



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MS
MT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Občasný seminář z matematické analýzy, <http://am.vsb.cz/osma>



Nerušte mé Fordovy kruhy



Mirko Rokyta, KMA MFF UK Praha
Zoom Praha/Ostrava, 15. 12. 2020

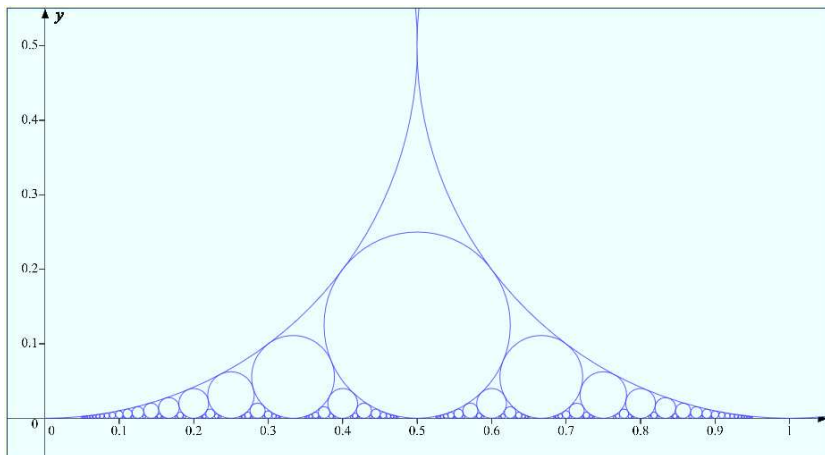
1. Co jsou Fordovy kruhy

1. Co jsou Fordovy kruhy

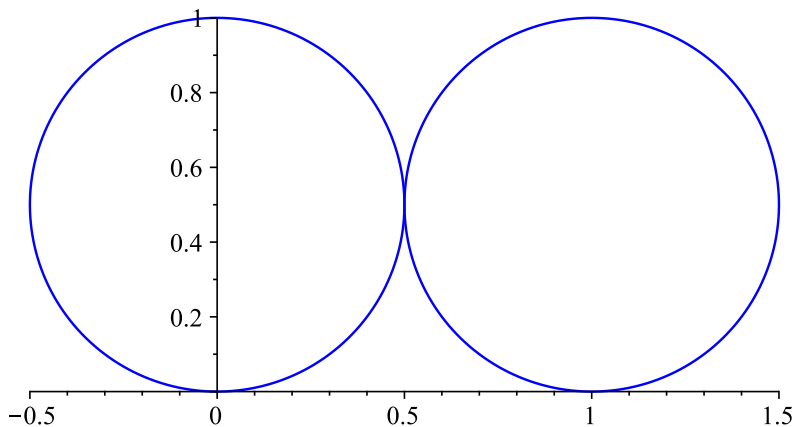
To na titulní stránce nebyly ty správné Fordovy kruhy.

1. Co jsou Fordovy kruhy

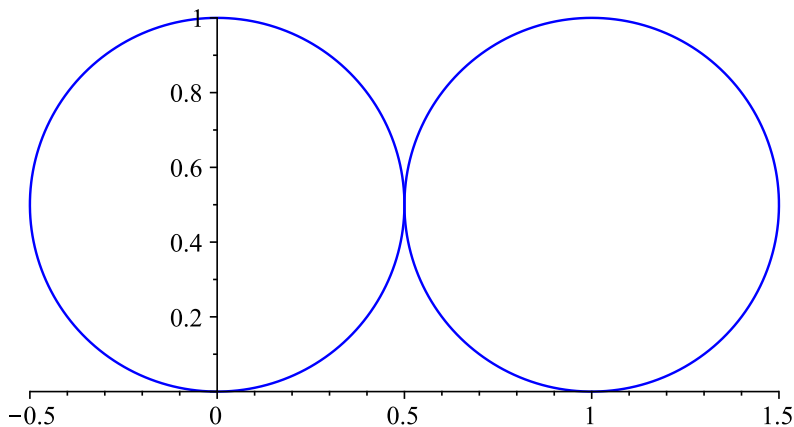
To na titulní stránce nebyly ty správné Fordovy kruhy.



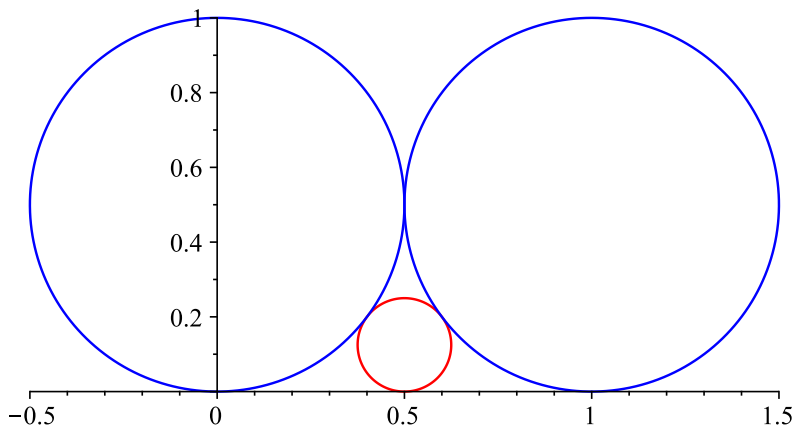
Tohle jsou ony.



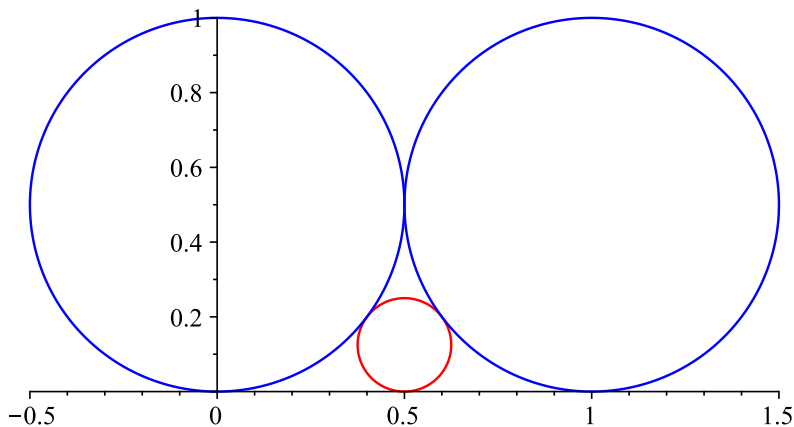
Krok 1: Dva kruhy o průměru 1 "nad body" 0 a 1.



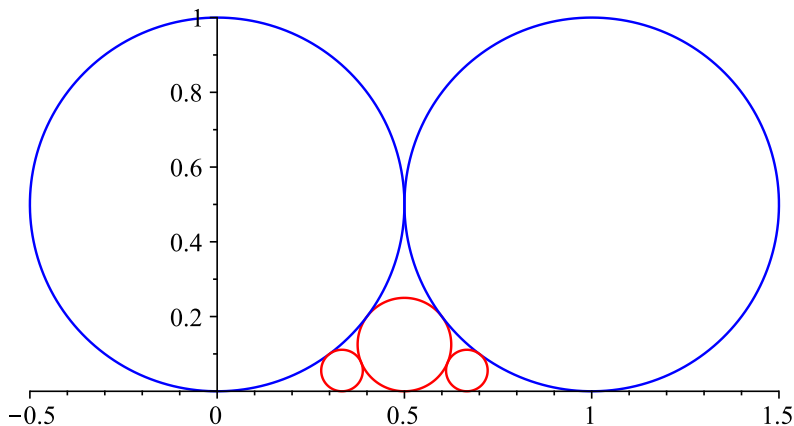
Krok 1: Dva kruhy o průměru 1 "nad body" 0 a 1.
Tj. dotýkají se sebe i osy x a mají poloměr $\frac{1}{2}$.



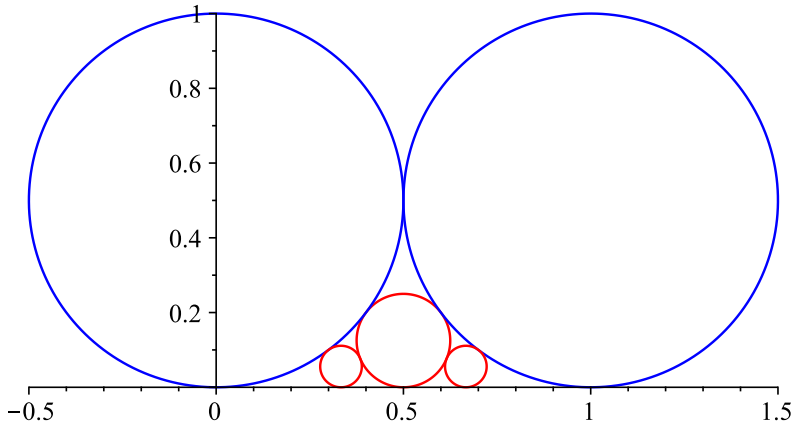
Krok 2: "Mezikruh" – dotýká se obou předchozích i osy x .



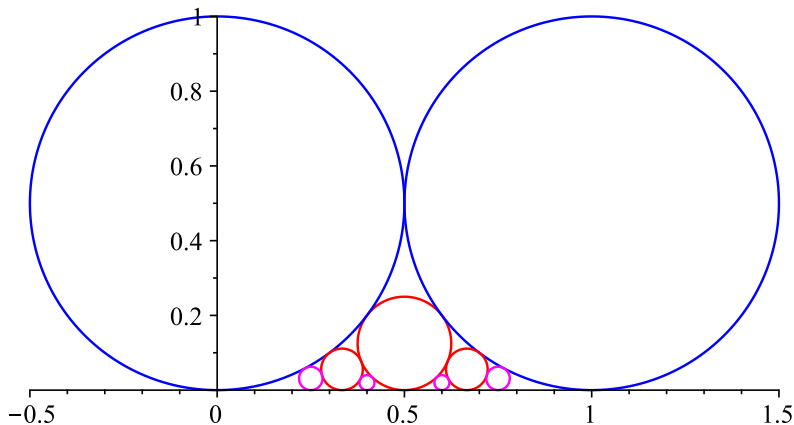
Krok 2: "Mezikruh" – dotýká se obou předchozích i osy x .
Je "nad bodem" $\frac{1}{2}$, ale jaký má poloměr?



Krok 3: Kruhy, tečné k ose x a předchozím kruhům.

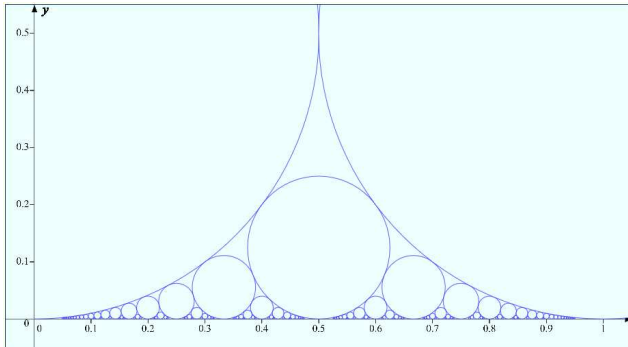


Krok 3: Kruhy, tečné k ose x a předchozím kruhům.
Už není intuitivně zřejmý ani poloměr ani bod dotyku.

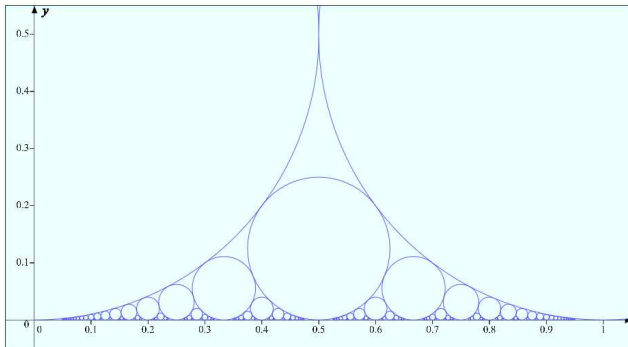


Krok 4: ... a vlastně se ukazuje, že ani kruhy z každé další "generace" nemusí být shodné.

A takto se pokračuje až do nekonečna.



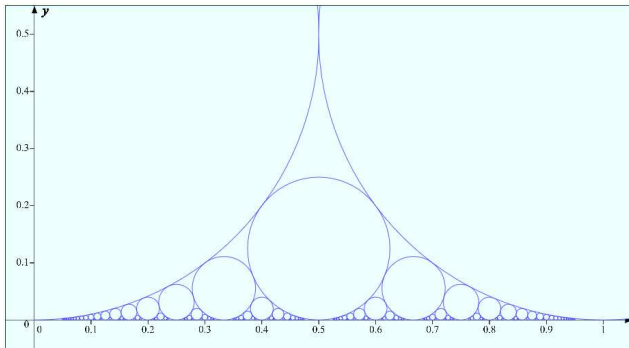
A takto se pokračuje až do nekonečna.



Základní otázky:

- střed, poloměr, bod dotyku s osou x

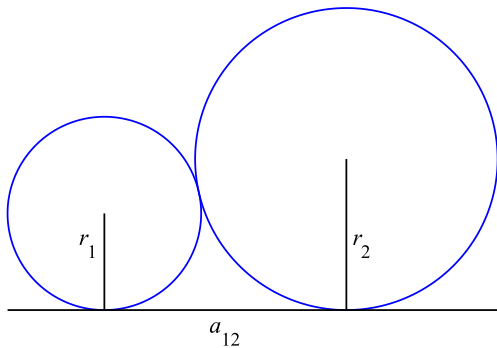
A takto se pokračuje až do nekonečna.



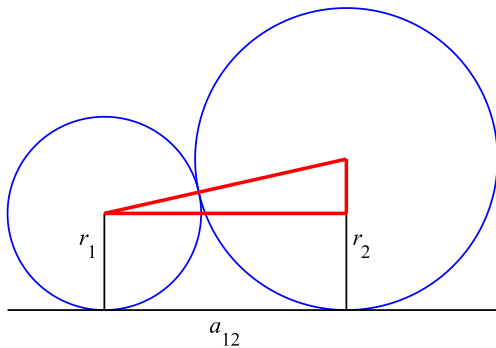
Základní otázky:

- střed, poloměr, bod dotyku s osou x
- osa x je tečnou všech Fordových kruhů $\implies$
bod dotyku je x -ová souřadnice středu

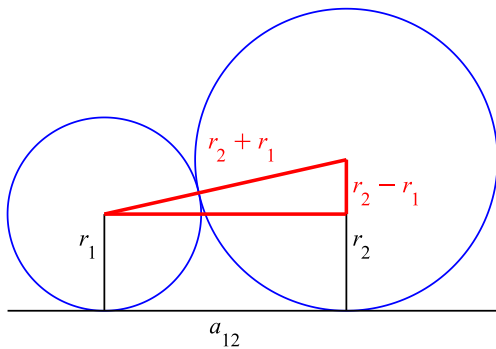
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



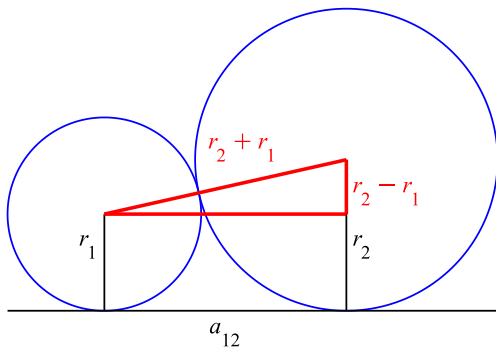
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



Dva "sousední" Fordovy kruhy:

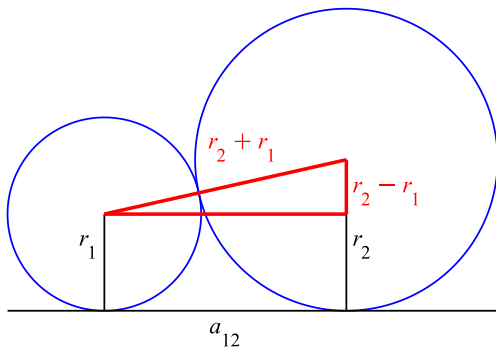


Dva "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{12} = \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

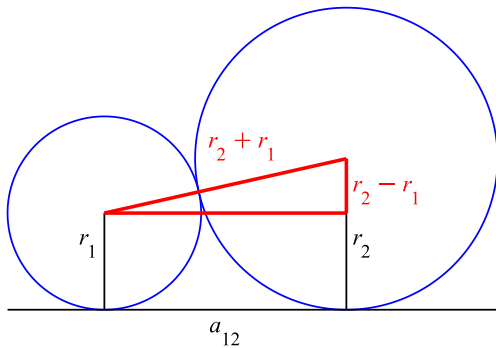
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



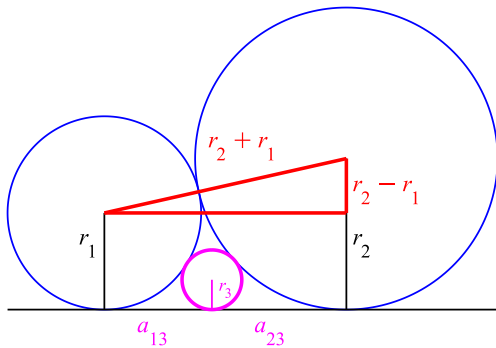
$$a_{12} = \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{4r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

(dvojnásobek geometrického průměru)

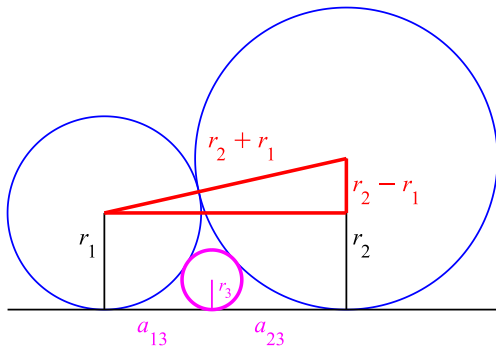
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



Tři "sousední" Fordovy kruhy:

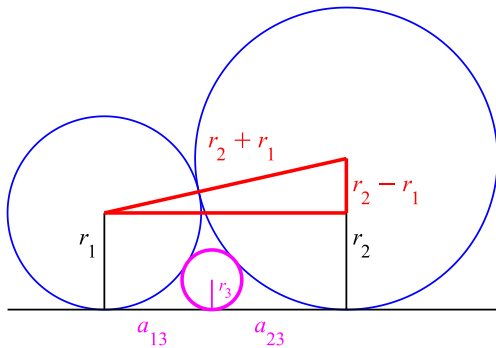


Tři "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

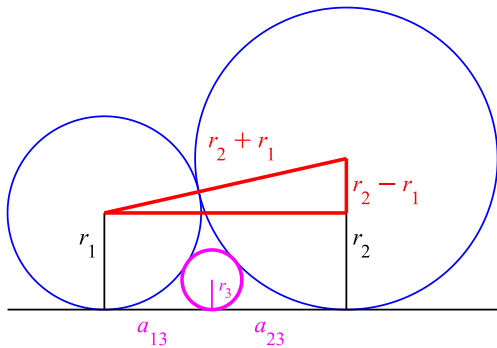
Tři "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

Tři "sousední" Fordovy kruhy:

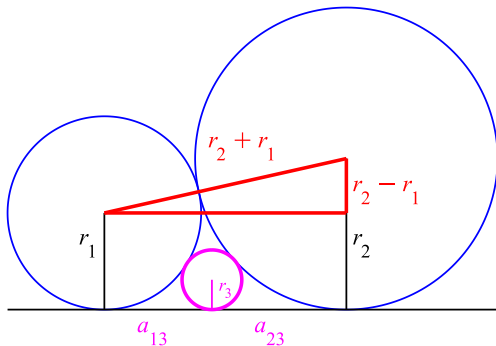


$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

$$a_{12} = a_{23} + a_{13}$$

Tři "sousední" Fordovy kruhy:



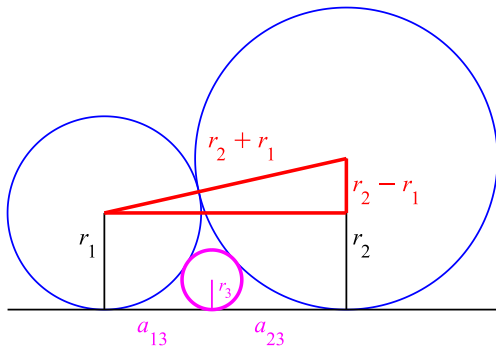
$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

$$a_{12} = a_{23} + a_{13}$$

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{r_1 r_3} \quad | : 2\sqrt{r_1 r_2 r_3}$$

Tři "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

$$a_{12} = a_{23} + a_{13}$$

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{r_1 r_3} \quad | : 2\sqrt{r_1 r_2 r_3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Zopakujme:

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2}$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} &\implies r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1 \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} &\implies r_3 = \frac{1}{18}, a_{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} &\implies r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1 \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} &\implies r_3 = \frac{1}{18}, a_{12} = \frac{1}{2} \\ r_1 = \frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{18} &\implies r_3 = \frac{1}{32}, a_{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{array}{lll} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} & \implies & r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1 \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} & \implies & r_3 = \frac{1}{18}, a_{12} = \frac{1}{2} \\ r_1 = \frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{18} & \implies & r_3 = \frac{1}{50}, a_{12} = \frac{1}{6} \end{array}$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} &\implies r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1 \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} &\implies r_3 = \frac{1}{18}, a_{12} = \frac{1}{2} \\ r_1 = \frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{18} &\implies r_3 = \frac{1}{50}, a_{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} &\implies r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1 \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} &\implies r_3 = \frac{1}{18}, a_{12} = \frac{1}{2} \\ r_1 = \frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{18} &\implies r_3 = \frac{1}{50}, a_{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.

Pozor, neplatí to pro libovolné dvojice racionálních r_1, r_2 :

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} &\implies r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1 \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} &\implies r_3 = \frac{1}{18}, a_{12} = \frac{1}{2} \\ r_1 = \frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{18} &\implies r_3 = \frac{1}{50}, a_{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.

Pozor, neplatí to pro libovolné dvojice racionálních r_1, r_2 :

$$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{3}$$

Zopakujme:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} &\implies r_3 = \frac{1}{8}, a_{12} = 1 \\ r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} &\implies r_3 = \frac{1}{18}, a_{12} = \frac{1}{2} \\ r_1 = \frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{18} &\implies r_3 = \frac{1}{50}, a_{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.

Pozor, neplatí to pro libovolné dvojice racionálních r_1, r_2 :

$$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{3} \implies r_3 = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}, a_{12} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

■
$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}},$$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

■ $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukci.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukci.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k} = 2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2 \cdot \frac{1}{2}s_k^2}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k} = 2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2 \cdot \frac{1}{2}s_k^2} = s_j s_k$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k} = 2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2 \cdot \frac{1}{2}s_k^2} = s_j s_k \in \mathbb{Q}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k} = 2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2 \cdot \frac{1}{2}s_k^2} = s_j s_k \in \mathbb{Q}$. □

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j , indukci.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j \in \mathbb{Q} \implies r_j \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2, s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2, s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k} = 2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2 \cdot \frac{1}{2}s_k^2} = s_j s_k \in \mathbb{Q}$. □

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru),

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$,

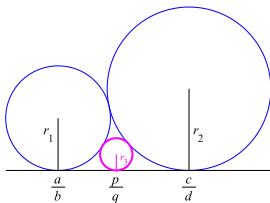
Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

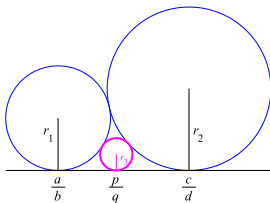
Důkaz.



Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.

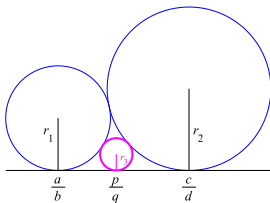


■ Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1} \implies r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$.

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.



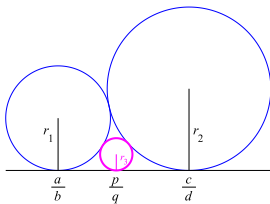
■ Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1} \implies r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$.

■ $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}}$

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.



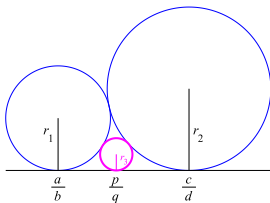
■ Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1} \implies r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$.

■ $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}} \implies \sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{2b^2} + \sqrt{2d^2}$

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.

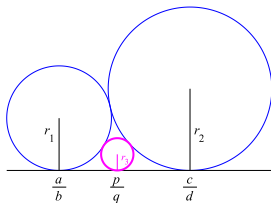


- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1} \implies r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$.
- $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}} \implies \sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{2b^2} + \sqrt{2d^2} = \sqrt{2}(b+d)$

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.



- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1} \implies r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$.
- $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}} \implies \sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{2b^2} + \sqrt{2d^2} = \sqrt{2}(b+d)$
 $\implies \frac{1}{r_3} = 2(b+d)^2$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$,

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru),

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), pak $bc - ad = 1$.

Tvrzení

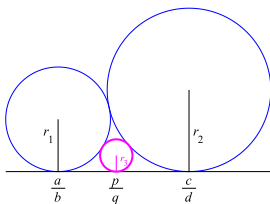
Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), pak $bc - ad = 1$.

Důkaz.

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), pak $bc - ad = 1$.

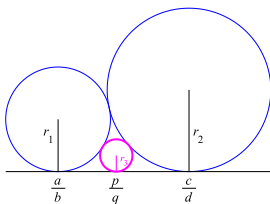
Důkaz.



Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), pak $bc - ad = 1$.

Důkaz.

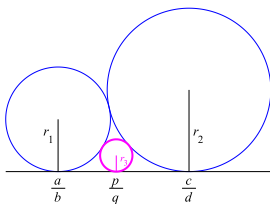


$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), pak $bc - ad = 1$.

Důkaz.

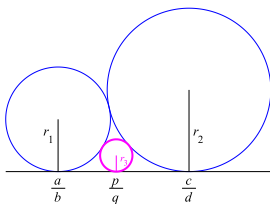


$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \implies \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 2\sqrt{\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2d^2}}$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), pak $bc - ad = 1$.

Důkaz.

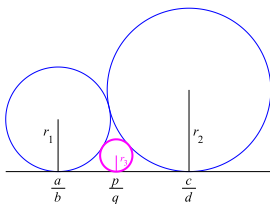


$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \implies \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 2\sqrt{\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2d^2}} = \frac{1}{bd}$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ a poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), pak $bc - ad = 1$.

Důkaz.



$$\begin{aligned} a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} &\implies \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 2\sqrt{\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2d^2}} = \frac{1}{bd} \\ &\implies bc - ad = 1. \end{aligned}$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Tvrzení

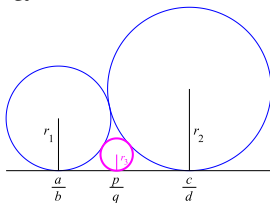
Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

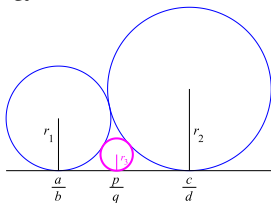
Důkaz.



Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.

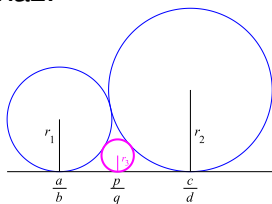


Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



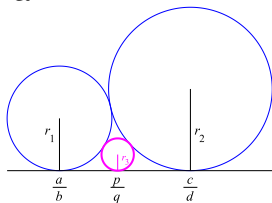
Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme $pb - aq = 1$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



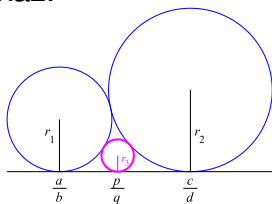
Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme
 $pb - aq = 1$ $cq - pd = 1$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

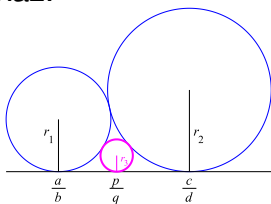
$$pb - aq = 1 \quad cq - pd = 1 \quad cb - ad = 1.$$

- Násobme první rovnici číslem d , druhou číslem b , a sečtěme.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

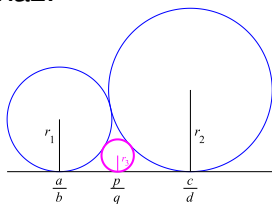
$$pb - aq = 1 \quad cq - pd = 1 \quad cb - ad = 1.$$

- Násobíme první rovnici číslem d , druhou číslem b , a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad}$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

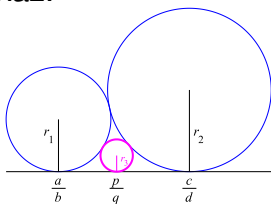
$$pb - aq = 1 \quad cq - pd = 1 \quad cb - ad = 1.$$

- Násobíme první rovnici číslem d , druhou číslem b , a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$,

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

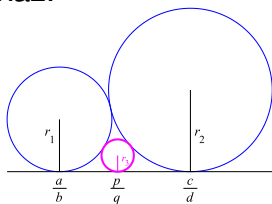
$$pb - aq = 1 \quad cq - pd = 1 \quad cb - ad = 1.$$

- Násobíme první rovnici číslem d , druhou číslem b , a sečtème. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



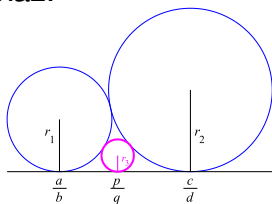
Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme
$$pb - aq = 1 \quad cq - pd = 1 \quad cb - ad = 1.$$
- Násobíme první rovnici číslem d , druhou číslem b , a sečteme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.
- Podobně násobíme první rovnici číslem c , druhou číslem a , a sečteme.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

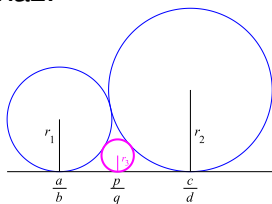
$$pb - aq = 1 \quad cq - pd = 1 \quad cb - ad = 1.$$

- Násobíme první rovnici číslem d , druhou číslem b , a sečteme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.
- Podobně násobíme první rovnici číslem c , druhou číslem a , a sečteme. Vyjde $p = \frac{a+c}{cb-ad}$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme
$$pb - aq = 1 \quad cq - pd = 1 \quad cb - ad = 1.$$
- Násobíme první rovnici číslem d , druhou číslem b , a sečteme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.
- Podobně násobíme první rovnici číslem c , druhou číslem a , a sečteme. Vyjde $p = \frac{a+c}{cb-ad} = a+c$.



Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru.

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

(i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;*
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.*

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;*
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.*

Důkaz.

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;*
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.*

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$1 = bc - ad$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;*
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.*

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$1 = bc - ad = b(a+c) - a(b+d)$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$1 = bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$\begin{aligned} 1 &= bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta \\ &= k(b\alpha - a\beta), \end{aligned}$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$\begin{aligned} 1 &= bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta \\ &= k(b\alpha - a\beta), \quad \text{spor,} \end{aligned}$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$\begin{aligned} 1 &= bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta \\ &= k(b\alpha - a\beta), \quad \text{spor, protože } k \geq 2, (\dots) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, přičemž oba zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru. Potom

- (i) zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ je v základním tvaru;
- (ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Důkaz. (i) Předpokládejme pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

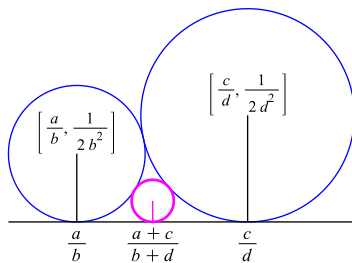
$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

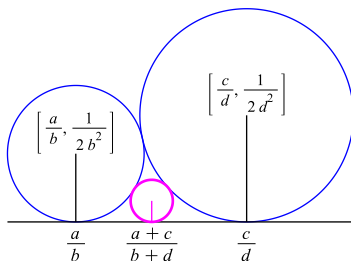
$$\begin{aligned} 1 &= bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta \\ &= k(b\alpha - a\beta), \quad \text{spor, protože } k \geq 2, (\dots) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(ii) (Opravdu) triviální.

Shrnutí:

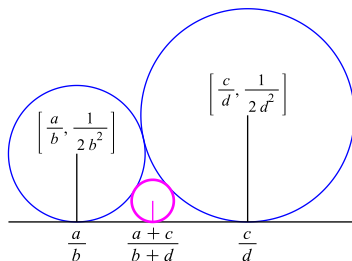


Shrnutí:



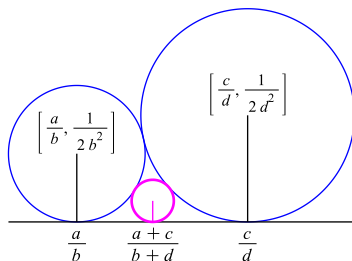
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $\left[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right]$,

Shrnutí:



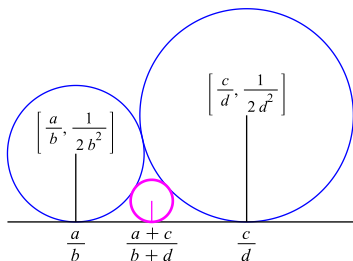
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $\left[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right]$, kde $\frac{a}{b}$ je x -ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x

Shrnutí:



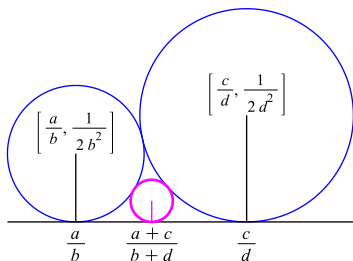
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $\left[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right]$, kde $\frac{a}{b}$ je x -ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.

Shrnutí:



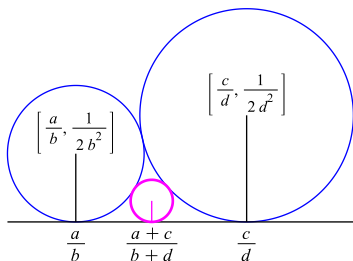
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$, kde $\frac{a}{b}$ je x -ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, pak $bc - ad = 1$

Shrnutí:



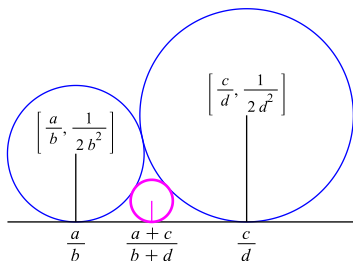
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$, kde $\frac{a}{b}$ je x -ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Shrnutí:



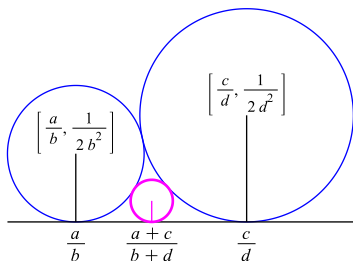
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$, kde $\frac{a}{b}$ je x -ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$. Hodnota $\frac{a+c}{b+d}$ se nazývá **mediantem** zlomků $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

Shrnutí:



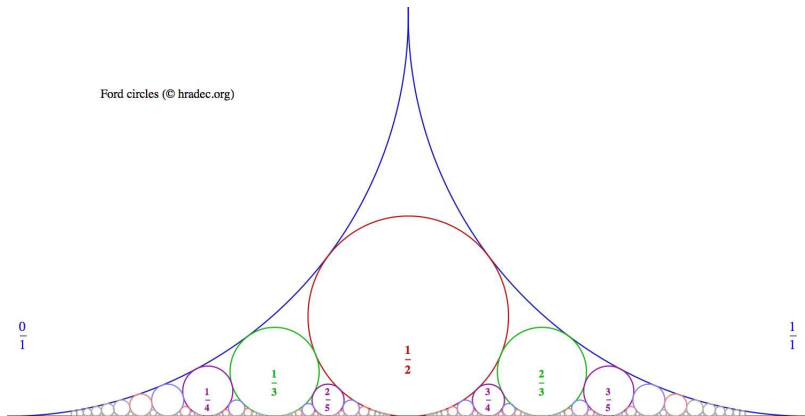
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$, kde $\frac{a}{b}$ je x -ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$. Hodnota $\frac{a+c}{b+d}$ se nazývá **mediantem** zlomků $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$. Budeme psát $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Shrnutí:

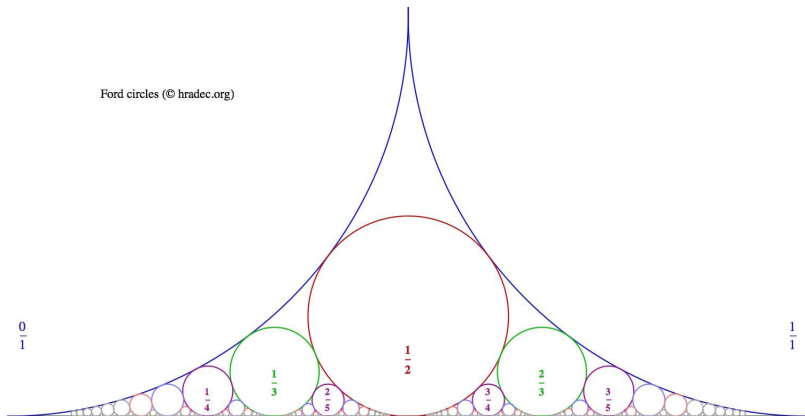


- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$, kde $\frac{a}{b}$ je x -ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$. Hodnota $\frac{a+c}{b+d}$ se nazývá **mediantem** zlomků $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$. Budeme psát $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.
- Všechny zde uvedené zlomky jsou v základním tvaru.

Několik Fordových kruhů s vyznačenými hodnotami
 x -ových souřadnic bodů dotyku:

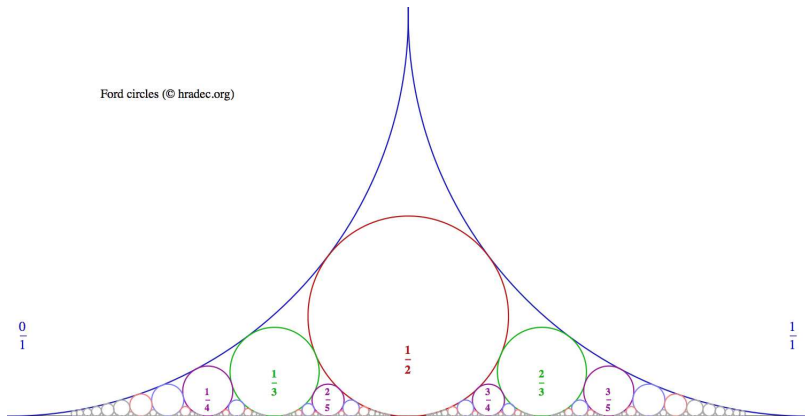


Několik Fordových kruhů s vyznačenými hodnotami x -ových souřadnic bodů dotyku:



Je jasné, že dostáváme posloupnost *vzájemně různých* racionálních čísel v základním tvaru.

Několik Fordových kruhů s vyznačenými hodnotami x -ových souřadnic bodů dotyku:



Je jasné, že dostáváme posloupnost *vzájemně různých* racionálních čísel v základním tvaru. Hierarchii jejich vzniku lze zachytit do stromové struktury.

Sternův-Brocotův strom:

Sternův-Brocotův strom:

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{1}$$

Sternův-Brocotův strom:

$$\frac{0}{1}$$
$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{1}$$

Sternův-Brocotův strom:

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

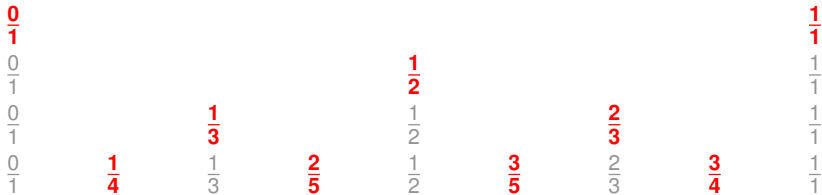
$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1}$$

Sternův-Brocotův strom:



Sternův-Brocotův strom:



Sternův-Brocotův strom:



- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.

Sternův-Brocotův strom:



- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.
- **Pozor:** víme, že všechny zlomky takto vzniklé jsou vždy **v základním tvaru**.

Sternův-Brocotův strom:



- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.
- **Pozor:** víme, že všechny zlomky takto vzniklé jsou vždy **v základním tvaru**. Ale: to platí pouze pro zlomky, reprezentující sousední dotykové body Fordových kruhů s osou x ,

Sternův-Brocotův strom:



- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.
- **Pozor:** víme, že všechny zlomky takto vzniklé jsou vždy **v základním tvaru**. Ale: to platí pouze pro zlomky, reprezentující sousední dotykové body Fordových kruhů s osou x , viz: $\frac{1}{2} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{9}$.

Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vzniknou?

Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vzniknou?

Překvapení: **VŠECHNA**

Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vzniknou?

Překvapení: **VŠECHNA**

Sternův-Brocotův strom (resp. seznam všech bodů dotyku Fordových kruhů s osou x), je seznamem všech racionálních čísel, přičemž každé z nich se v tomto seznamu vyskytuje právě jednou a každé z nich je v něm uvedeno v základním tvaru.

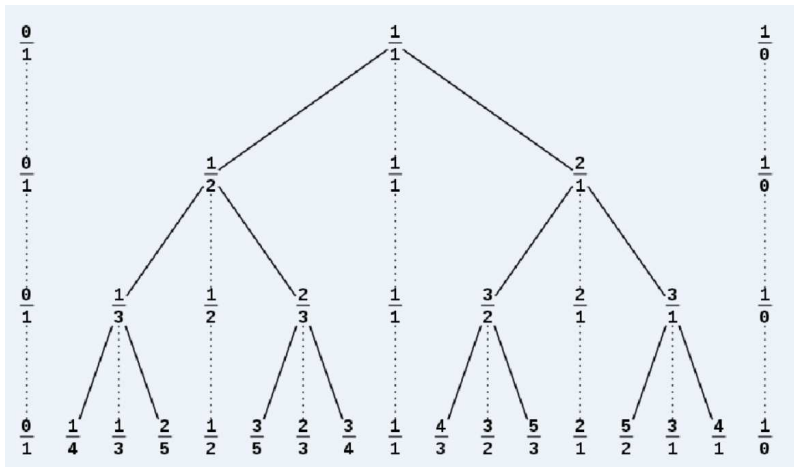
Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vzniknou?

Překvapení: **VŠECHNA**

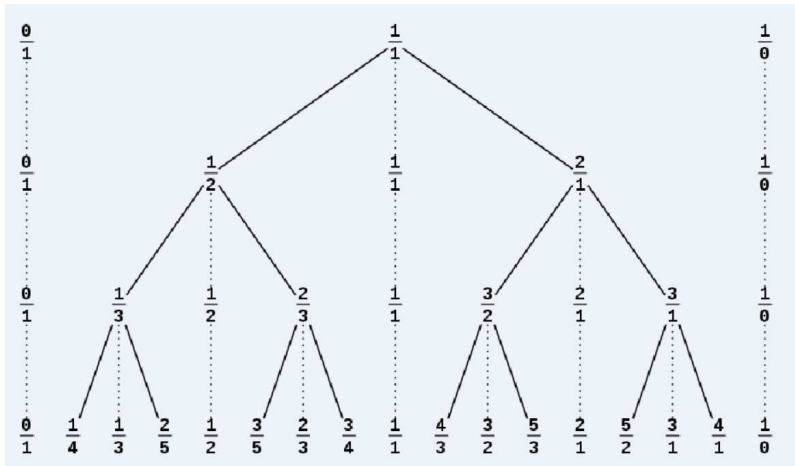
Sternův-Brocotův strom (resp. seznam všech bodů dotyku Fordových kruhů s osou x), je seznamem všech racionálních čísel, přičemž každé z nich se v tomto seznamu vyskytuje právě jednou a každé z nich je v něm uvedeno v základním tvaru.

Co víc, Sternův-Brocotův strom lze modifikovat tak, aby vygeneroval všechna nezáporná racionální čísla. Následující obrázek je návodem, jak to udělat.

Sternův-Brocotův strom všech nezáporných racionálních čísel

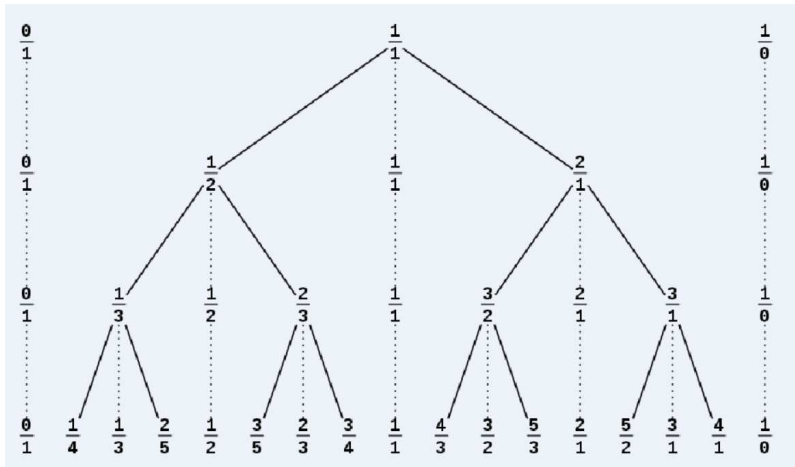


Sternův-Brocotův strom všech nezáporných racionálních čísel



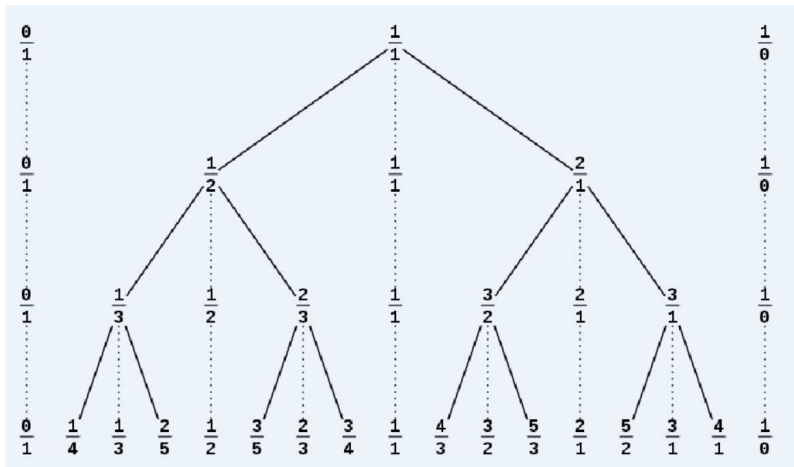
$$\sum \frac{1}{p_j q_j} = 1,$$

Sternův-Brocotův strom všech nezáporných racionálních čísel



$$\sum \frac{1}{p_j q_j} = 1, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 1,$$

Sternův-Brocotův strom všech nezáporných racionálních čísel



$$\sum \frac{1}{p_j q_j} = 1, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 1, \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 1} = 1$$

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče".

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče".
Odpověď je ANO: stačí nalézt, kde se $\frac{p}{q}$ nachází ve Sternově-Brocotově stromu a podívat se, jaké dva zlomky jej vygenerovaly.

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče".
Odpověď je ANO: stačí nalézt, kde se $\frac{p}{q}$ nachází ve Sternově-Brocotově stromu a podívat se, jaké dva zlomky jej vygenerovaly.
- Lze to i efektivněji?

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče".
Odpověď je ANO: stačí nalézt, kde se $\frac{p}{q}$ nachází ve Sternově-Brocotově stromu a podívat se, jaké dva zlomky jej vygenerovaly.
- Lze to i efektivněji? I zde je odpověď kladná,

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče".
Odpověď je ANO: stačí nalézt, kde se $\frac{p}{q}$ nachází ve Sternově-Brocotově stromu a podívat se, jaké dva zlomky jej vygenerovaly.
- Lze to i efektivněji? I zde je odpověď kladná, potřebujeme však k tomu "lehký úvod do teorie řetězových zlomků."

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}}\end{aligned}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]\end{aligned}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]\end{aligned}$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]\end{aligned}$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]\end{aligned}$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}} = [10; 1, 2, 3, 1]$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]\end{aligned}$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}} = [10; 1, 2, 3, 1]$$

Obecně (pro $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$):

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\begin{aligned}\frac{139}{13} &= 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \\ &= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]\end{aligned}$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}} = [10; 1, 2, 3, 1]$$

Obecně (pro $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$):

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1].$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$,

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovný

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovný

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13}$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4]$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4].$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

■ $[0; 1, 2, 3]$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

$$\blacksquare [0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

$$\blacksquare [0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{7}}$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

$$\blacksquare [0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

$$\blacksquare [0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$$

$$\blacksquare [0; 1, 2]$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

$$\blacksquare [0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$$

$$\blacksquare [0; 1, 2] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

$$\blacksquare [0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$$

$$\blacksquare [0; 1, 2] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1] = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad a \quad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

$$\blacksquare [0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$$

$$\blacksquare [0; 1, 2] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{7}{10} \oplus \frac{2}{3} = \frac{9}{13}.$$

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty)

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- **Úloha o egyptských zlomcích:** lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- **Úloha o egyptských zlomcích:** lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok:

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- **Úloha o egyptských zlomcích:** lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}, r > 0 \implies$

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- **Úloha o egyptských zlomcích:** lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}, r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$,

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- **Úloha o egyptských zlomcích:** lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$, kde $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$.

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- **Úloha o egyptských zlomcích:** lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$, kde $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$. Pokud je $\frac{p}{q} = 0$, jsme hotovi.

3. Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(Egyptané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- **Úloha o egyptských zlomcích:** lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$, kde $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$. Pokud je $\frac{p}{q} = 0$, jsme hotovi.
- V případě $0 < \frac{p}{q} < 1$ pomohou "rodiče a děti ve Sternově-Brocotově stromu".

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo,

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu".

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$,

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \quad (3)$$

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \quad (3)$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Pro $a \neq 0$ je $0 < a < b < q$ a z (3) plyne, že jsme $\frac{p}{q}$ napsali jako součet egyptského zlomku $\frac{1}{bq}$ a zlomku $0 < \frac{a}{b} < 1$

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \quad (3)$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Pro $a \neq 0$ je $0 < a < b < q$ a z (3) plyne, že jsme $\frac{p}{q}$ napsali jako součet egyptského zlomku $\frac{1}{bq}$ a zlomku $0 < \frac{a}{b} < 1$ s nižším jmenovatelem než má $\frac{p}{q}$

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \quad (3)$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Pro $a \neq 0$ je $0 < a < b < q$ a z (3) plyne, že jsme $\frac{p}{q}$ napsali jako součet egyptského zlomku $\frac{1}{bq}$ a zlomku $0 < \frac{a}{b} < 1$ s nižším jmenovatelem než má $\frac{p}{q}$ a nižším čitatelem než jmenovatelem.

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \quad (3)$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Pro $a \neq 0$ je $0 < a < b < q$ a z (3) plyne, že jsme $\frac{p}{q}$ napsali jako součet egyptského zlomku $\frac{1}{bq}$ a zlomku $0 < \frac{a}{b} < 1$ s nižším jmenovatelem než má $\frac{p}{q}$ a nižším čitatelem než jmenovatelem. Proto opakováním tohoto procesu dřív nebo později dostaneme součet pouze egyptských zlomků.

Bud' $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \quad (3)$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Pro $a \neq 0$ je $0 < a < b < q$ a z (3) plyne, že jsme $\frac{p}{q}$ napsali jako součet egyptského zlomku $\frac{1}{bq}$ a zlomku $0 < \frac{a}{b} < 1$ s nižším jmenovatelem než má $\frac{p}{q}$ a nižším čitatelem než jmenovatelem. Proto opakováním tohoto procesu dřív nebo později dostaneme součet pouze egyptských zlomků.

Závěr: úloha o egyptských zlomcích má řešení pro všechna kladná racionální čísla.

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$.

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$,

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$.

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13} < \frac{7}{10} = \frac{c}{d}$$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13} < \frac{7}{10} = \frac{c}{d}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} =$$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13} < \frac{7}{10} = \frac{c}{d}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} =$$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13} < \frac{7}{10} = \frac{c}{d}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

Podobně (nebo víme i bez výpočtu):

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13} < \frac{7}{10} = \frac{c}{d}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

Podobně (nebo víme i bez výpočtu): $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13} < \frac{7}{10} = \frac{c}{d}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

Podobně (nebo víme i bez výpočtu): $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ a tedy

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{39}.$$

- Pomocí výše zmíněného algoritmu lze ukázat například:

$$\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{228} + \frac{1}{494} + \frac{1}{858}.$$

- Pomocí výše zmíněného algoritmu lze ukázat například:

$$\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{228} + \frac{1}{494} + \frac{1}{858}.$$

To je mj. i příklad toho, že tento algoritmus nemusí být vždy efektivní (lze psát jednodušeji $\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11}$),

- Pomocí výše zmíněného algoritmu lze ukázat například:

$$\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{228} + \frac{1}{494} + \frac{1}{858}.$$

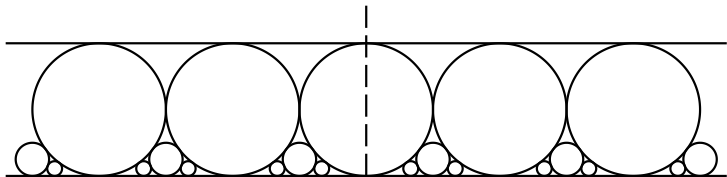
To je mj. i příklad toho, že tento algoritmus nemusí být vždy efektivní (lze psát jednodušeji $\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11}$), jeho důležitost je v tom, že ukazuje, že egyptský problém *vždy lze vyřešit*, a nabízí cestu k jednomu z řešení (ne vždy nejefektivnějšímu).

4. Bonus: symetrie a všechna racionální čísla

**Symetrie podle osy y
a symetrie vůči posunu $o \pm n, n \in \mathbb{N}$**

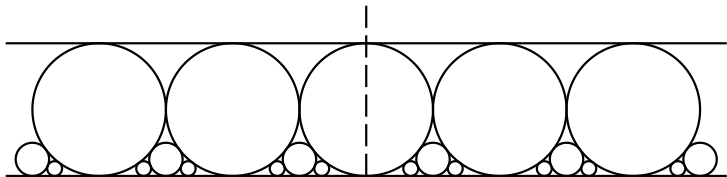
4. Bonus: symetrie a všechna racionální čísla

**Symetrie podle osy y
a symetrie vůči posunu o $\pm n$, $n \in \mathbb{N}$**



4. Bonus: symetrie a všechna racionální čísla

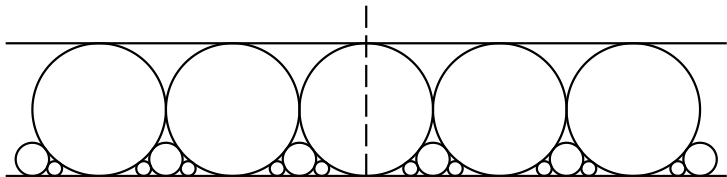
**Symetrie podle osy y
a symetrie vůči posunu o $\pm n$, $n \in \mathbb{N}$**



- Racionální číslo větší než 1: posun o $-n$ tak, aby leželo v $(0, 1)$.

4. Bonus: symetrie a všechna racionální čísla

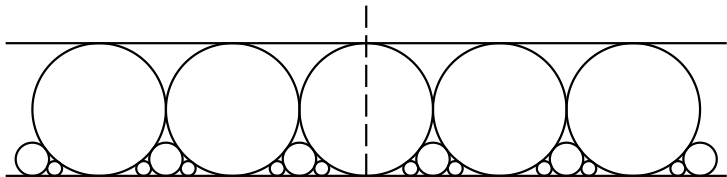
**Symetrie podle osy y
a symetrie vůči posunu o $\pm n$, $n \in \mathbb{N}$**



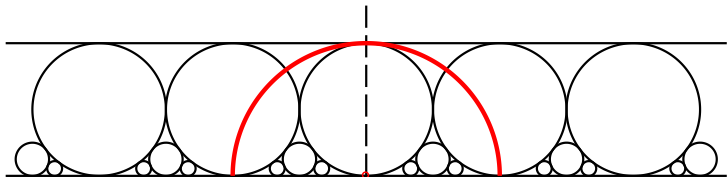
- Racionální číslo větší než 1: posun o $-n$ tak, aby leželo v $(0, 1)$.
- Racionální číslo menší než -1: posun o n nebo symetrie dle osy y .

Kruhová inverze

Kruhová inverze



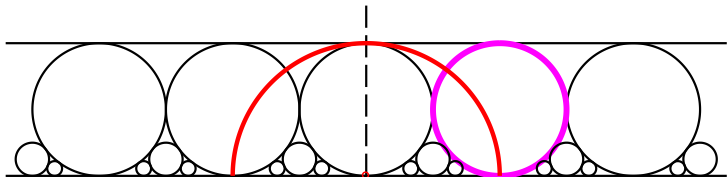
Kruhová inverze



- **Kruhová inverze** (podle **kružnice** o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A' , který leží na polopřímce SA , tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)



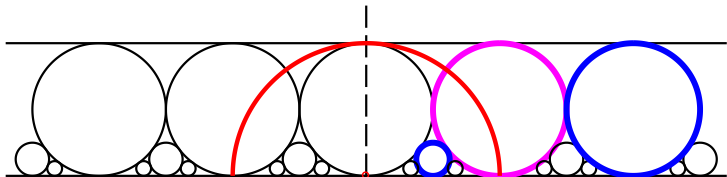
Kruhová inverze



- **Kruhová inverze** (podle **kružnice** o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A' , který leží na polopřímce SA , tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- **Fialová kružnice** se zobrazí na sebe.

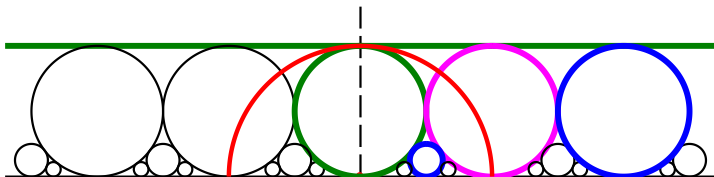


Kruhová inverze



- **Kruhová inverze** (podle **kružnice** o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A' , který leží na polopřímce SA , tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- **Fialová kružnice** se zobrazí na sebe.
- **Modré kružnice** jsou si vzájemně vzorem a obrazem.
-
-

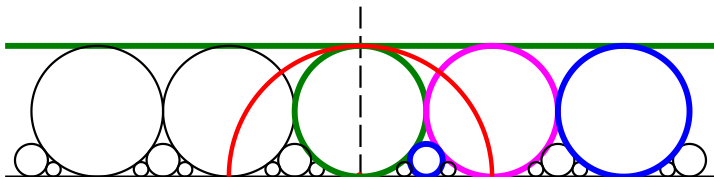
Kruhová inverze



- **Kruhová inverze** (podle **kružnice** o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A' , který leží na polopřímce SA , tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- **Fialová kružnice** se zobrazí na sebe.
- **Modré kružnice** jsou si vzájemně vzorem a obrazem.
- **Zelená kružnice** se zobrazí na **zelenou přímku** a naopak.



Kruhová inverze



- **Kruhová inverze** (podle **kružnice** o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A' , který leží na polopřímce SA , tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- **Fialová kružnice** se zobrazí na sebe.
- **Modré kružnice** jsou si vzájemně vzorem a obrazem.
- **Zelená kružnice** se zobrazí na **zelenou přímku** a naopak.
- Kružnice a přímky zobrazují na kružnice a přímky.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh,

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13}$

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$
 - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$
 - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$
 - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
 - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$
 - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
 - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
 - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2) a udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$
 - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
 - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
 - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2) a udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).
 - Přičti 1 a udělej převrácenou hodnotu.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$
 - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
 - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
 - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2) a udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).
 - Přičti 1 a udělej převrácenou hodnotu.
 - Přičti 10.

5. Bonus II: Zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

5. Bonus II: Zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{1}$$

5. Bonus II: Zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1}$$

5. Bonus II: Zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{0}{1}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1}$$

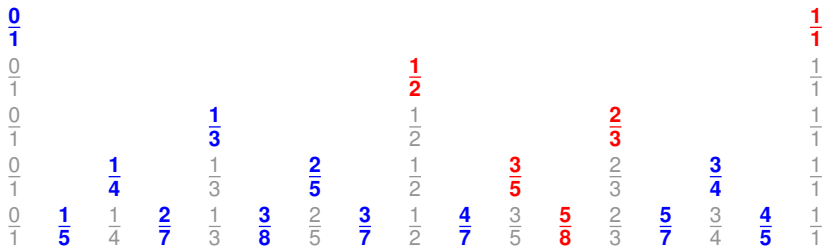
5. Bonus II: Zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

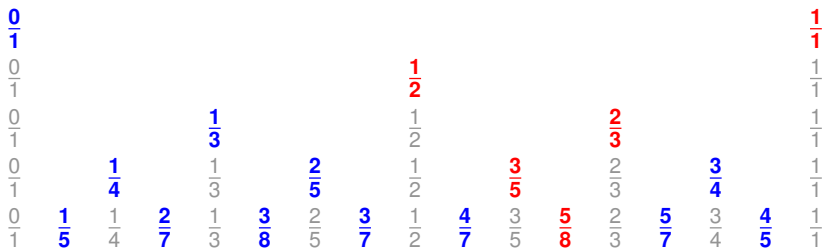


5. Bonus II: Zlatý hřeb

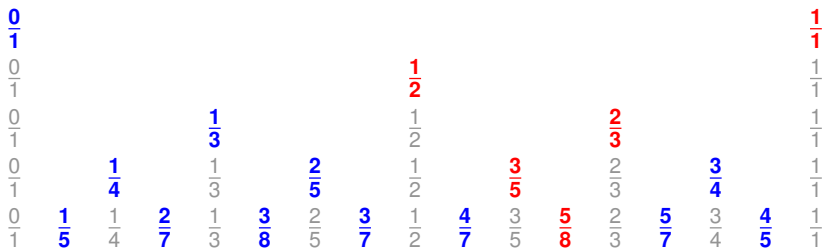
Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.



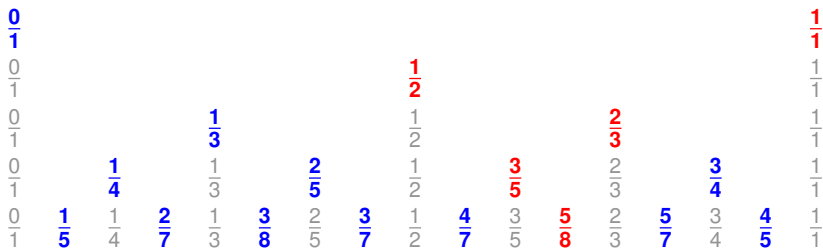




Mediantové sčítání zlomků $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ způsobí, že v čitatelích i jmenovatelích takto vznikajících zlomků dostáváme členy Fibonacciho posloupnosti F_n ,



Mediantové sčítání zlomků $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ způsobí, že v čitatelích i jmenovatelích takto vznikajících zlomků dostáváme členy Fibonacciho posloupnosti F_n , tedy všechny takto vzniklé zlomky jsou tvaru $\frac{F_n}{F_{n+1}}$.



Mediantové sčítání zlomků $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ způsobí, že v čitatelích i jmenovatelích takto vznikajících zlomků dostáváme členy Fibonacciho posloupnosti F_n , tedy všechny takto vzniklé zlomky jsou tvaru $\frac{F_n}{F_{n+1}}$. Jejich limitou proto je hodnota zlatého řezu

$$\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618\dots$$

A v tomto zlatém okamžiku je vhodné skončit.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 - Karlín

`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`