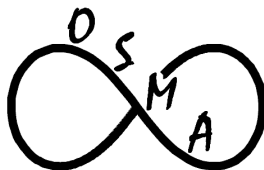


Barvy, body, množiny

Pavel Ludvík



Přírodovědecká
fakulta



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PŘF UP Olomouc

5. listopadu 2019

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF Univerzita Palackého v Olomouci

PODHOUBÍM TECHNOLOGIÍ 21. STOLETÍ JSOU DATA



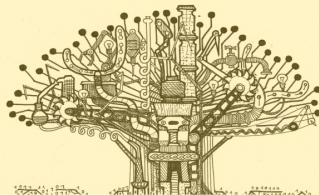
Chcete vědět, jak a proč fungují **autonomní vozidla**?
Chcete umět **odlišit šum od signálu**?
Chcete dělat **predikce** lépe než křišťalovou koulí?

Tak neváhejte a přijďte studovat
na **Univerzitu Palackého** v Olomouci
nově otevřený bakalářský program
Aplikovaná matematika specializace
DATA SCIENCE

Více na kma.upol.cz

STUDIUM, KTERÉ NENÍ NA HOUBY!
Již dnes jedna
z nejpožadovanějších
specializací
na trhu práce!

STROM PRŮMYSLOVÝCH A TECHNICKÝCH INOVACÍ VYRŮSTÁ Z DATOVÝCH KOŘENŮ



Chcete být připraveni na **průmysl 4.0**?
Chcete umět optimalizovat **výrobní procesy**?
Chcete rozumět **pohybu kapalin a plynů**?

Tak neváhejte a přijďte studovat
na **Univerzitu Palackého** v Olomouci
nově otevřený bakalářský program
Aplikovaná matematika specializace
PRŮMYSLOVÁ MATEMATIKA

Více na kma.upol.cz

AŽ NEMŮJÍME ZPÁTKY NA STROMY!
V průmyslu je
největší poptávka
po schopnosti
práce s daty!

Iracionalita $\sqrt{2}$

Tvrzení

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Iracionalita $\sqrt{2}$

Tvrzení

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Řešení (S. Tennenbaum)

- 1 Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální, tj. lze zapsat jako podíl $\frac{p}{q}$ dvou přirozených čísel p, q . **Uvažujme podíl, kde p je minimální takové.**

Iracionalita $\sqrt{2}$

Tvrzení

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Řešení (S. Tennenbaum)

- 1 Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální, tj. lze zapsat jako podíl $\frac{p}{q}$ dvou přirozených čísel p, q . **Uvažujme podíl, kde p je minimální takové.**
- 2 Ekvivalentně $p^2 = 2q^2$.

Iracionalita $\sqrt{2}$

Tvrzení

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Řešení (S. Tennenbaum)

- 1 Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální, tj. lze zapsat jako podíl $\frac{p}{q}$ dvou přirozených čísel p, q . **Uvažujme podíl, kde p je minimální takové.**
- 2 Ekvivalentně $p^2 = 2q^2$.
- 3 Ještě jinak: Čtverec o délce strany p má stejný obsah jako dva čtverce s délkou strany q .

Iracionalita $\sqrt{2}$

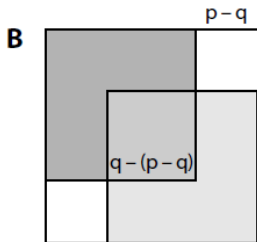
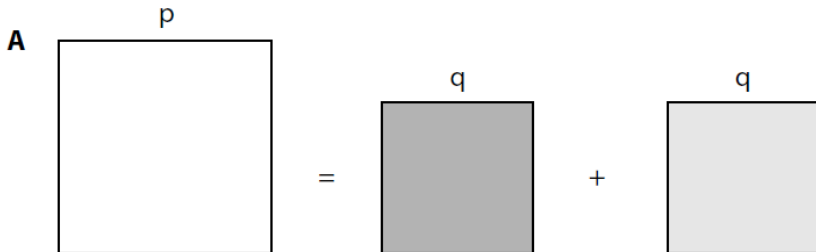
Tvrzení

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Řešení (S. Tennenbaum)

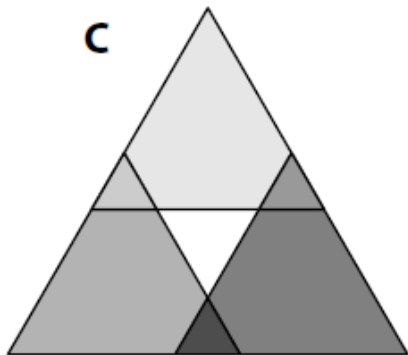
- 1 Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální, tj. lze zapsat jako podíl $\frac{p}{q}$ dvou přirozených čísel p, q . **Uvažujme podíl, kde p je minimální takové.**
- 2 Ekvivalentně $p^2 = 2q^2$.
- 3 Ještě jinak: Čtverec o délce strany p má stejný obsah jako dva čtverce s délkou strany q .
- 4 Dále vizte obrázek:

A na obrázku najděte spor!

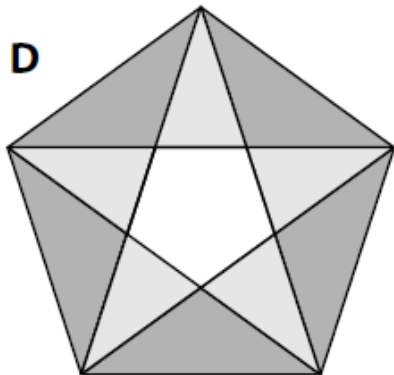


Lze zobecnit pro další odmocniny?

C



D



Analytický důkaz

Řešení (M. Laczovich, 2001)

1 Uvažme posloupnost $x_n = (\sqrt{2} - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Analytický důkaz

Řešení (M. Laczkovich, 2001)

- 1 Uvažme posloupnost $x_n = (\sqrt{2} - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Protože $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, je x_n klesající a $\lim_n x_n = 0$.

Analytický důkaz

Řešení (M. Laczkovich, 2001)

- 1 Uvažme posloupnost $x_n = (\sqrt{2} - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Protože $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, je x_n klesající a $\lim_n x_n = 0$.
- 3 Pro každé $n \in \mathbb{N}$ má x_n tvar $a\sqrt{2} + b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Analytický důkaz

Řešení (M. Laczkovich, 2001)

- 1 Uvažme posloupnost $x_n = (\sqrt{2} - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Protože $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, je x_n klesající a $\lim_n x_n = 0$.
- 3 Pro každé $n \in \mathbb{N}$ má x_n tvar $a\sqrt{2} + b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$.
- 4 Nechť je $\sqrt{2}$ racionální číslo se jmenovatelem D . Pak pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ je $a\sqrt{2} + b$ nenulové racionální číslo (v základním tvaru) s jmenovatelem, který je dělitelem D .

Analytický důkaz

Řešení (M. Laczkovich, 2001)

- 1 Uvažme posloupnost $x_n = (\sqrt{2} - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Protože $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, je x_n klesající a $\lim_n x_n = 0$.
- 3 Pro každé $n \in \mathbb{N}$ má x_n tvar $a\sqrt{2} + b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$.
- 4 Nechť je $\sqrt{2}$ racionální číslo se jmenovatelem D . Pak pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ je $a\sqrt{2} + b$ nenulové racionální číslo (v základním tvaru) s jmenovatelem, který je dělitelem D .
- 5 Takových dělitelů je konečně mnoho, takže se nemůžeme s $a\sqrt{2} + b$ dostat libovolně blízko 0, jak požaduje bod 2.

Sidonova posloupnost

Definice

Konečná posloupnost $a_1 < \dots < a_k$ přirozených čísel se nazývá **Sidonovou posloupností**, pokud jsou všechna čísla typu $a_i + a_j$ ($1 \leq i \leq j \leq k$) různá.

Sidonova posloupnost

Definice

Konečná posloupnost $a_1 < \dots < a_k$ přirozených čísel se nazývá **Sidonovou posloupností**, pokud jsou všechna čísla typu $a_i + a_j$ ($1 \leq i \leq j \leq k$) různá.

Otázka

Jak dlouhá může být Sidonova posloupnost $a_k \leq n$? Největší takovou délku označme $s(n)$.

Otázka

Jak dlouhá může být Sidonova posloupnost $a_k \leq n$? Největší takovou délku označme $s(n)$.

Uvažujte například $n = 100$. Použijeme-li hladový algoritmus, který v každém kroku přidá do posloupnosti nejmenší číslo, které neporuší definici Sidonovy posloupnosti, dostaneme:

1

Otázka

Jak dlouhá může být Sidonova posloupnost $a_k \leq n$? Největší takovou délku označme $s(n)$.

Uvažujte například $n = 100$. Použijeme-li hladový algoritmus, který v každém kroku přidá do posloupnosti nejmenší číslo, které neporuší definici Sidonovy posloupnosti, dostaneme:

1, 2

Otázka

Jak dlouhá může být Sidonova posloupnost $a_k \leq n$? Největší takovou délku označme $s(n)$.

Uvažujte například $n = 100$. Použijeme-li hladový algoritmus, který v každém kroku přidá do posloupnosti nejmenší číslo, které neporuší definici Sidonovy posloupnosti, dostaneme:

1, 2, 4

Otázka

Jak dlouhá může být Sidonova posloupnost $a_k \leq n$? Největší takovou délku označme $s(n)$.

Uvažujte například $n = 100$. Použijeme-li hladový algoritmus, který v každém kroku přidá do posloupnosti nejmenší číslo, které neporuší definici Sidonovy posloupnosti, dostaneme:

1, 2, 4, 8

Otázka

Jak dlouhá může být Sidonova posloupnost $a_k \leq n$? Největší takovou délku označme $s(n)$.

Uvažujte například $n = 100$. Použijeme-li hladový algoritmus, který v každém kroku přidá do posloupnosti nejmenší číslo, které neporuší definici Sidonovy posloupnosti, dostaneme:

1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97.

Jenže to není nejdelší Sidonova posloupnost menší než 100. Delší například:

1, 3, 7, 25, 30, 41, 44, 56, 69, 76, 77, 86.

Takže $s(100) \geq 12$ a počítačovým rozbořem všech možností lze ukázat, že $s(100) = 12$.

Odhad $s(n)$

- 1 Nechť je $a_1 < \dots < a_k$ Sidonova posloupnost a $a_k \leq n$.

Odhad $s(n)$

- 1 Nechť je $a_1 < \dots < a_k$ Sidonova posloupnost a $a_k \leq n$.
- 2 Existuje $\binom{k}{2} + k$ různých dvojic indexů (i, j) splňujících $1 \leq i \leq j \leq k$.

Odhad $s(n)$

- 1 Nechť je $a_1 < \dots < a_k$ Sidonova posloupnost a $a_k \leq n$.
- 2 Existuje $\binom{k}{2} + k$ různých dvojic indexů (i, j) splňujících $1 \leq i \leq j \leq k$.
- 3 Pro každý takový pár platí $2 \leq a_i + a_j \leq 2n$, proto $\binom{k}{2} + k \leq 2n - 1$.

Odhad $s(n)$

- 1 Nechť je $a_1 < \dots < a_k$ Sidonova posloupnost a $a_k \leq n$.
- 2 Existuje $\binom{k}{2} + k$ různých dvojic indexů (i, j) splňujících $1 \leq i \leq j \leq k$.
- 3 Pro každý takový pár platí $2 \leq a_i + a_j \leq 2n$, proto $\binom{k}{2} + k \leq 2n - 1$.
- 4 Využili jsme **příhrádkový princip**: Máme objekty $a_i + a_j$ a chceme je umístit do $2n - 2 + 1$ příhrádek. Pokud by $\binom{k}{2} + k > 2n - 1$, pak by se $a_i + a_j$ rovnaly pro dvě různé dvojice indexů a to je v rozporu se sidonovskou vlastností.

Odhad $s(n)$

- 1 Nechť je $a_1 < \dots < a_k$ Sidonova posloupnost a $a_k \leq n$.
- 2 Existuje $\binom{k}{2} + k$ různých dvojic indexů (i, j) splňujících $1 \leq i \leq j \leq k$.
- 3 Pro každý takový pár platí $2 \leq a_i + a_j \leq 2n$, proto $\binom{k}{2} + k \leq 2n - 1$.
- 4 Využili jsme **příhrádkový princip**: Máme objekty $a_i + a_j$ a chceme je umístit do $2n - 2 + 1$ příhrádek. Pokud by $\binom{k}{2} + k > 2n - 1$, pak by se $a_i + a_j$ rovnaly pro dvě různé dvojice indexů a to je v rozporu se sidonovskou vlastností.
- 5 Takže

$$k(k-1) + 2k \leq 4n - 2, \text{ tedy } k^2 < 4n, \text{ tedy } k < 2\sqrt{n}.$$

$$\text{Proto } s(n) < 2\sqrt{n}.$$

Vylepšení odhadu

- 1 Využijeme, že čísla $a_j - a_i$, ($i < j$), jsou různá.

Vylepšení odhadu

- 1 Využijeme, že čísla $a_j - a_i$, ($i < j$), jsou různá.
- 2 Protože $1 \leq a_j - a_i \leq n - 1$ pro každé $i < j$, **příhradkový princip** dává $\binom{k}{2} \leq n - 1$.

Vylepšení odhadu

- 1 Využijeme, že čísla $a_j - a_i$, ($i < j$), jsou různá.
- 2 Protože $1 \leq a_j - a_i \leq n - 1$ pro každé $i < j$, **příhradkový princip** dává $\binom{k}{2} \leq n - 1$.
- 3 Tedy

$$(k - 1)^2 < 2 \cdot \binom{k}{2} \leq 2(n - 1), \text{ tedy } s(n) < \sqrt{2}\sqrt{n} + 1.$$

Vylepšení odhadu

- 1 Využijeme, že čísla $a_j - a_i$, ($i < j$), jsou různá.
- 2 Protože $1 \leq a_j - a_i \leq n - 1$ pro každé $i < j$, **příhrádkový princip** dává $\binom{k}{2} \leq n - 1$.
- 3 Tedy

$$(k - 1)^2 < 2 \cdot \binom{k}{2} \leq 2(n - 1), \text{ tedy } s(n) < \sqrt{2}\sqrt{n} + 1.$$

Poznámky

- 1 Nejlepší známý horní odhad je $\sqrt{n} + \sqrt[4]{n} + 1$.

Vylepšení odhadu

- 1 Využijeme, že čísla $a_j - a_i$, ($i < j$), jsou různá.
- 2 Protože $1 \leq a_j - a_i \leq n - 1$ pro každé $i < j$, **přihrádkový princip** dává $\binom{k}{2} \leq n - 1$.
- 3 Tedy

$$(k - 1)^2 < 2 \cdot \binom{k}{2} \leq 2(n - 1), \text{ tedy } s(n) < \sqrt{2}\sqrt{n} + 1.$$

Poznámky

- 1 Nejlepší známý horní odhad je $\sqrt{n} + \sqrt[4]{n} + 1$.
- 2 **Paul Erdős** vyslovil domněnku, že $|s(n) - \sqrt{n}|$ je omezená.

Vylepšení odhadu

- 1 Využijeme, že čísla $a_j - a_i$, ($i < j$), jsou různá.
- 2 Protože $1 \leq a_j - a_i \leq n - 1$ pro každé $i < j$, **přihrádkový princip** dává $\binom{k}{2} \leq n - 1$.
- 3 Tedy

$$(k - 1)^2 < 2 \cdot \binom{k}{2} \leq 2(n - 1), \text{ tedy } s(n) < \sqrt{2}\sqrt{n} + 1.$$

Poznámky

- 1 Nejlepší známý horní odhad je $\sqrt{n} + \sqrt[4]{n} + 1$.
- 2 **Paul Erdős** vyslovil domněnku, že $|s(n) - \sqrt{n}|$ je omezená.
- 3 Problém považoval dokonce za tak významný, že za potvrzení nebo vyvrácení své domněnky nabídl \$1000.

Vylepšení odhadu

- 1 Využijeme, že čísla $a_j - a_i$, ($i < j$), jsou různá.
- 2 Protože $1 \leq a_j - a_i \leq n - 1$ pro každé $i < j$, **příhradkový princip** dává $\binom{k}{2} \leq n - 1$.
- 3 Tedy

$$(k - 1)^2 < 2 \cdot \binom{k}{2} \leq 2(n - 1), \text{ tedy } s(n) < \sqrt{2}\sqrt{n} + 1.$$

Poznámky

- 1 Nejlepší známý horní odhad je $\sqrt{n} + \sqrt[4]{n} + 1$.
- 2 **Paul Erdős** vyslovil domněnku, že $|s(n) - \sqrt{n}|$ je omezená.
- 3 Problém považoval dokonce za tak významný, že za potvrzení nebo vyvrácení své domněnky nabídl **\$1000**.
- 4 (P. Erdős zemřel 20. září 1996.)

Appendix k Riemannově hypotéze

Tvrzení

Nechť $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel a $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. Pak

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Důkaz (pravděpodobnostní!)

- 1 Volme $s > 1$ a označme $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$. Naším cílem je tedy dokázat

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}) .$$

Důkaz (pravděpodobnostní!)

- 1 Volme $s > 1$ a označme $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$. Naším cílem je tedy dokázat

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}).$$

- 2 Definujme pravděpodobnostní míru P na přirozených číslech a náhodnou veličinu $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, které splňují $P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$. Můžeme položit například

Důkaz (pravděpodobnostní!)

- 1 Volme $s > 1$ a označme $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$. Naším cílem je tedy dokázat

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}).$$

- 2 Definujme pravděpodobností míru P na přirozených číslech a náhodnou veličinu $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, které splňují $P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$. Můžeme položit například

■

$$P(\{n\}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \text{ (pak zřejmě } P(\mathbb{N}) = \sum_n \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = 1).$$

Důkaz (pravděpodobnostní!)

- 1 Volme $s > 1$ a označme $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$. Naším cílem je tedy dokázat

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}).$$

- 2 Definujme pravděpodobnostní míru P na přirozených číslech a náhodnou veličinu $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, které splňují $P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$. Můžeme položit například

■

$$P(\{n\}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \text{ (pak zřejmě } P(\mathbb{N}) = \sum_n \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = 1).$$

■

$$X(\omega) = \omega.$$

3 Pro $k \in \mathbb{N}$ definujme náhodné jevy

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \{X \text{ je dělitelné } k\}.$$

3 Pro $k \in \mathbb{N}$ definujme náhodné jevy

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \{X \text{ je dělitelné } k\}.$$

4 Pozorování:

$$P(E_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = ik) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ik)^{-s}}{\zeta(s)} = k^{-s} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = k^{-s}.$$

3 Pro $k \in \mathbb{N}$ definujme náhodné jevy

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \{X \text{ je dělitelné } k\}.$$

4 Pozorování:

$$P(E_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = ik) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ik)^{-s}}{\zeta(s)} = k^{-s} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = k^{-s}.$$

5 Tvrdíme, že jevy $\{E_p : p \text{ je prvočíslo}\}$ jsou **nezávislé**. Jsou-li $p_1, \dots, p_n$ různá prvočísla, máme

$$\bigcap_{i=1}^n E_{p_i} = E_{\prod_{i=1}^n p_i}, \text{ takže}$$
$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_{p_i}\right) = P(E_{\prod_{i=1}^n p_i}) = \left(\prod_{i=1}^n p_i\right)^{-s} = \prod_{i=1}^n p_i^{-s} = \prod_{i=1}^n P(E_{p_i}).$$

3 Pro $k \in \mathbb{N}$ definujme náhodné jevy

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \{X \text{ je dělitelné } k\}.$$

4 Pozorování:

$$P(E_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = ik) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ik)^{-s}}{\zeta(s)} = k^{-s} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = k^{-s}.$$

5 Tvrdíme, že jevy $\{E_p : p \text{ je prvočíslo}\}$ jsou **nezávislé**. Jsou-li $p_1, \dots, p_n$ různá prvočísla, máme

$$\bigcap_{i=1}^n E_{p_i} = E_{\prod_{i=1}^n p_i}, \text{ takže}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_{p_i}\right) = P(E_{\prod_{i=1}^n p_i}) = \left(\prod_{i=1}^n p_i\right)^{-s} = \prod_{i=1}^n p_i^{-s} = \prod_{i=1}^n P(E_{p_i}).$$

6 I komplementární jevy $\{E_p^c : p \text{ je prvočíslo}\}$ jsou tedy nezávislé.

- 6 I komplementární jevy $\{E_p^c : p \text{ je prvočíslo}\}$ jsou tedy nezávislé.
- 7 Nakonec si uvědomme, že číslo 1 je jediné přirozené číslo, které není násobkem žádného prvočísla. Tedy

$$\frac{1}{\zeta(s)} = P(X = 1) = P\left(\bigcap_{p \in \mathbb{P}} E_p^c\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - P(E_p)) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}).$$

- 6 I komplementární jevy $\{E_p^c : p \text{ je prvočíslo}\}$ jsou tedy nezávislé.
- 7 Nakonec si uvědomme, že číslo 1 je jediné přirozené číslo, které není násobkem žádného prvočísla. Tedy

$$\frac{1}{\zeta(s)} = P(X = 1) = P\left(\bigcap_{p \in \mathbb{P}} E_p^c\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - P(E_p)) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}).$$

Barvy v rovině

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti jedna.

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti jedna.

Řešení

- 1 Důkaz vedme sporem. Předpokládejme, že každé dva body jednotkové vzdálenosti mají různou barvu.

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti jedna.

Řešení

- 1 Důkaz vedme sporem. Předpokládejme, že každé dva body jednotkové vzdálenosti mají různou barvu.
- 2 Uvažme jednotkový rovnostranný trojúhelník ABC .

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti jedna.

Řešení

- 1 Důkaz vedme sporem. Předpokládejme, že každé dva body jednotkové vzdálenosti mají různou barvu.
- 2 Uvažme jednotkový rovnostranný trojúhelník ABC .
- 3 Body A , B , C musí být obarveny různými barvami, což je **spor**.

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existuje obdélník s vrcholy stejné barvy.

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existuje obdélník s vrcholy stejné barvy.

Řešení

- 1 Uvažme 9 rovnoběžek a 3 kolmice na ně. Na každé z 9 rovnoběžek jsme získali trojici průsečíků.

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existuje obdélník s vrcholy stejné barvy.

Řešení

- 1 Uvažme 9 rovnoběžek a 3 kolmice na ně. Na každé z 9 rovnoběžek jsme získali trojici průsečíků.
- 2 Trojici bodů je možné pomocí dvou barev obarvit 2^3 způsoby.

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existuje obdélník s vrcholy stejné barvy.

Řešení

- 1 Uvažme 9 rovnoběžek a 3 kolmice na ně. Na každé z 9 rovnoběžek jsme získali trojici průsečíků.
- 2 Trojici bodů je možné pomocí dvou barev obarvit 2^3 způsoby.
- 3 Protože však máme bodů $9 = 2^3 + 1$, musí být dvě trojice obarveny stejným způsobem.

Úloha

Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existuje obdélník s vrcholy stejné barvy.

Řešení

- 1 Uvažme 9 rovnoběžek a 3 kolmice na ně. Na každé z 9 rovnoběžek jsme získali trojici průsečíků.
- 2 Trojici bodů je možné pomocí dvou barev obarvit 2^3 způsoby.
- 3 Protože však máme bodů $9 = 2^3 + 1$, musí být dvě trojice obarveny stejným způsobem.
- 4 V obou trojicích najdeme (na stejných pozicích) dva body obarvené stejnou barvou. Ty tvoří vrcholy stejnobarevného obdélníku.

Úloha

Rovina je obarvena třemi barvami. Dokažte, že v ní existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti jedna.

Řešení

- 1 Předpokládejme, že máme rovinu obarvenou třemi barvami tak, že žádné dva body ve vzdálenosti jedna nemají stejnou barvu.

Řešení

- 1 Předpokládejme, že máme rovinu obarvenou třemi barvami tak, že žádné dva body ve vzdálenosti jedna nemají stejnou barvu.
- 2 V této rovině zvolíme bod **A** barvy 1, který bude středem kružnice k o poloměru $\sqrt{3}$.

Řešení

- 1 Předpokládejme, že máme rovinu obarvenou třemi barvami tak, že žádné dva body ve vzdálenosti jedna nemají stejnou barvu.
- 2 V této rovině zvolíme bod **A** barvy 1, který bude středem kružnice k o poloměru $\sqrt{3}$.
- 3 Na kružnici musí být alespoň jeden bod jiné barvy, který označíme jako **B** a jeho barvu jako barvu 2.

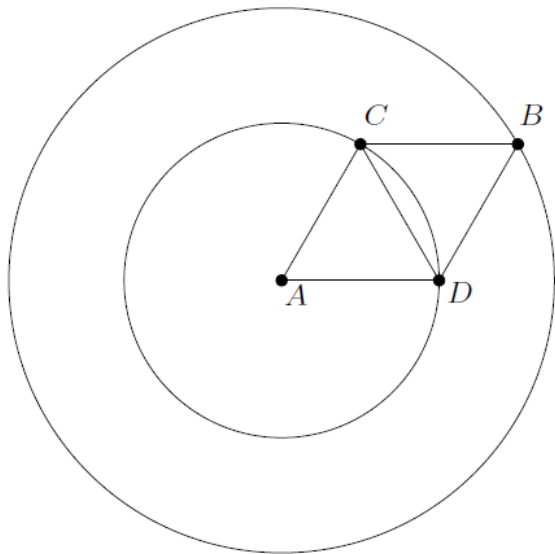
Řešení

- 1 Předpokládejme, že máme rovinu obarvenou třemi barvami tak, že žádné dva body ve vzdálenosti jedna nemají stejnou barvu.
- 2 V této rovině zvolíme bod **A** barvy 1, který bude středem kružnice k o poloměru $\sqrt{3}$.
- 3 Na kružnici musí být alespoň jeden bod jiné barvy, který označíme jako **B** a jeho barvu jako barvu 2.
- 4 Dále uvažme kružnici l o poloměru 1 a středem **A**. Na této kružnici zvolme body **C** a **D** tak, aby s bodem **B** tvořili rovnostranný trojúhelník **BCD** o straně jedna. Bod **B** je ve vzdálenosti 1 od **A** i od **B**, musí tedy mít jinou barvu než 1 nebo 2, nazvěme ji barvou 3.

Řešení

- 1 Předpokládejme, že máme rovinu obarvenou třemi barvami tak, že žádné dva body ve vzdálenosti jedna nemají stejnou barvu.
- 2 V této rovině zvolíme bod **A** barvy 1, který bude středem kružnice k o poloměru $\sqrt{3}$.
- 3 Na kružnici musí být alespoň jeden bod jiné barvy, který označíme jako **B** a jeho barvu jako barvu 2.
- 4 Dále uvažme kružnici l o poloměru 1 a středem **A**. Na této kružnici zvolme body **C** a **D** tak, aby s bodem **B** tvořili rovnostranný trojúhelník **BCD** o straně jedna. Bod **B** je ve vzdálenosti 1 od **A** i od **C**, musí tedy mít jinou barvu než 1 nebo 2, nazvěme ji barvou 3.
- 5 Bod **D** je ve vzdálenosti jedna od **A**, **B** i **C** a musí tak mít čtvrtou barvu, to je ale spor s tím, že rovina je trojbarevná.

Řešení



Hadwigerův-Nelsonův problém

Problém pojmenovaný po *Hugovi Hadwigerovi* a *Edwardu Nelsonovi* se ptá po tzv. **chromatickém čísle** roviny. Jde o nejmenší počet barev potřebných k obarvení roviny tak, aby žádné dva body v jednotkové vzdálenosti neměly stejnou barvu.

Hadwigerův-Nelsonův problém

Problém pojmenovaný po *Hugovi Hadwigerovi* a *Edwardu Nelsonovi* se ptá po tzv. **chromatickém číslu** roviny. Jde o nejmenší počet barev potřebných k obarvení roviny tak, aby žádné dva body v jednotkové vzdálenosti neměly stejnou barvu.

Poznámky

- Odpověď na otázku není známa.

Hadwigerův-Nelsonův problém

Problém pojmenovaný po *Hugovi Hadwigerovi* a *Edwardu Nelsonovi* se ptá po tzv. **chromatickém čísle** roviny. Jde o nejmenší počet barev potřebných k obarvení roviny tak, aby žádné dva body v jednotkové vzdálenosti neměly stejnou barvu.

Poznámky

- Odpověď na otázku není známa.
- Ví se, že je to jedno z čísel 5, 6, 7.

Hadwigerův-Nelsonův problém

Problém pojmenovaný po *Hugovi Hadwigerovi* a *Edwardu Nelsonovi* se ptá po tzv. **chromatickém čísle** roviny. Jde o nejmenší počet barev potřebných k obarvení roviny tak, aby žádné dva body v jednotkové vzdálenosti neměly stejnou barvu.

Poznámky

- Odpověď na otázku není známa.
- Ví se, že je to jedno z čísel 5, 6, 7.
- Existují indicie, že by odpověď mohla být závislá na volbě axiomů teorie množin.

Hadwigerův-Nelsonův problém

Problém pojmenovaný po *Hugovi Hadwigerovi* a *Edwardu Nelsonovi* se ptá po tzv. **chromatickém čísle** roviny. Jde o nejmenší počet barev potřebných k obarvení roviny tak, aby žádné dva body v jednotkové vzdálenosti neměly stejnou barvu.

Poznámky

- Odpověď na otázku není známa.
- Ví se, že je to jedno z čísel 5, 6, 7.
- Existují indicie, že by odpověď mohla být závislá na volbě axiomů teorie množin.
- Problém lze snadno zobecnit do vyšších dimenzí, ale ani tam není odpověď známa. Ví se, že chromatické číslo $\mathbb{R}^3$ je alespoň 6, ale nejvýše 15.

Mezihra

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:

Hráč 2:

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1: 12

Hráč 2:

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1: 12

Hráč 2: 6

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4
Hráč 2:		6

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4
Hráč 2:	6	3

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4	2
Hráč 2:		6	3

Hra na dělení

Hra na dělení je hrou pro dva hráče. Na začátku si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a pak střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4	2
Hráč 2:	6	3	1

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Z toho plyne, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii (lze dokázat indukcí).

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Z toho plyne, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii (lze dokázat indukcí).
- 3 Předpokládejme, že vyhrávající strategii má druhý hráč. To znamená, že na libovolný tah prvního hráče umí zareagovat tak, že vyhraje.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Z toho plyne, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii (lze dokázat indukcí).
- 3 Předpokládejme, že vyhrávající strategii má druhý hráč. To znamená, že na libovolný tah prvního hráče umí zareagovat tak, že vyhraje.
- 4 Když tedy první hráč hraje v prvním tahu n , má druhý hráč vyhrávající strategii.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Z toho plyne, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii (lze dokázat indukcí).
- 3 Předpokládejme, že vyhrávající strategii má druhý hráč. To znamená, že na libovolný tah prvního hráče umí zareagovat tak, že vyhraje.
- 4 Když tedy první hráč hraje v prvním tahu n , má druhý hráč vyhrávající strategii.
- 5 Jenže tuto strategii mohl aplikovat od prvního tahu již první hráč a vyhrál by. Číslo n se totiž ve hře podle pravidel od druhého tahu nemůže vyskytnout. **Spor.**

Poznámky

- 1 Použitý argument neříká, jak by ona výherní strategie mohla vypadat.

Poznámky

- 1 Použitý argument neříká, jak by ona výherní strategie mohla vypadat.
- 2 Pro obecné n je podoba této strategie dokonce otevřený problém!

Poznámky

- 1 Použitý argument neříká, jak by ona výherní strategie mohla vypadat.
- 2 Pro obecné n je podoba této strategie dokonce otevřený problém!

Poznámky

- 1 Použitý argument neříká, jak by ona výherní strategie mohla vypadat.
- 2 Pro obecné n je podoba této strategie dokonce otevřený problém!

Důležité známení

Během přednášky došlo ke slavnostnímu oznámení organizátorů semináře OSMA, že za vyřešení výše uvedeného problému nabízí 1000 Kč.

Vzdálenosti v rovině

Liché vzdálenosti

Tvrzení

V rovině neexistují čtyři body takové, že vzdálenost každých dvou je liché číslo.

Důkaz

- 1 Důkaz povedeme sporem. Nechť existují čtyři body s lichými vzdálenostmi. Jeden z bodů můžeme umístit do počátku, zbylé tři označme **a**, **b**, **c**.

Důkaz

- 1 Důkaz povedeme sporem. Nechť existují čtyři body s lichými vzdálenostmi. Jeden z bodů můžeme umístit do počátku, zbylé tři označme $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.
- 2 Vzdálenosti (v eukleidovské metrice) $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|$ jsou pak lichá čísla.

Důkaz

- 1 Důkaz povedeme sporem. Nechť existují čtyři body s lichými vzdálenostmi. Jeden z bodů můžeme umístit do počátku, zbylé tři označme $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.
- 2 Vzdálenosti (v eukleidovské metrice) $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|$ jsou pak lichá čísla.
- 3 Snadno ověříme, že pro liché m platí $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Neboli $m^2 - 1$ je dělitelné 8, neboli m^2 má při dělení 8 zbytek 1.

Důkaz

- 1 Důkaz povedeme sporem. Nechť existují čtyři body s lichými vzdálenostmi. Jeden z bodů můžeme umístit do počátku, zbylé tři označme $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.
- 2 Vzdálenosti (v eukleidovské metrice) $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|$ jsou pak lichá čísla.
- 3 Snadno ověříme, že pro liché m platí $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Neboli $m^2 - 1$ je dělitelné 8, neboli m^2 má při dělení 8 zbytek 1.
- 4 Čtverce výše uvedených vzdáleností mají tedy při dělení 8 zbytek 1.

5 Kosinovou větu lze pro trojúhelník určený vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zapsat jako $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, tedy pro $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ dostaneme

$$2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Analogické výsledky obdržíme pro výrazy $2\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ a $2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

- 5 Kosinovou větu lze pro trojúhelník určený vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zapsat jako $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, tedy pro $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ dostaneme

$$2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Analogické výsledky obdržíme pro výrazy $2\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ a $2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

- 6 Definujme matice

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \end{pmatrix}, \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 5 Kosinovou větu lze pro trojúhelník určený vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zapsat jako $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, tedy pro $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ dostaneme

$$2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Analogické výsledky obdržíme pro výrazy $2\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ a $2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

- 6 Definujme matice

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \end{pmatrix}, \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 7 Pak platí (kde kongruence mezi maticemi je chápána po složkách)

$$2B \equiv R \pmod{8}.$$

8 Spočtete, že $\det(R) = 4$.

8 Spočteme, že $\det(R) = 4$.

9 Rozmyslíme si, že pak $\det(2B) \equiv 4 \pmod{8}$.

8 Spočteme, že $\det(R) = 4$.

9 Rozmyslíme si, že pak $\det(2B) \equiv 4 \pmod{8}$.

8 Spočteme, že $\det(R) = 4$.

9 Rozmyslíme si, že pak $\det(2B) \equiv 4 \pmod{8}$. **Proč?**

Představíme si rozvoj z definice determinantu a protože odpovídající si členy matic $2B$ a R jsou kongruentní modulo 8, musí být kongruentní i jejich determinanty.

10 Proto $\det(2B) \neq 0$, a tedy $\det(B) \neq 0$. Jinak řečeno, pro hodnost matice B platí $\text{rank}(B) = 3$.

8 Spočteme, že $\det(R) = 4$.

9 Rozmyslíme si, že pak $\det(2B) \equiv 4 \pmod{8}$. **Proč?**

Představíme si rozvoj z definice determinantu a protože odpovídající si členy matic $2B$ a R jsou kongruentní modulo 8, musí být kongruentní i jejich determinanty.

10 Proto $\det(2B) \neq 0$, a tedy $\det(B) \neq 0$. Jinak řečeno, pro hodnost matice B platí $\text{rank}(B) = 3$.

11 Na druhou stranu není těžké si všimnout, že matice B je speciálního tvaru, konkrétně $B = A^T A$, kde

$$A = (\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

8 Spočteme, že $\det(R) = 4$.

9 Rozmyslíme si, že pak $\det(2B) \equiv 4 \pmod{8}$. **Proč?**

Představíme si rozvoj z definice determinantu a protože odpovídající si členy matic $2B$ a R jsou kongruentní modulo 8, musí být kongruentní i jejich determinanty.

10 Proto $\det(2B) \neq 0$, a tedy $\det(B) \neq 0$. Jinak řečeno, pro hodnotu matice B platí $\text{rank}(B) = 3$.

11 Na druhou stranu není těžké si všimnout, že matice B je speciálního tvaru, konkrétně $B = A^T A$, kde

$$A = (\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

12 Takže $\text{rank}(A) \leq 2$ a protože hodnost součinu matic nemůže být větší než nejmenší hodnost činitelů, platí $\text{rank}(B) \leq 2$.

8 Spočteme, že $\det(R) = 4$.

9 Rozmyslíme si, že pak $\det(2B) \equiv 4 \pmod{8}$. **Proč?**

Představíme si rozvoj z definice determinantu a protože odpovídající si členy matic $2B$ a R jsou kongruentní modulo 8, musí být kongruentní i jejich determinanty.

10 Proto $\det(2B) \neq 0$, a tedy $\det(B) \neq 0$. Jinak řečeno, pro hodnotu matice B platí $\text{rank}(B) = 3$.

11 Na druhou stranu není těžké si všimnout, že matice B je speciálního tvaru, konkrétně $B = A^T A$, kde

$$A = (\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

12 Takže $\text{rank}(A) \leq 2$ a protože hodnost součinu matic nemůže být větší než nejmenší hodnost činitelů, platí $\text{rank}(B) \leq 2$.

13 Tím jsme dostali **spor**.

Poznámky

- Tvrzení lze zobecnit do tvaru: V $\mathbb{R}^n$ neexistuje $n + 2$ bodů takových, že vzdálenost každých dvou je liché číslo. Dokázali **R.L. Graham, B.L. Rotschild a E.G. Strauss** v roce 1974.

Poznámky

- Tvrzení lze zobecnit do tvaru: V $\mathbb{R}^n$ neexistuje $n + 2$ bodů takových, že vzdálenost každých dvou je liché číslo. Dokázali **R.L. Graham, B.L. Rotschild a E.G. Strauss** v roce 1974.
- V roce 1994 položil **Paul Erdős** otázku, jaký je tedy maximální počet bodů $f(n)$ lichých vzdáleností mezi n body v rovině.

References

1. P. Erdős, Oral communication, Conference on Graph Theory, Combinatorics, and Computation, 1994, Boca Raton, FL.

Poznámky

- Tvrzení lze zobecnit do tvaru: V $\mathbb{R}^n$ neexistuje $n + 2$ bodů takových, že vzdálenost každých dvou je liché číslo. Dokázali **R.L. Graham, B.L. Rotschild a E.G. Strauss** v roce 1974.
- V roce 1994 položil **Paul Erdős** otázku, jaký je tedy maximální počet bodů $f(n)$ lichých vzdáleností mezi n body v rovině.
- V roce 1996 dokázal **L. Piepmeyer**, že

$$f(n) = \frac{n^2}{3} + \frac{r(r-3)}{6}, \text{ kde } r = 1, 2 \text{ nebo } 3 \text{ a } n \equiv r \pmod{3}.$$

Poznámky

- Tvrzení lze zobecnit do tvaru: V $\mathbb{R}^n$ neexistuje $n + 2$ bodů takových, že vzdálenost každých dvou je liché číslo. Dokázali **R.L. Graham, B.L. Rotschild a E.G. Strauss** v roce 1974.
- V roce 1994 položil **Paul Erdős** otázku, jaký je tedy maximální počet bodů $f(n)$ lichých vzdáleností mezi n body v rovině.
- V roce 1996 dokázal **L. Piepmeyer**, že

$$f(n) = \frac{n^2}{3} + \frac{r(r-3)}{6}, \text{ kde } r = 1, 2 \text{ nebo } 3 \text{ a } n \equiv r \pmod{3}.$$

- Když nám jde o celočíselné vzdálenosti, tak bodů s takovými vzdálenostmi můžeme v rovině zkonstruovat libovolně mnoho (a nemusí ležet na přímce!).

Poznámky

- Tvrzení lze zobecnit do tvaru: V $\mathbb{R}^n$ neexistuje $n + 2$ bodů takových, že vzdálenost každých dvou je liché číslo. Dokázali **R.L. Graham, B.L. Rotschild a E.G. Strauss** v roce 1974.
- V roce 1994 položil **Paul Erdős** otázku, jaký je tedy maximální počet bodů $f(n)$ lichých vzdáleností mezi n body v rovině.
- V roce 1996 dokázal **L. Piepmeyer**, že

$$f(n) = \frac{n^2}{3} + \frac{r(r-3)}{6}, \text{ kde } r = 1, 2 \text{ nebo } 3 \text{ a } n \equiv r \pmod{3}.$$

- Když nám jde o celočíselné vzdálenosti, tak bodů s takovými vzdálenostmi můžeme v rovině zkonstruovat libovolně mnoho (a nemusí ležet na přímce!).
- Ale! Je-li jich nekonečně mnoho, pak již na přímce ležet musí (**N.H. Anning, P. Erdős**).

Pouze dvě vzdálenosti povoleny

Otázka (snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, aby měly každé dva z nich stejnou vzdálenost?

Pouze dvě vzdálenosti povoleny

Otázka (snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, aby měly každé dva z nich stejnou vzdálenost?

Odpověď

Tři.

Pouze dvě vzdálenosti povoleny

Otázka (snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, aby měly každé dva z nich stejnou vzdálenost?

Odpověď

Tři.

Otázka (ne tak snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, pokud povolíme **dvě různé vzdálenosti mezi body**?

Pouze dvě vzdálenosti povoleny

Otázka (snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, aby měly každé dva z nich stejnou vzdálenost?

Odpověď

Tři.

Otázka (ne tak snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, pokud povolíme **dvě různé vzdálenosti mezi body**?

Odpověď

1 Bude tím extrémním případem **čtverec**?

Pouze dvě vzdálenosti povoleny

Otázka (snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, aby měly každé dva z nich stejnou vzdálenost?

Odpověď

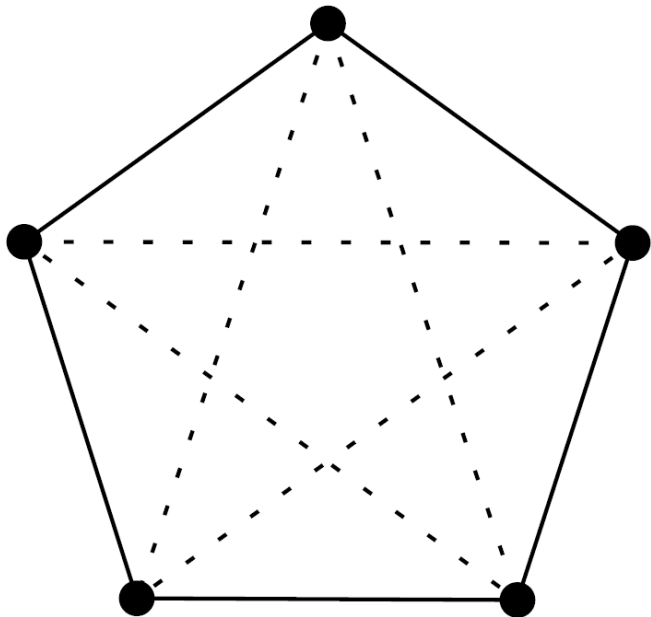
Tři.

Otázka (ne tak snadná)

Jaké největší množství bodů lze umístit do roviny, pokud povolíme **dvě různé vzdálenosti mezi body**?

Odpověď

- 1 Bude tím extrémním případem **čtverec**?
- 2 Nebo snad **pětiúhelník**?



Otázky

1 Jak to dokázat?

Otázky

- 1 Jak to dokázat?
- 2 Jak to funguje ve vyšších dimenzích, tj. v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

Otázky

- 1 Jak to dokázat?
- 2 Jak to funguje ve vyšších dimenzích, tj. v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

Otázky

- 1 Jak to dokázat?
- 2 Jak to funguje ve vyšších dimenzích, tj. v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

Označme jako $n(d)$ nejvyšší počet bodů v $\mathbb{R}^d$, které mají mezi sebou vzdálenosti dvou různých hodnot. Pak platí:

Otázky

- 1 Jak to dokázat?
- 2 Jak to funguje ve vyšších dimenzích, tj. v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

Označme jako $n(d)$ nejvyšší počet bodů v $\mathbb{R}^d$, které mají mezi sebou vzdálenosti dvou různých hodnot. Pak platí:

Tvrzení

$$n(d) \leq \frac{1}{2}(d^2 + 5d + 4).$$

Důkaz

1 Uvažme body $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$.

Důkaz

- 1 Uvažme body $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$.
- 2 Pro vzdálenosti platí:

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 = (p_{i1} - p_{j1})^2 + \dots + (p_{id} - p_{jd})^2.$$

Důkaz

1 Uvažme body $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$.

2 Pro vzdálenosti platí:

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 = (p_{i1} - p_{j1})^2 + \dots + (p_{id} - p_{jd})^2.$$

3 Předpokládáme, že $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \in \{a, b\}$ pro $i \neq j$.

Důkaz

1 Uvažme body $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$.

2 Pro vzdálenosti platí:

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 = (p_{i1} - p_{j1})^2 + \dots + (p_{id} - p_{jd})^2.$$

3 Předpokládáme, že $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \in \{a, b\}$ pro $i \neq j$.

4 Každému bodu $\mathbf{p}_i$ přiřadíme funkci $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$f_i(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - a^2)(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - b^2).$$

Důkaz

1 Uvažme body $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$.

2 Pro vzdálenosti platí:

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 = (p_{i1} - p_{j1})^2 + \dots + (p_{id} - p_{jd})^2.$$

3 Předpokládáme, že $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \in \{a, b\}$ pro $i \neq j$.

4 Každému bodu $\mathbf{p}_i$ přiřadíme funkci $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$f_i(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - a^2)(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - b^2).$$

5 Snadno ověříme, že

$$f_i(\mathbf{p}_j) = \begin{cases} 0 & , \text{pokud } i \neq j, \\ a^2 b^2 \neq 0 & , \text{pokud } i = j. \end{cases}$$

6 Funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislé: Necht

$$0 = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

Pak po dosazení $\mathbf{p}_i$ máme $0 = \alpha_i a^2 b^2$, a tedy $\alpha_i = 0$ pro všechna i .

6 Funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislé: Necht

$$0 = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

Pak po dosazení p_i máme $0 = \alpha_i a^2 b^2$, a tedy $\alpha_i = 0$ pro všechna i .

7 Vektorový prostor V , který je lineárním obalem množiny funkcí $\{f_1, \dots, f_n\}$ má tedy dimenzi n .

6 Funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislé: Nechť

$$0 = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

Pak po dosazení p_i máme $0 = \alpha_i a^2 b^2$, a tedy $\alpha_i = 0$ pro všechna i .

7 Vektorový prostor V , který je lineárním obalem množiny funkcí $\{f_1, \dots, f_n\}$ má tedy dimenzi n .

8 Naším úkolem je najít co nejmenší množinu G funkcí $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby každá funkce z V byla lineární kombinací funkcí z G . Pak totiž $|G| \geq \dim V = n$.

9 Platí

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 = \sum_{j=1}^d (x_j - p_{ij})^2 = X - \sum_{j=1}^d 2x_j p_{ij} + P_i,$$

kde $X = \sum x_j^2$, $P_i = \sum p_{ij}^2$.

9 Platí

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 = \sum_{j=1}^d (x_j - p_{ij})^2 = X - \sum_{j=1}^d 2x_j p_{ij} + P_i,$$

kde $X = \sum x_j^2$, $P_i = \sum p_{ij}^2$.

10 Dále:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &= (\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - a^2)(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - b^2) \\ &= \left(X - \sum 2x_j p_{ij} + A_i \right) \left(X - \sum 2x_j p_{ij} + B_i \right), \end{aligned}$$

kde $A_i = P_i - a^2$ a $B_i = P_i - b^2$.

9 Platí

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 = \sum_{j=1}^d (x_j - p_{ij})^2 = X - \sum_{j=1}^d 2x_j p_{ij} + P_i,$$

kde $X = \sum x_j^2$, $P_i = \sum p_{ij}^2$.

10 Dále:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &= (\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - a^2)(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 - b^2) \\ &= \left(X - \sum 2x_j p_{ij} + A_i \right) \left(X - \sum 2x_j p_{ij} + B_i \right), \end{aligned}$$

kde $A_i = P_i - a^2$ a $B_i = P_i - b^2$.

11 Po dalším přeuspořádání konečně:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &= X^2 - 4X \sum p_{ij} x_j + \left(\sum 2p_{ij} x_j \right)^2 \\ &\quad + (A_i + B_i) \left(X - \sum 2p_{ij} x_j \right) + A_i B_i. \end{aligned}$$

11 Po dalším přeuspořádání konečně:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) = & X^2 - 4X \sum p_{ij}x_j + \left(\sum 2p_{ij}x_j \right)^2 \\ & + (A_i + B_i) \left(X - \sum 2p_{ij}x_j \right) + A_i B_i. \end{aligned}$$

11 Po dalším přeuspořádání konečně:

$$f_i(\mathbf{x}) = X^2 - 4X \sum p_{ij}x_j + \left(\sum 2p_{ij}x_j \right)^2 + (A_i + B_i) \left(X - \sum 2p_{ij}x_j \right) + A_i B_i.$$

12 Takže každá f_i je lineární kombinací funkcí z množiny

$$G = \{X^2, \\ x_j X, j = 1, \dots, d, \\ x_j^2, j = 1, \dots, d, \\ x_i x_j, 1 \leq i < j \leq d, \\ x_j, j = 1, \dots, d, \\ 1\}.$$

11 Po dalším přeuspořádání konečně:

$$f_i(\mathbf{x}) = X^2 - 4X \sum p_{ij}x_j + \left(\sum 2p_{ij}x_j \right)^2 \\ + (A_i + B_i) \left(X - \sum 2p_{ij}x_j \right) + A_i B_i.$$

12 Takže každá f_i je lineární kombinací funkcí z množiny

$$G = \{X^2, \\ x_j X, j = 1, \dots, d, \\ x_j^2, j = 1, \dots, d, \\ x_i x_j, 1 \leq i < j \leq d, \\ x_j, j = 1, \dots, d, \\ 1\}.$$

13 Funkcí v G je $1 + d + d + \binom{d}{2} + d + 1 = \frac{1}{2}(d^2 + 5d + 4)$, tedy $n \leq \frac{1}{2}(d^2 + 5d + 4)$.

Poznámky

Odhad lze zlepšit na $\binom{d+2}{2}$, ale ani to není optimální. Na příkladu lze nicméně ukázat, že koeficient u d^2 (tj. $\frac{1}{2}$) optimální je.

Dvě pozoruhodné množiny

Kekeyova množina

Definice

Kekeyova množina je taková množina v rovině, v níž můžeme spojitě otočit úsečku jednotkové délky o 180° .

Kekeyova množina

Definice

Kekeyova množina je taková množina v rovině, v níž můžeme spojitě otočit úsečku jednotkové délky o 180° .

- 1 Je to tedy množina, která obsahuje úsečky všech směrů.

Kekeyova množina

Definice

Kekeyova množina je taková množina v rovině, v níž můžeme spojitě otočit úsečku jednotkové délky o 180° .

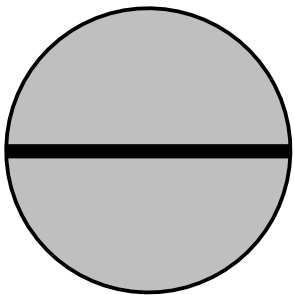
- 1 Je to tedy množina, která obsahuje úsečky všech směrů.
- 2 Tato množina může mít libovolně malý, ale nikoli nulový obsah.

Následující slidy jsou převzaty z přednášky C.J. Bishopa ze
Stony Brook University.

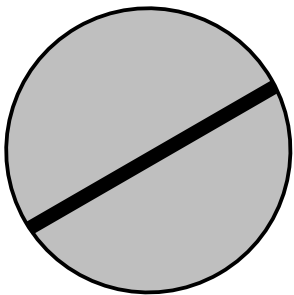


Soichi Takeya (1886-1947)

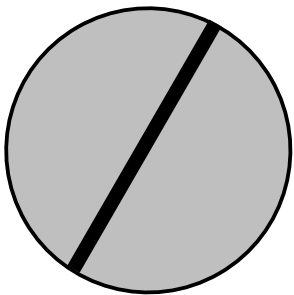
In 1917 Takeya and Fujiwara asked what is smallest area that a unit needle can be continuously rotated 180° .



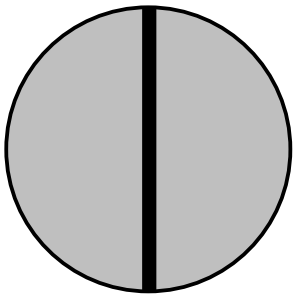
$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \approx .785398$$



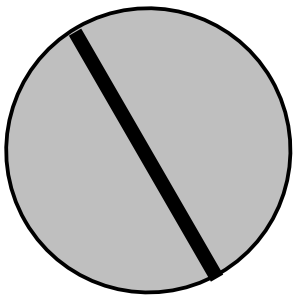
$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \approx .785398$$



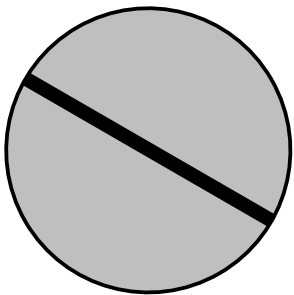
$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \approx .785398$$



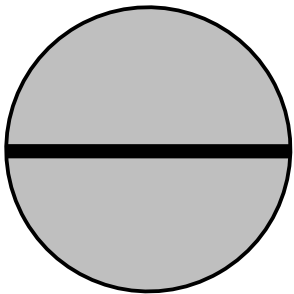
$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \approx .785398$$



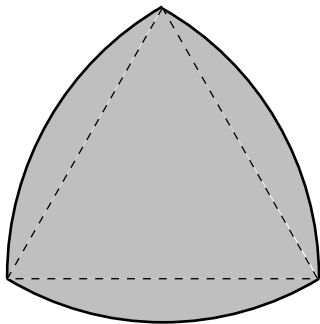
$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \approx .785398$$



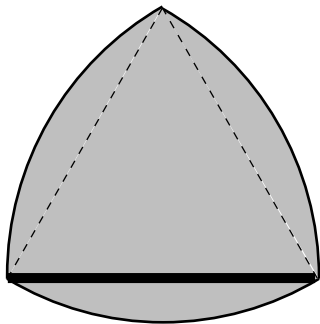
$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \approx .785398$$



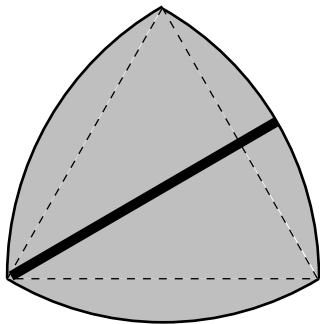
$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \approx .785398$$



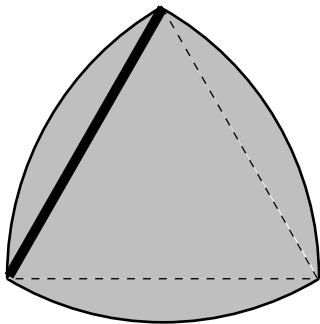
$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$



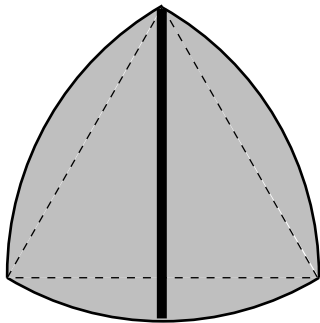
$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$



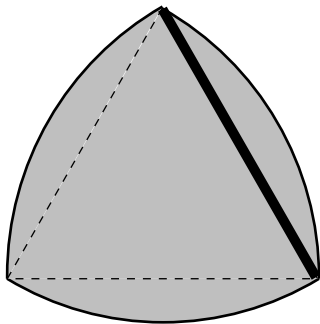
$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$



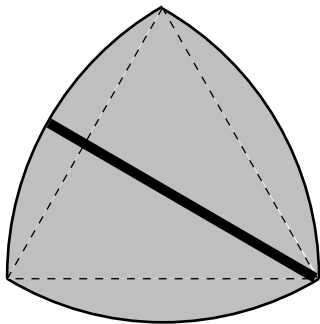
$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$



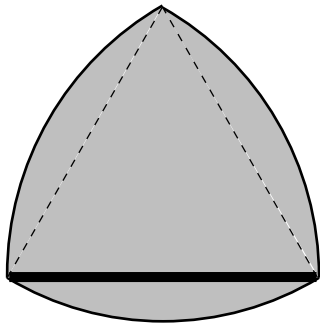
$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$



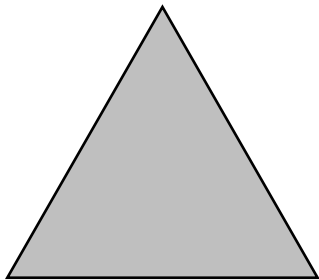
$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$



$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$

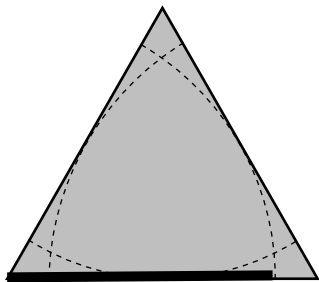


$$\text{Area} = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx .704771$$



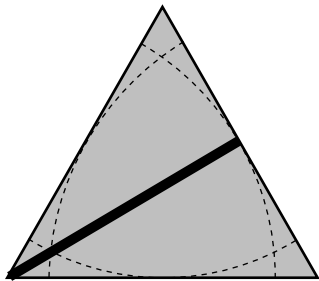
$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$

$$\text{Side Length} = 4/\sqrt{3}$$

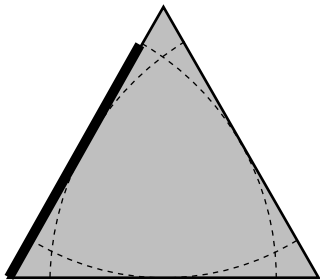


$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$

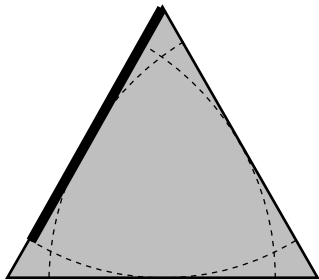
$$\text{Side Length} = 4/\sqrt{3}$$



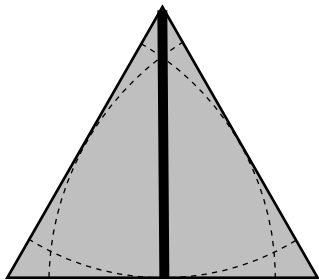
$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$



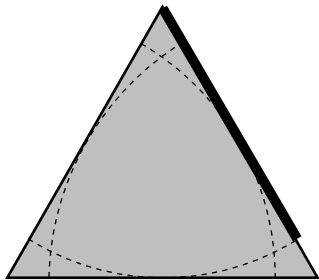
$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$



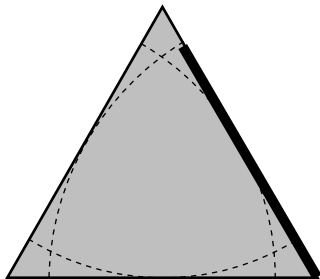
$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$



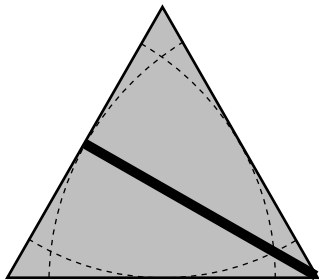
$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$



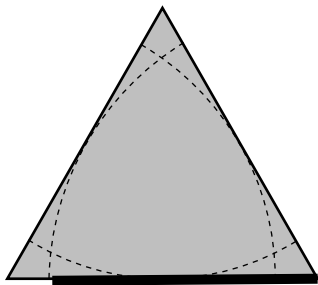
$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$



$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$



$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$



$$\text{Area} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .57735$$

This is optimal among convex shapes (Pal, 1921)

Bezиковičova množina

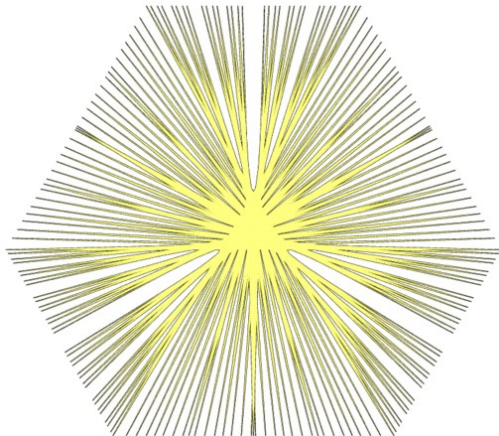
Definice

Bezikovičova množina je kompaktní množina nulového obsahu, která obsahuje jednotkovou úsečku každého směru.

Bezиковičova množina

Definice

Bezikovičova množina je kompaktní množina nulového obsahu, která obsahuje jednotkovou úsečku každého směru.



Děkuji za pozornost!