Lebesgueovy prostory a jejich zobecnění

Aleš Nekvinda

April 27, 2021

Střední škola

Uvažujme dva vektory $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$.
Skalární souїn je

$$u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Velikost vektoru je

$$|u| = \sqrt{u.u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Odchylka vektorů je dána vzorcem

$$\cos\varphi = \frac{u.v}{|u|.|v|}.$$

Aby toto fungovalo, musí být pravda následující tvrzení.

Theorem 1 (Schwartzova nerovnost)

$$|u.v| \leq |u|.|v| \ .$$

Důsledkem Schwartzovy nerovnosti je

Theorem 2 (trojúhelníková nerovnost)

$$|u + v| \leq |u| + |v| \ .$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}|u + v|^2 &= |u|^2 + 2u.v + |v|^2 \\ &\leq |u|^2 + 2|u|.|v| + |v|^2 \\ &= (|u| + |v|)^2.\end{aligned}$$

Zobecnění na n souřadnic

Uvažujme dva vektory $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Skalární souin je

$$u.v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Velikost vektoru je

$$|u| = \sqrt{u.u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\Big)^{1/2}.$$

Opět platí

Theorem 3 (trojúhelníková nerovnost)

$$|u+v| \leq |u|+|v| \ .$$

Integrální verze

Uvažujme dvě funkce f, g na $\mathbb{R}$. Skalární souǐn je

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx.$$

Norma funkce je

$$\|f\| = \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Opět platí

Theorem 4 (trojúhelníková nerovnost)

$$\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\| \ .$$

Klasické prostory $L^p(\mathbb{R})$

Definition 5 *Prostor L^p je definován jako množina měřitelných $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s konečnou normou*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{pro } 1 \le p < \infty, \\ \text{ess sup} |f(x)| & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

Lemma 6 (Hölderova nerovnost) *Nechť $p' = \frac{p}{p-1}$ pro $1 < p < \infty$, $1' = \infty$, $\infty' = 1$. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{p'} \right)^{1/p'}$$

Theorem 7 (Vlastnosti normy)

$$\begin{aligned} &\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \\ &\|\alpha . f\|_p = |\alpha| . \|f\|_p, \\ &\|f\|_p \ge 0, \ \|f\|_p = 0 \ \Leftrightarrow \ f \equiv 0. \end{aligned}$$

Definition 8 *Nechť X je lineární prostor a $\|.\|$ zobrazení z X do $\mathbb{R}$. Nechť je splněno*

$$\begin{aligned} &\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|, \\ &\|\alpha . f\| = |\alpha| . \|f\|, \\ &\|f\| \ge 0, \ \|f\| = 0 \ \Leftrightarrow \ f \equiv 0. \end{aligned}$$

Pak $(X, \|.\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li navíc úplný, je to Banachův prostor.

Prostory $L^{p(.)}(\Omega)$

Pokus: Dána funkce $p(.) : \Omega \to [0, \infty)$. Zkusme definovat

$$\|f\|_{p(.)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/p(x)}.$$

To nejde, to není číslo. Ale lze přepsat pro konstantní p

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$
$$= \inf \left\{ \lambda > 0; \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^p dx \right\}.$$

To nás vede k definici

Definition 9 *Dána Ω a funkce $p(.) : \Omega \to [0, \infty)$.*

Definujme normu

$$\|f\|_{p(.)} = \inf\left\{\lambda > 0; \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx\right\}$$

a

$$L^{p(.)}(\Omega) = \{f; \|f\|_{p(.)} < \infty\}.$$

Theorem 10 $L^{p(.)}(\Omega)$ *je Banachův prostor.*

Operátory shiftu na $L^p(\mathbb{R})$

Theorem 11 *Nechť* $h \in \mathbb{R}$*,* f *je daná funkce a* $f_h(x) = f(x+h)$*. Pak* $\|f_h\|_p = \|f\|_p$*.*

Theorem 12 *Nechť* $1 \leq p < \infty$ *a nechť* f *je daná funkce. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že*

$$|h| < \delta \;\Rightarrow\; \|f_h - f\|_p < \varepsilon.$$

Hustota hladkých funkcí v $L^p(\mathbb{R})$

Uvažujme funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi

$$\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),$$
$$\text{supp}\varphi \subset [-1,1],$$
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1.$$

Theorem 13 *Nechť* $1 \leq p < \infty$. *Množina* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *je hustá v* $L^p(\mathbb{R})$.

Důkaz: Položme

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big)u(t)dt.$$

Potom

$$
\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big) u(t)dt - u(x) \right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{-1}^{1} \varphi(y) u(x-\varepsilon y)dy - u(x) \right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{-1}^{1} \varphi(y)(u(x-\varepsilon y) - u(x))dy \right|^p dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \varphi(y)^p |u(x-\varepsilon y) - u(x)|^p dy dx \\
&\le C \int_{-1}^{1} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x-\varepsilon y) - u(x)|^p dx \Big) dy.
\end{aligned}
$$

Poslední výraz je malý.

Hustota hladkých funkcí v $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$

Example 14 *Nechť* $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *a*

$$p(x) := p_1 \chi_{(-\infty,0)}(x) + p_2 \chi_{(0,\infty)}(x).$$

Pak operátory shiftu nejsou omezené.

Důkaz: Vezmeme α takové, že

$$\frac{1}{p_2} < \alpha < \frac{1}{p_1}.$$

Definujme

$$u(x) = |x|^{-\alpha}\chi_{(-\infty,0)}(x).$$

Pak snadno spočteme, že

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{p(x)} dx = \int_{-\infty}^{0} |x|^{-\alpha p_1} dx < \infty$$

neboť $-\alpha p_1 > -1$.

Buď $u_\varepsilon(x) = u(x-\varepsilon)$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{p(x)} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} |x-\varepsilon|^{-\alpha p_1} dx + \int_{0}^{\varepsilon} |x-\varepsilon|^{-\alpha p_2} dx.$$

Jenže

$$\int_{0}^{\varepsilon} |x-\varepsilon|^{-\alpha p_2} dx = \int_{-\varepsilon}^{0} |x|^{-\alpha p_2} dx = \infty$$

neboť $-\alpha p_2 < -1$.

Takže takhle to nejde. Jak z toho ven?

Nechť $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$. Uvažujme pro jednoduchost jen omezený interval $I = (0, 1)$. Pak

$$L^{p(.)}(I) \hookrightarrow L^{p^-}(I).$$

Ale na $L^{p^-}(I)$ jsou shifty omezené a tedy pro $u \in L^{p^-}(I)$ platí

$$\|u_\varepsilon - u\|_{p^-} \to 0.$$

Existuje tedy vybraná u_{ε_k} tak, že

$$u_k(x) := u_{\varepsilon_k}(x) \to u(x)$$

skoro všude. Stačí tedy najít integrabilní majorantu z $L^{p(.)}(I)$ a máme

$$\|u_\varepsilon - u\|_{p(.)} \to 0.$$

Kde ji ale sebrat? Všimněme si, že

$$
\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x)| &= \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big)u(t)dt\right| \\
&\leq C\ \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}|u(t)|dt \\
&\leq C\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}|u(t)|dt := CMu(x).
\end{aligned}
$$

Hardy-Littlewoodův maximální operátor

Definition 15 (Maximální operátor) *Dána f. Položme*

$$
Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}|f(t)|dt.
$$

M není lineární operátor, ale je sublineární (tj. $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$).

Lemma 16 $M : L^\infty \to L^\infty$, *ale* $M : L^1 \nrightarrow L^1$.

Lemma 17 *Pro každé $\lambda > 0$ platí*

$$\lambda|\{x; Mf(x) > \lambda\}| \leq 2\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$

Definition 18 *Definujme $L^{1,\infty}$ (slabý L^1) jako množinu f s konečnou "normou"*

$$\|f\|_{1,\infty} := \sup_{\lambda>0} \lambda|\{x; |f(x)| > \lambda\}| < \infty.$$

Lemma 19 $L^1 \subset L^{1,\infty}$ *.*

Lemma 17 lze přeformulovat:

Lemma 20 $M : L^1 \to L^{1,\infty}$*.*

Interpolační věty

Theorem 21 (Riesz, Thorin) *Nechť T je sublineární operátor. Buď*

$$T : L^1 \to L^1,$$
$$T : L^\infty \to L^\infty.$$

Pak pro $1 \leq p \leq \infty$ platí

$$T : L^p \to L^p.$$

Theorem 22 (Marcinkiewicz) *Nechť T je sublineární operátor. Buď*

$$T : L^1 \to L^{1,\infty},$$
$$T : L^\infty \to L^\infty.$$

Pak pro $1 < p \leq \infty$ platí

$$T : L^p \to L^p.$$

Theorem 23 *Nechť $1 < p \leq \infty$. Pak*

$$M : L^p \to L^p$$

je omezený.

Prostory $L^{p(x)}$

Předpokládelme, že $1 < \inf p(x) \leq \sup p(x) < \infty$.

Theorem 24 *M není obecně omezený na $L^{p(x)}$ pro libovolnou $p(x)$.*

Theorem 25 (Lars Diening) *Nechť $p(x)$ splňuje*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{-\ln|x-y|} \text{ pro } |x-y| \leq \frac{1}{2}$$

a $p(x)$ je konstantní v okolí nekonečna, pak M je omezený na $L^{p(x)}$.

Theorem 26 (Já) *Nechť $p(x)$ splňuje Dieningovu podmínku a nechť existují $0 < c < 1$, $p_\infty > 1$ tak, že*

$$\int_{\mathbb{R}} c^{\frac{1}{|p(x)-p_\infty|}} dx < \infty,$$

pak M je omezený na $L^{p(x)}$.

Typickým příkladem takové funkce je funkce splňující $|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\ln|x|}$.

Důsledek 27 *Nechť* $p(x)$ *splňuje Dieningovu podmínku a nechť existují* $1 \leq \alpha,\ p_\infty > 1$ *tak, že*

$$p(x) = p_\infty + \frac{1}{\ln^\alpha |x|}.$$

Pak M *je omezený na* $L^{p(x)}$*.*

Theorem 28 (Já) *Nechť* $p(x)$ *splňuje Dieningovu podmínku a nechť existují* $0 < \alpha,\ p_\infty > 1$ *tak, že blízko nekonečna je*

$$p(x) = p_\infty + \frac{1}{\ln^\alpha |x|}.$$

Pak M *je omezený na* $L^{p(x)}$*.*