(n) : 1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, \ldots$).
2. **Pokud platí Riemannova hypotéza**,

Jeden z výsledků, který plyne z Riemannova slavného článku z r. 1859 lze vyjádřit takto:

1. Definujme

$$R(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \cdots$$

   kde znaménka (a vlastně i přítomnost) jednotlivých členů řady se řídí tzv. Möbiovou funkcí (ta je dobře známa, $\mu(n) : 1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, \ldots$).

2. **Pokud platí Riemannova hypotéza**, je prvočíselná funkce rovna (PŘESNĚ (!))

Jeden z výsledků, který plyne z Riemannova slavného článku z r. 1859 lze vyjádřit takto:

1. Definujme

$$R(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \cdots$$

   kde znaménka (a vlastně i přítomnost) jednotlivých členů řady se řídí tzv. Möbiovou funkcí (ta je dobře známa, $\mu(n) : 1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, \ldots$).

2. **Pokud platí Riemannova hypotéza**, je prvočíselná funkce rovna (PŘESNĚ (!))

$$\pi(x) = R(x) + \sum_{\alpha} R(x^{\alpha}),$$

Jeden z výsledků, který plyne z Riemannova slavného článku z r. 1859 lze vyjádřit takto:

1. Definujme

$$R(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \cdots$$

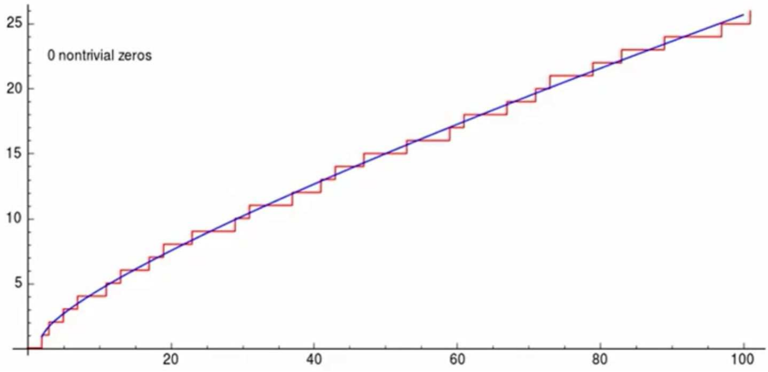
   kde znaménka (a vlastně i přítomnost) jednotlivých členů řady se řídí tzv. Möbiovou funkcí (ta je dobře známa, $\mu(n) : 1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, \dots$).

2. **Pokud platí Riemannova hypotéza**, je prvočíselná funkce rovna (PŘESNĚ (!))

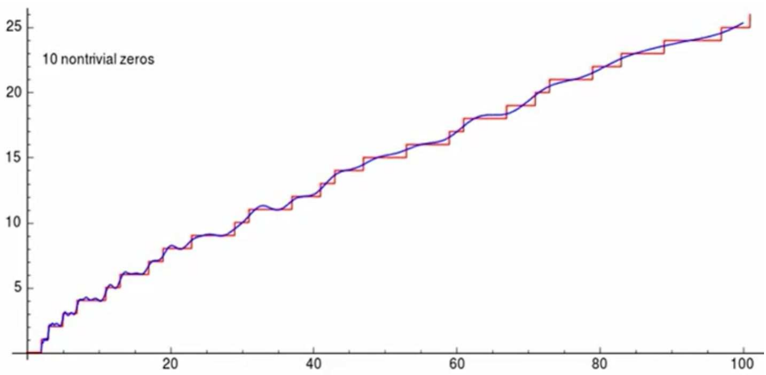
$$\pi(x) = R(x) + \sum_{\alpha} R(x^{\alpha}),$$

   přičemž v posledním členu se sčítá přes všechny netriviální kořeny α Riemannovy funkce.

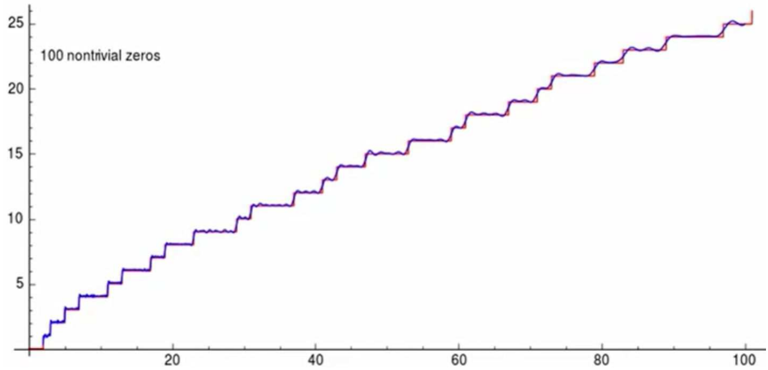
(Viz obrázky a animace)



$\pi(x)$ a $R(x)$



$$\pi(x) \text{ a } R(x) + \sum_{j=1}^{10} R(x^{\alpha_j})$$



$$\pi(x) \text{ a } R(x) + \sum_{j=1}^{100} R(x^{\alpha_j})$$

5. Stoletý skok

1900: Hilbertovy problémy
(23 nejdůležitějších otázek tehdejší matematiky, dnes již 19 vyřešeno)

1900: Hilbertovy problémy
(23 nejdůležitějších otázek tehdejší matematiky, dnes již 19 vyřešeno)

...

...

...

...

8. problém: Riemannova hypotéza

...

...

...

...

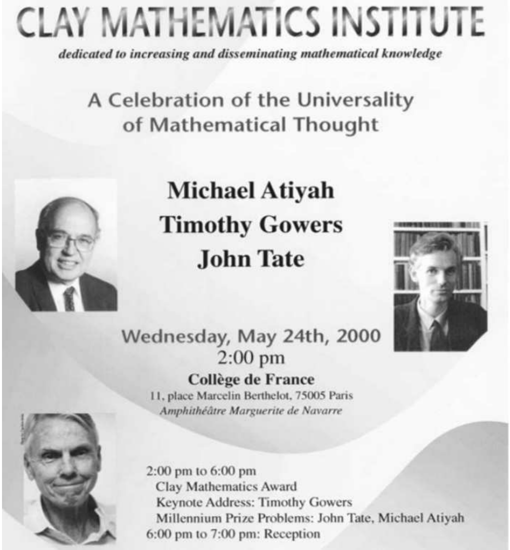
2000: Problémy milénia ("Problémy pro 3. tisíciletí")

7 problémů, vyhlášených americkým Clayovým institutem, za jeden každý je vypsána odměna 1 milion USD.

2000: Problémy milénia ("Problémy pro 3. tisíciletí")

7 problémů, vyhlášených americkým Clayovým institutem, za jeden každý je vypsána odměna 1 milion USD.

1. Problém P vs. NP
2. Hodgeova domněnka
3. Poincarého domněnka - vyřešena 2003 (*Grigorij Perelman*), důkaz ověřen jako správný 2006.
4. Riemannova hypotéza
5. Yangova-Millsova teorie a hypotéza hmotnostních rozdílů
6. Navierovy-Stokesovy rovnice
7. Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka


CLAY MATHEMATICS INSTITUTE
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge
A Celebration of the Universality
of Mathematical Thought
Michael Atiyah
Timothy Gowers
John Tate
Wednesday, May 24th, 2000
2:00 pm
Collège de France
11, place Marcelin Berthelot, 75005 Paris
Amphithéâtre Marguerite de Navarre
2:00 pm to 6:00 pm
Clay Mathematics Award
Keynote Address: Timothy Gowers
Millennium Prize Problems: John Tate, Michael Atiyah
6:00 pm to 7:00 pm: Reception

6. Co víme dnes

Co nevíme:

Co nevíme:

Stále ještě nevíme, jestli RH platí nebo ne . . .

Co nevíme:

Stále ještě nevíme, jestli RH platí nebo ne . . .

. . . i když se o její důkaz pokusily ty největší mozky posledních 160 let.

Co nevíme:

Stále ještě nevíme, jestli RH platí nebo ne . . .

. . . i když se o její důkaz pokusily ty největší mozky posledních 160 let.

- Riemann, Hilbert, Hardy, Littlewood, Selberg, Turing, Montgomery, Cohen, Grothendieck, Connes, de Branges, Conrey, Berry, Atiyah. . . a tisíce dalších . . .

Snapshot č. 1 ze stránky arxiv.org z 15.9.2019:

https://arxiv.org/search/?query=Proof+of+the+Riemann+hyp 67% Vyhledat

Showing 1–31 of 31 results for title: Proof of the Riemann hypothesis

Search v0.5 released 2018-12-20 Feedback?

Proof of the Riemann hypothesis | Title | Search

Show abstracts Hide abstracts

Advanced Search

50 results per page. Sort results by Announcement date (newest first) Go

1. arXiv:1905.09385 [pdf, ps, other] math.GM doi 10.13140/RG.2.2.32078.10564

A Proof of the Riemann's Hypothesis

Authors: Charaf Ech-Chatbi

Abstract: We present a proof of the Riemann's Zeta Hypothesis, based on asymptotic expansions and operations on series. We use the symmetry property presented by Riemann's functional equation to extend the proof to the whole set of complex numbers C. The advantage of our method is that it only uses undergraduate maths which makes it accessible to a wider audience.

Submitted 23 May, 2019; **v1** submitted 18 May, 2019; **originally announced** May 2019.

Comments: 78 pages. +Corrected typos in pages 5, 6, 9. +Added the exact words of Peter Sarnak in page 3. +Added a short explanation and remark concerning the Riemann Rearrangement in page 6 and 7, +Added information about the author in the footnote of page 1

MSC Class: 11; 26; 30; 40

2. arXiv:1805.06746 [pdf, ps, other] math.GM

A Proof of the Riemann Hypothesis Through the Nicolas Inequality

Authors: Tom Milner-Gulland

Abstract: A work by Nicolas has shown that if it can be proven that a certain inequality holds for all n, the Riemann hypothesis is true. This inequality is associated with the Mertens theorem, and hence the Euler totient at $\prod_{k=1}^{n} p_k$, where n is any integer and p_n is the n-th prime. We shall show that indeed the Nicolas inequality holds for all n. Our paper also provides an elementary… ▽ More

Submitted 4 August, 2019; **v1** submitted 15 May, 2018; **originally announced** May 2018.

Comments: 5 pages

MSC Class: 11A25

3. arXiv:1708.01209 [pdf, ps, other] math.GM

A Proof of the Riemann hypothesis The new version contains a change in Definition 3.4, resulting in simpler proofs of theorems in Sections 3 and 4. Also, important proof in Sec.5 has been modified, for completeness and clarity

Authors: Frank Stenger

Abstract: The function $G(z) = \int_0^\infty \xi^{z-1} (1+\exp(\xi))^{-1} \, d\xi$ is analytic and has the same zeros as the Riemann zeta function in the critical strip $D = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \Re z < 1\}$. This paper combines some novel methods about indefinite integration, indefinite convolutions and inversions of Fourier transforms with numerical ranges of operators to prove the Riemann hypothesis.

Submitted 8 February, 2018; **v1** submitted 3 August, 2017; **originally announced** August 2017.

Snapshot č. 2 ze stránky arxiv.org z 15.9.2019:

https://arxiv.org/search/?query=Disproof+of+the+Riemann+h 67% Vyhledat

Showing 1–3 of 3 results for title: Disproof of the Riemann hypothesis

Search v0.5 released 2018-1

Disproof of the Riemann hypothesis | Title

Show abstracts Hide abstracts

50 results per page. Sort results by Announcement date (newest first) Go

1. arXiv:1808.10774 [pdf, ps, other] math.GM

A disproof of the Riemann hypothesis on zeros of ζ—function

Authors: Vladimir Ryazanov

Abstract: Applying the known Nyman--Beurling criterion, it is disproved the Riemann hypothesis on zeros of ζ—function.

Submitted 11 April, 2019; **v1** submitted 30 August, 2018; **originally announced** August 2018.

Comments: 9 pages

MSC Class: 11M06; 11M26; 30C15 (Primary); 11K31; 54C30; 94B27 (Secondary)

2. arXiv:1807.06447 math.GM

A disproof of the Riemann Hypothesis via the Nicolas Criterion

Authors: Vincenzo Oliva

Abstract: The achievement of this paper is a confutation of the inequality addressed by the Nicolas criterion for the Riemann Hypothesis, carried out after establishing properties of two related sequences. One of them is the product $\prod_{k=1}^{n}(1-1/p_k)$, rewritten as an alternating sum. The disproof is by contradiction: assuming the Nicolas inequality is always true, we reach an absurdity exploiting the... ▽ More

Submitted 5 September, 2018; **v1** submitted 14 July, 2018; **originally announced** July 2018.

Comments: Withdrawn for expected critical errors in both versions. The author hopes the lemmata of the second version could prove useful for related attempts

3. arXiv:0910.1534 [pdf, other] math.NT math.GM

Failed attempt to disproof the Riemann Hypothesis

Authors: Marek Wolf

Abstract: In this paper we are going to describe the results of the computer experiment, which in principle can rule out the Riemann Hypothesis. We use the sequence c_k appearing in the \BD criterion for the RH. Namely we calculate c_{100000} with thousand digits of accuracy using two different formulas for c_k with the aim to disproof the Riemann Hypothesis in the case these two numbers will differ... ▽ More

Submitted 8 October, 2009; **originally announced** October 2009.

Comments: 16 pages, 2 figures

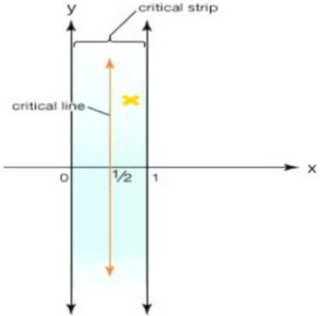
Slide č. 12 (ze 13) z přednášky M. Atiyaha z 24. září 2018:

HOW DOES T(s) HELP TO PROVE RH?

- Proof by contradiction: **assume** b is a zero of ζ, in the critical strip but not on the critical line & derive contradiction. Define:

$$F(s) = T(1+\zeta(s+b)) - 1 \qquad F(b) = 0$$

- convexity of the critical strip implies F(2s) = 2F(s)
- analyticity of F(s) at 0 then implies F(s) identically zero
- this implies ζ(s) is identically zero, the required contradiction



Co se (kromě snahy dokázat či vyvrátit RH) studuje:

Co se (kromě snahy dokázat či vyvrátit RH) studuje:

1. Počet kořenů na kritické přímce.

Co se (kromě snahy dokázat či vyvrátit RH) studuje:

1. Počet kořenů na kritické přímce.
   Nenašli bychom přece jen s pomocí počítačů kořen, který neleží na kritické přímce a tím vyvrátili RH?

Co se (kromě snahy dokázat či vyvrátit RH) studuje:

1. Počet kořenů na kritické přímce.
   Nenašli bychom přece jen s pomocí počítačů kořen, který neleží na kritické přímce a tím vyvrátili RH?
2. Rozložení a chování kořenů na kritické přímce.

Co se (kromě snahy dokázat či vyvrátit RH) studuje:

1. Počet kořenů na kritické přímce.
   Nenašli bychom přece jen s pomocí počítačů kořen, který neleží na kritické přímce a tím vyvrátili RH?
2. Rozložení a chování kořenů na kritické přímce.
   Co kdybychom zpozorovali nějakou pravidelnost, která by pomohla najít tu správnou cestu, jak RH dokázat?

Co se (kromě snahy dokázat či vyvrátit RH) studuje:

1. Počet kořenů na kritické přímce.
   Nenašli bychom přece jen s pomocí počítačů kořen, který neleží na kritické přímce a tím vyvrátili RH?

2. Rozložení a chování kořenů na kritické přímce.
   Co kdybychom zpozorovali nějakou pravidelnost, která by pomohla najít tu správnou cestu, jak RH dokázat?

3. Souvislosti s jinými obory matematiky i dalších přírodních věd, ekvivalentní formulace.

Co se (kromě snahy dokázat či vyvrátit RH) studuje:

1. Počet kořenů na kritické přímce.
   Nenašli bychom přece jen s pomocí počítačů kořen, který neleží na kritické přímce a tím vyvrátili RH?

2. Rozložení a chování kořenů na kritické přímce.
   Co kdybychom zpozorovali nějakou pravidelnost, která by pomohla najít tu správnou cestu, jak RH dokázat?

3. Souvislosti s jinými obory matematiky i dalších přírodních věd, ekvivalentní formulace.
   Co kdyby nám taková souvislost pomohla přeformulovat RH "do jiného jazyka", kde by třeba byl důkaz lépe proveditelný?

1. **Počet spočtených kořenů v kritickém pásu**

1 Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1000

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1000
1956	Lehmer	25 000

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1000
1956	Lehmer	25 000
1966	Lehman	250 000

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1000
1956	Lehmer	25 000
1966	Lehman	250 000
1968	Rosser, Yohe & Schoenfeld	3 000 000

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1 000
1956	Lehmer	25 000
1966	Lehman	250 000
1968	Rosser, Yohe & Schoenfeld	3 000 000
1983	J. van de Lune & te Riele	300 000 000

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1 000
1956	Lehmer	25 000
1966	Lehman	250 000
1968	Rosser, Yohe & Schoenfeld	3 000 000
1983	J. van de Lune & te Riele	300 000 000
2001	J. van de Lune	10 000 000 000

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1 000
1956	Lehmer	25 000
1966	Lehman	250 000
1968	Rosser, Yohe & Schoenfeld	3 000 000
1983	J. van de Lune & te Riele	300 000 000
2001	J. van de Lune	10 000 000 000
dnes	Gourdon & Demichel	10 000 000 000 000

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1 000
1956	Lehmer	25 000
1966	Lehman	250 000
1968	Rosser, Yohe & Schoenfeld	3 000 000
1983	J. van de Lune & te Riele	300 000 000
2001	J. van de Lune	10 000 000 000
dnes	Gourdon & Demichel	10 000 000 000 000

. . . a všechny leží na kritické přímce.

(metoda: Riemannův-Siegelův vzorec)

Počet spočtených kořenů v kritickém pásu

1859	Riemann	3
1936	Titchmarsh (ještě "v ruce"!)	1 000
1956	Lehmer	25 000
1966	Lehman	250 000
1968	Rosser, Yohe & Schoenfeld	3 000 000
1983	J. van de Lune & te Riele	300 000 000
2001	J. van de Lune	10 000 000 000
dnes	Gourdon & Demichel	10 000 000 000 000

. . . a všechny leží na kritické přímce.

(metoda: Riemannův-Siegelův vzorec)

. . . kromě toho se ví, že všechny ostatní leží "blízko".

2 Rozložení kořenů, které leží na kritické přímce

2 Rozložení kořenů, které leží na kritické přímce

1970s, *Hugh Montgomery* (Mat) & *Freeman Dyson* (Fyz):

2. **Rozložení kořenů, které leží na kritické přímce**

1970s, *Hugh Montgomery* (Mat) & *Freeman Dyson* (Fyz):
Statistické rozložení známých kořenů na kritické přímce je stejné jako statistické rozložení tzv. vlastních čísel náhodných Hermitovských matic.

❷ Rozložení kořenů, které leží na kritické přímce

1970s, *Hugh Montgomery* (Mat) & *Freeman Dyson* (Fyz):
Statistické rozložení známých kořenů na kritické přímce je stejné jako statistické rozložení tzv. vlastních čísel náhodných Hermitovských matic.

Tato technika se přitom ve fyzice používá ke statistckému popisu energetických hladin atomových jader a úzce souvisí s některými jevy kvantové fyziky.

2 Rozložení kořenů, které leží na kritické přímce

1970s, *Hugh Montgomery* (Mat) & *Freeman Dyson* (Fyz): Statistické rozložení známých kořenů na kritické přímce je stejné jako statistické rozložení tzv. vlastních čísel náhodných Hermitovských matic.

Tato technika se přitom ve fyzice používá ke statistckému popisu energetických hladin atomových jader a úzce souvisí s některými jevy kvantové fyziky.

Překvapení: pokud bychom našli fyzikální (kvantový) dynamický systém, jehož tzv. vlastní čísla přesně odpovídají kořenům Riemannovy funkce, tak by tyto kořeny musely ležet na kritické přímce a RH by byla dokázána (*Michael Berry, matematický fyzik*).

2. **Rozložení kořenů, které leží na kritické přímce**

1970s, *Hugh Montgomery* (Mat) & *Freeman Dyson* (Fyz):
Statistické rozložení známých kořenů na kritické přímce je stejné jako statistické rozložení tzv. vlastních čísel náhodných Hermitovských matic.

Tato technika se přitom ve fyzice používá ke statistckému popisu energetických hladin atomových jader a úzce souvisí s některými jevy kvantové fyziky.

Překvapení: pokud bychom našli fyzikální (kvantový) dynamický systém, jehož tzv. vlastní čísla přesně odpovídají kořenům Riemannovy funkce, tak by tyto kořeny musely ležet na kritické přímce a RH by byla dokázána (*Michael Berry, matematický fyzik*).

$\Longrightarrow$ **Souvislosti: algebra, statistika, kvantovka ...**

❷ Rozložení kořenů, které leží na kritické přímce

1970s, *Hugh Montgomery* (Mat) & *Freeman Dyson* (Fyz):
Statistické rozložení známých kořenů na kritické přímce je stejné jako statistické rozložení tzv. vlastních čísel náhodných Hermitovských matic.

Tato technika se přitom ve fyzice používá ke statistckému popisu energetických hladin atomových jader a úzce souvisí s některými jevy kvantové fyziky.

Překvapení: pokud bychom našli fyzikální (kvantový) dynamický systém, jehož tzv. vlastní čísla přesně odpovídají kořenům Riemannovy funkce, tak by tyto kořeny musely ležet na kritické přímce a RH by byla dokázána (*Michael Berry, matematický fyzik*).

$\Longrightarrow$ **Souvislosti: algebra, statistika, kvantovka ...**

https://mathoverflow.net/questions/39944/collection-of-equivalent-forms-of-riemann-hypothesis

- **Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací**

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

$$\text{Buď } \omega(1) := 0,$$
$$\omega(n) := \text{počet prvočíselných faktorů } n,$$
$$\text{včetně násobnosti}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

Buď $\omega(1) := 0,$

$$\omega(n) := \text{počet prvočíselných faktorů } n,$$
$$\text{včetně násobnosti}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$
$$\lambda(n) := (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

$$\begin{aligned} \text{Buď } \omega(1) &:= 0, \\ \omega(n) &:= \text{počet prvočíselných faktorů } n, \\ &\quad\ \text{včetně násobnosti}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \\ \lambda(n) &:= (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

$$
\begin{aligned}
\text{Buď } \omega(1) &:= 0, \\
\omega(n) &:= \text{počet prvočíselných faktorů } n, \\
& \text{včetně násobnosti}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \\
\lambda(n) &:= (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}
$$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$
2	1	-1

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

Buď $\omega(1) := 0,$

$\omega(n) :=$ počet prvočíselných faktorů n, včetně násobnosti, $\quad n = 2, 3, 4, \ldots$

$\lambda(n) := (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,.$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$
2	1	-1
3	1	-1

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

Buď $\omega(1) := 0,$

$\omega(n) :=$ počet prvočíselných faktorů n, včetně násobnosti, $\quad n = 2, 3, 4, \ldots$

$\lambda(n) := (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,.$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$
2	1	-1
3	1	-1
$4 = 2 \cdot 2$	2	1

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

$$
\begin{aligned}
\text{Buď } \omega(1) &:= 0, \\
\omega(n) &:= \text{počet prvočíselných faktorů } n, \\
&\ \text{včetně násobnosti}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \\
\lambda(n) &:= (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}
$$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$
2	1	-1
3	1	-1
$4 = 2 \cdot 2$	2	1
	$\ldots$	

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

Buď $\omega(1) := 0,$

$$\omega(n) := \text{počet prvočíselných faktorů } n, \text{ včetně násobnosti}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$\lambda(n) := (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}.$$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$
2	1	-1
3	1	-1
$4 = 2 \cdot 2$	2	1
	$\dots$	
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	3	-1

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

$$\begin{aligned}
\text{Buď } \omega(1) &:= 0, \\
\omega(n) &:= \text{počet prvočíselných faktorů } n, \\
&\quad\ \text{včetně násobnosti}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \\
\lambda(n) &:= (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$
2	1	-1
3	1	-1
$4 = 2 \cdot 2$	2	1
	$\dots$	
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	3	-1

$\lambda(n) : 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots$

Jedna ze zajímavých ekvivalentních formulací

Buď $\omega(1) := 0,$

$\omega(n) :=$ počet prvočíselných faktorů n,

včetně násobnosti, $\quad n = 2, 3, 4, \ldots$

$\lambda(n) := (-1)^{\omega(n)} \quad n \in \mathbb{N}\,.$

n	$\omega(n)$	$\lambda(n)$
2	1	-1
3	1	-1
$4 = 2 \cdot 2$	2	1
	$\ldots$	
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	3	-1

$\lambda(n) : 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots$

$\sum \lambda(n) : 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, -2, -1, 0, -1, -2, \ldots$

Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0$$

Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

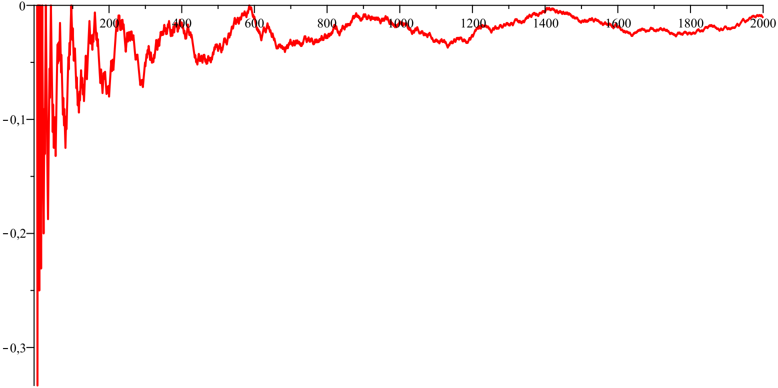
Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{RH}$$

Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1)+\cdots+\lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{RH}$$

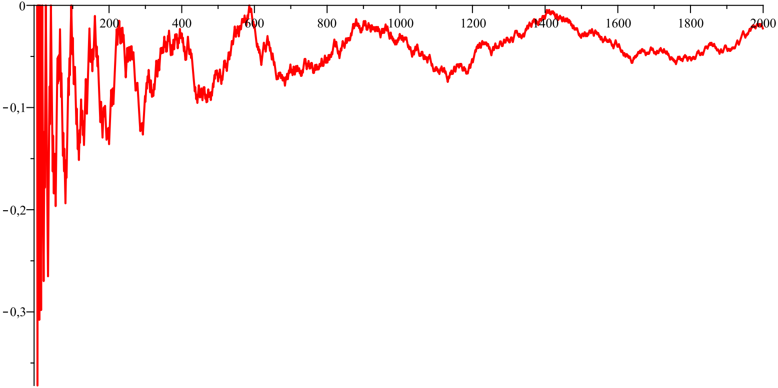
$\varepsilon = 0.5$



Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1)+\cdots+\lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{RH}$$

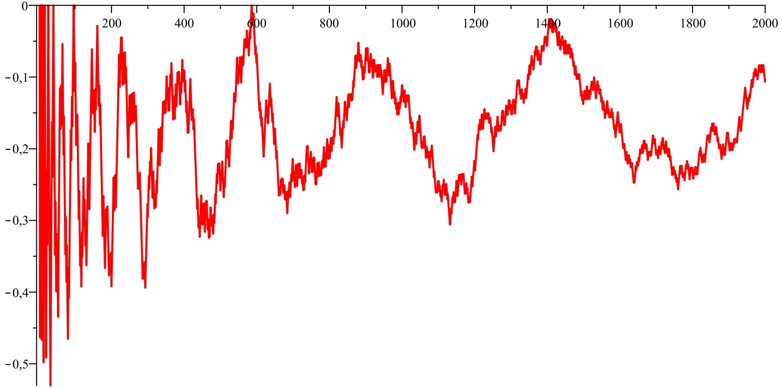
$\varepsilon = 0.4$



Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{RH}$$

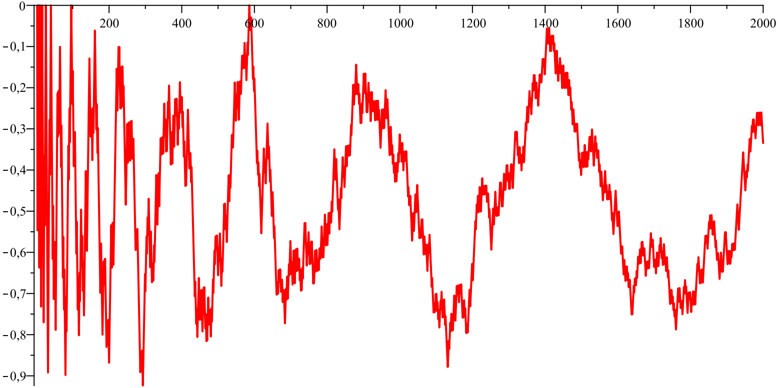
$\varepsilon = 0.2$



Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1)+\cdots+\lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{RH}$$

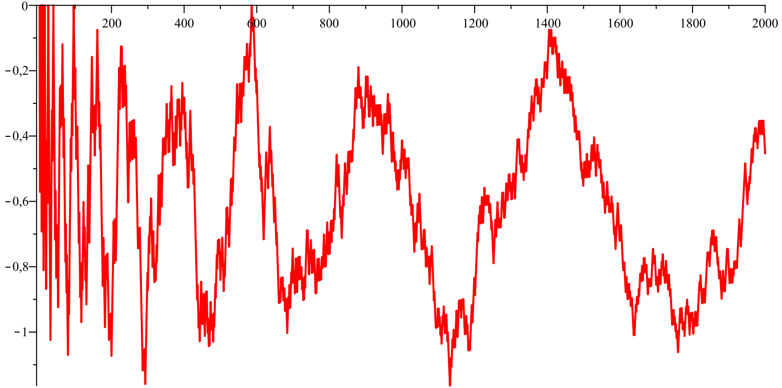
$\varepsilon = 0.05$



Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1)+\cdots+\lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{RH}$$

$\varepsilon = 0.01$



3 Další z mnoha souvislostí - šifrování a kódování.

. . . aneb "i prvočísla mohou mít praktické uplatnění".

3 Další z mnoha souvislostí - šifrování a kódování.

. . . aneb "i prvočísla mohou mít praktické uplatnění".

Konec 70. let - šifrovací systém RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

3 Další z mnoha souvislostí - šifrování a kódování.

. . . aneb "i prvočísla mohou mít praktické uplatnění".

Konec 70. let - šifrovací systém RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

Princip (bez velkých detailů):

3 Další z mnoha souvislostí - šifrování a kódování.

. . . aneb "i prvočísla mohou mít praktické uplatnění".

Konec 70. let - šifrovací systém RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

Princip (bez velkých detailů):

- Vezmi dvě velká prvočísla p, q a vynásob je: $N = p \cdot q$.

3 Další z mnoha souvislostí - šifrování a kódování.

. . . aneb "i prvočísla mohou mít praktické uplatnění".

Konec 70. let - šifrovací systém RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

Princip (bez velkých detailů):

- Vezmi dvě velká prvočísla p, q a vynásob je: $N = p \cdot q$.
- Pomocí tohoto N zakóduj svou zprávu algoritmem "RSA".

3 Další z mnoha souvislostí - šifrování a kódování.

...aneb "i prvočísla mohou mít praktické uplatnění".

Konec 70. let - šifrovací systém RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

Princip (bez velkých detailů):

- Vezmi dvě velká prvočísla p, q a vynásob je: $N = p \cdot q$.
- Pomocí tohoto N zakóduj svou zprávu algoritmem "RSA".
- Zakódovaná zpráva i ono N může být klidně zveřejněno, protože:

③ Další z mnoha souvislostí - šifrování a kódování.

... aneb "i prvočísla mohou mít praktické uplatnění".

Konec 70. let - šifrovací systém RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

Princip (bez velkých detailů):

- Vezmi dvě velká prvočísla p, q a vynásob je: $N = p \cdot q$.
- Pomocí tohoto N zakóduj svou zprávu algoritmem "RSA".
- Zakódovaná zpráva i ono N může být klidně zveřejněno, protože:
- Pro dekódování zprávy je potřeba umět rozložit (nebo znát rozklad) N zpátky na součin jeho dvou prvočinitelů p, q.

■ První obava: Je to bezpečné?

■ První obava: Je to bezpečné?

(Zatím) ano.

■ První obava: Je to bezpečné?

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele.

■ První obava: Je to bezpečné?

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele. Nemáme dost efektivní algoritmy.

■ První obava: Je to bezpečné?

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele. Nemáme dost efektivní algoritmy.

RSA - výzvy (vypsány slušné ceny)

- **První obava: Je to bezpečné?**

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele. Nemáme dost efektivní algoritmy.

RSA - výzvy (vypsány slušné ceny)

- RSA-230 (230 cifer), rozloženo 2018, výpočet trval několik měsíců.

- **První obava: Je to bezpečné?**

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele. Nemáme dost efektivní algoritmy.

RSA - výzvy (vypsány slušné ceny)

- RSA-230 (230 cifer), rozloženo 2018, výpočet trval několik měsíců.
- RSA-232 (232 cifer) dosud nebylo rozloženo.

- **První obava: Je to bezpečné?**

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele. Nemáme dost efektivní algoritmy.

RSA - výzvy (vypsány slušné ceny)

- RSA-230 (230 cifer), rozloženo 2018, výpočet trval několik měsíců.
- RSA-232 (232 cifer) dosud nebylo rozloženo.
- RSA-768B (768 bitů = 232 dekadických cifer) - rozloženo,

- **První obava: Je to bezpečné?**

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele. Nemáme dost efektivní algoritmy.

RSA - výzvy (vypsány slušné ceny)

- RSA-230 (230 cifer), rozloženo 2018, výpočet trval několik měsíců.
- RSA-232 (232 cifer) dosud nebylo rozloženo.
- RSA-768B (768 bitů = 232 dekadických cifer) - rozloženo, výpočet trval nonstop 2 roky na propojených paralelních počítačích.

- **První obava: Je to bezpečné?**

(Zatím) ano. Je totiž (zatím) nesmírně obtížné (a časově náročné i pro tu nejlepší výpočetní techniku) rozložit číslo o 200+ cifrách na prvočinitele. Nemáme dost efektivní algoritmy.

RSA - výzvy (vypsány slušné ceny)

- RSA-230 (230 cifer), rozloženo 2018, výpočet trval několik měsíců.
- RSA-232 (232 cifer) dosud nebylo rozloženo.
- RSA-768B (768 bitů = 232 dekadických cifer) - rozloženo, výpočet trval nonstop 2 roky na propojených paralelních počítačích. Ekvivalent výpočtu na jednojádrovém počítači typu 2,2 GHz AMD Opteron byl odhadnut na cca 2000 let výpočetního času.

■ Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x:

Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$;

■ Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

■ Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150})$$

Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150}) - \pi(10^{149})$$

Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150}) - \pi(10^{149}) \approx \frac{10^{150}}{\ln 10^{150}}$$

■ Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150}) - \pi(10^{149}) \approx \frac{10^{150}}{\ln 10^{150}} - \frac{10^{149}}{\ln 10^{149}}$$

Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150}) - \pi(10^{149}) \approx \frac{10^{150}}{\ln 10^{150}} - \frac{10^{149}}{\ln 10^{149}} \approx 2{,}6 \cdot 10^{147}.$$

Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150}) - \pi(10^{149}) \approx \frac{10^{150}}{\ln 10^{150}} - \frac{10^{149}}{\ln 10^{149}} \approx 2{,}6 \cdot 10^{147}.$$

To je obrovské číslo.

■ Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150}) - \pi(10^{149}) \approx \frac{10^{150}}{\ln 10^{150}} - \frac{10^{149}}{\ln 10^{149}} \approx 2{,}6 \cdot 10^{147}.$$

To je obrovské číslo. Počet atomů ve vesmíru $\approx 10^{80}$.

Druhá obava

Pro důležité kódování se používají čísla o 300 a více cifrách, tj. součiny prvočísel o cca 150 cifrách. Je jich dost? Nevyčerpáme je po nějaké konečné době?

Pomůže Gauss - odhad počtu prvočísel, menších než x: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; tj. odhad počtu prvočísel o 150 cifrách:

$$\pi(10^{150}) - \pi(10^{149}) \approx \frac{10^{150}}{\ln 10^{150}} - \frac{10^{149}}{\ln 10^{149}} \approx 2{,}6 \cdot 10^{147}.$$

To je obrovské číslo. Počet atomů ve vesmíru $\approx 10^{80}$.

Každý atom ve vesmíru může mít $10^{67} \cdot 10^{67}$ "svých" dvojic prvočísel o 150 cifrách pro své vlastní kódovací potřeby.

- **Třetí obava: kdyby se ukázalo, že RH platí, byl by to průšvih pro RSA či jiné šifrovací metody?**

- **Třetí obava: kdyby se ukázalo, že RH platí, byl by to průšvih pro RSA či jiné šifrovací metody?**

Určitě ne a možná ne.

- **Třetí obava: kdyby se ukázalo, že RH platí, byl by to průšvih pro RSA či jiné šifrovací metody?**

Určitě ne a možná ne.

- **Určitě ne**:

- **Třetí obava: kdyby se ukázalo, že RH platí, byl by to průšvih pro RSA či jiné šifrovací metody?**

Určitě ne a možná ne.

- **Určitě ne**: Samotná zpráva, že RH platí (nebo neplatí) nemůže způsobit to, že se na základě této zprávy zrodí nějaký úžasně rychlý dešifrovací algoritmus.

- **Třetí obava: kdyby se ukázalo, že RH platí, byl by to průšvih pro RSA či jiné šifrovací metody?**

Určitě ne a možná ne.

- **Určitě ne**: Samotná zpráva, že RH platí (nebo neplatí) nemůže způsobit to, že se na základě této zprávy zrodí nějaký úžasně rychlý dešifrovací algoritmus.
- **Možná ne**:

- **Třetí obava: kdyby se ukázalo, že RH platí, byl by to průšvih pro RSA či jiné šifrovací metody?**

Určitě ne a možná ne.

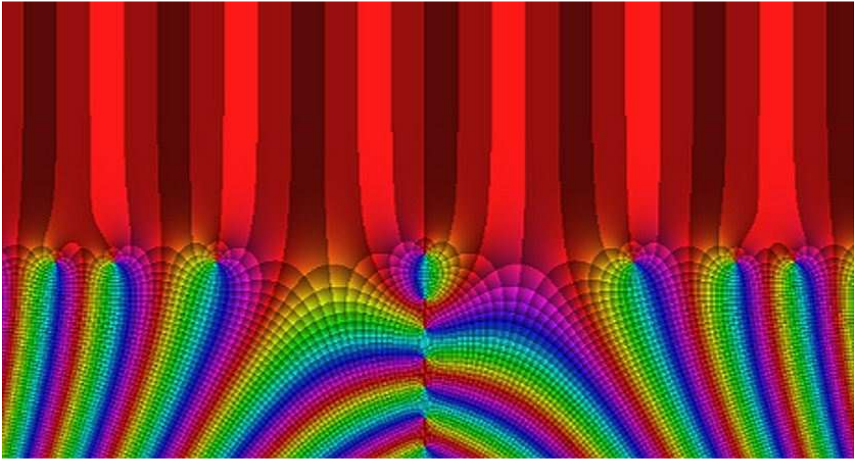
- **Určitě ne**: Samotná zpráva, že RH platí (nebo neplatí) nemůže způsobit to, že se na základě této zprávy zrodí nějaký úžasně rychlý dešifrovací algoritmus.
- **Možná ne**: Jedině snad kdyby případný důkaz RH byl založen na zcela nových, dosud neznámých matematických metodách,

- **Třetí obava: kdyby se ukázalo, že RH platí, byl by to průšvih pro RSA či jiné šifrovací metody?**

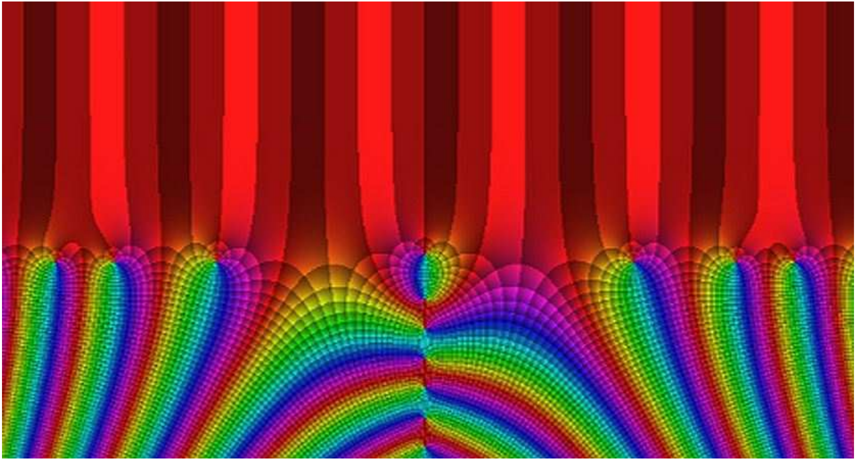
Určitě ne a možná ne.

- **Určitě ne**: Samotná zpráva, že RH platí (nebo neplatí) nemůže způsobit to, že se na základě této zprávy zrodí nějaký úžasně rychlý dešifrovací algoritmus.
- **Možná ne**: Jedině snad kdyby případný důkaz RH byl založen na zcela nových, dosud neznámých matematických metodách, tak by tyto nové metody ("nová matematika") mohly v důsledku přinést i nové rychlé techniky např. rozkladu na prvočinitele.

Zatím nezbývá, než se kochat krásou, kterou nám zeta funkce přináší…



Zatím nezbývá, než se kochat krásou, kterou nám zeta funkce přináší…



…a věřit, že se třeba dočkáme vyřešení RH dříve než za oněch Hilbertovských 500 let.

Protože . . .

Protože . . .

"Dokud existuje život, existuje naděje."

Stephen Hawking

Protože . . .

"Dokud existuje život, existuje naděje."

Stephen Hawking

Ale na druhou stranu . . .

Protože . . .

"Dokud existuje život, existuje naděje."

Stephen Hawking

Ale na druhou stranu . . .

"Matematika je jediný skutečně zaručený způsob, jak přijít o zdravý rozum."

Albert Einstein

Protože . . .

"Dokud existuje život, existuje naděje."

Stephen Hawking

Ale na druhou stranu . . .

"Matematika je jediný skutečně zaručený způsob, jak přijít o zdravý rozum."

Albert Einstein

(Přednášející věří, že se tak ještě nestalo, ale chápe, že nic se nemá přehánět.)

Protože . . .

"Dokud existuje život, existuje naděje."

Stephen Hawking

Ale na druhou stranu . . .

"Matematika je jediný skutečně zaručený způsob, jak přijít o zdravý rozum."

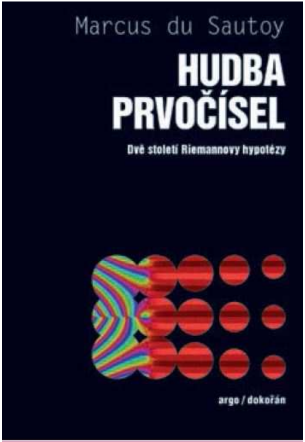
Albert Einstein

(Přednášející věří, že se tak ještě nestalo, ale chápe, že nic se nemá přehánět.)

Děkuji za pozornost.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

mirko.rokyta@mff.cuni.cz



II. pololetí

Orig.: *The Music of the Primes. Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*

Překlad Luboš Pick a Mirko Rokyta, asi 370 stran, 50 ilustrací, asi 400 Kč, ISBN