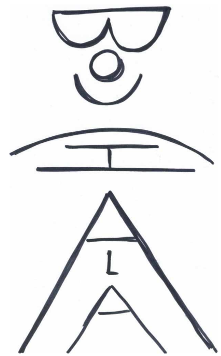
Přechodem hory k řešení okrajové úlohy

Jiří Bouchala



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

18. května 2021, seminář OSMA

...ace

- ...ace
- ...ace
- ...ace
- ...ace

MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)

Z jakých částí se skládá tato prezentace

- Motivace
- Geometrické inspirace
- Věty o minimaxu a jejich aplikace
- Seznam literatury, citace

Celá řada praktických problémů (například okrajových úloh) je ekvivalentní funkcionálním rovnicím typu

$$F(u) = 0,$$

kde $F: X \to Y$ je zobrazení mezi dvěma Banachovými prostory.

Celá řada praktických problémů (například okrajových úloh) je ekvivalentní funkcionálním rovnicím typu

$$F(u) = 0,$$

kde $F: \ X \to Y$ je zobrazení mezi dvěma Banachovými prostory. Podtřídu těchto problémů tvoří tzv. *variační problémy*. To jsou ty z výše uvedených problémů, k nimž existuje diferencovatelný funkcionál

$$\boxed{J: \ X \to \mathbb{R}}$$

takový, že $F = J'$. Prostor Y je pak vlastně duálním prostorem k X $(Y = L(X, \mathbb{R}) = X^*)$ a rovnice $F(u) = 0$ je ekvivalentní rovnici

$$\boxed{J'(u) = 0.}$$

Celá řada praktických problémů (například okrajových úloh) je ekvivalentní funkcionálním rovnicím typu

$$F(u) = 0,$$

kde $F: X \to Y$ je zobrazení mezi dvěma Banachovými prostory. Podtřídu těchto problémů tvoří tzv. *variační problémy*. To jsou ty z výše uvedených problémů, k nimž existuje diferencovatelný funkcionál

$$\boxed{J: X \to \mathbb{R}}$$

takový, že $F = J'$. Prostor Y je pak vlastně duálním prostorem k X ($Y = L(X, \mathbb{R}) = X^*$) a rovnice $F(u) = 0$ je ekvivalentní rovnici

$$\boxed{J'(u) = 0.}$$

Řešení u, tj. takové $u \in X$, pro něž platí

$$\forall v \in X: \ \langle J'(u), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = 0,$$

nazýváme *kritickým bodem* funkcionálu J a číslo $J(u)$ *kritickou hodnotou* J.

Hledání kritických bodů a kritických hodnot je jedním z klíčových témat *variačního počtu*.

V dalším se budeme zabývat otázkou existence kritické hodnoty „jistého typu“.

Výlet k lokálnímu maximu

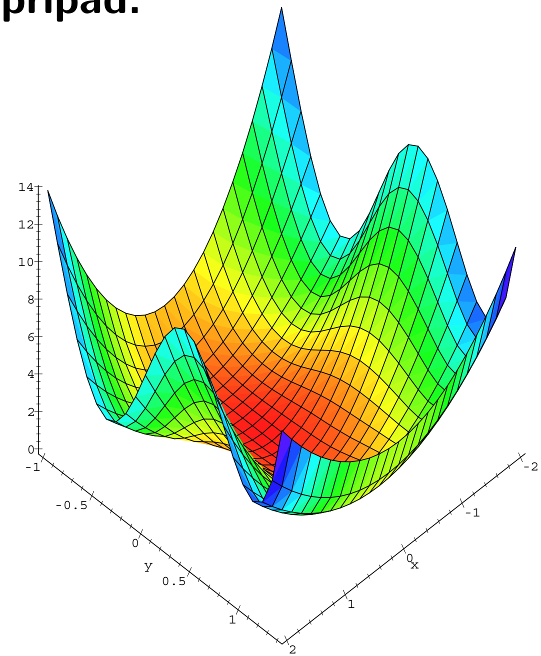
V dalším se budeme zabývat otázkou existence kritické hodnoty „jistého typu".

Uvažujme nejdříve zobrazení

$$J: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

a hledejme podmínky, které zaručí existenci kritického (stacionárního) bodu J.
Představme si pro inspiraci tři situace.

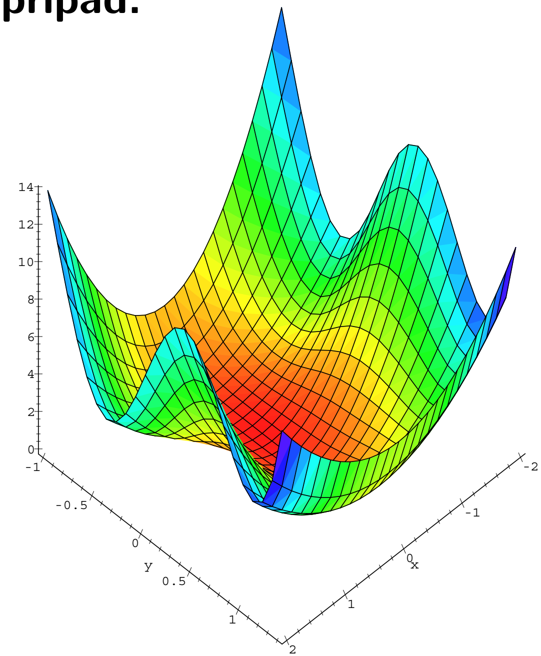
První případ.



$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u) \in \mathbb{R}.$$

První případ.



$$\boxed{\begin{array}{l} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ \inf\limits_{u \in \mathbb{R}^2} J(u) \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

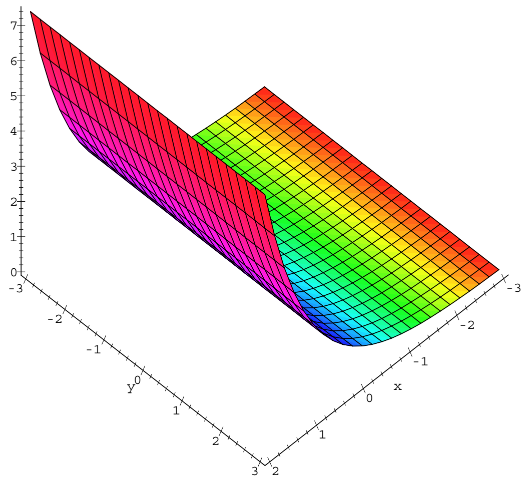
Nenechme se zmást obrázkem k tvrzení, že

$$c := \inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u)$$

je nutně kritickou hodnotou funkce J, tj. že existuje bod $u \in \mathbb{R}^2$ takový, že

$$J(u) = c, \quad J'(u) = 0.$$

Jako protipříklad dobře poslouží funkce $J(x, y) := e^x$.



Zřejmě

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} J(x, y) = 0 \in \mathbb{R},$$

ale protože pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, y) = e^x > 0,$$

neexistuje žádný kritický bod funkce J.

$J \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$c := \inf_{u \in \mathbb{R}} J(u) \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ existuje posloupnost $(u_n) \subset \mathbb{R}$ taková, že

$J(u_n) \to c,$

$J'(u_n) \to 0$

Dk. Z definice infima plyne, že existuje posloupnost $(\tilde{u}_n)$ taková, že $c \le J(\tilde{u}_n) \le c + \frac{1}{n}$ (pro $\forall n \in \mathbb{N}$).

Pokud (pro $n \in \mathbb{N}$) je $|J'(\tilde{u}_n)| \le \frac{1}{n}$, volme $u_n := \tilde{u}_n$.

Dk. Z definice infima plyne, že existuje posloupnost $(\tilde{u}_n)$ taková, že $c \le J(\tilde{u}_n) \le c + \frac{1}{n}$ (pro $\forall n \in \mathbb{N}$).

Pokud (pro $n \in \mathbb{N}$) je $|J'(\tilde{u}_n)| \le \frac{1}{n}$, volme $u_n := \tilde{u}_n$.

Je-li $|J'(\tilde{u}_n)| > \frac{1}{n}$, je $J'(\tilde{u}_n) > \frac{1}{n}$ nebo $J'(\tilde{u}_n) < -\frac{1}{n}$.

Předpokládejme (BÚNO), že $J'(\tilde{u}_n) > \frac{1}{n}$.

Dk. Z definice infima plyne, že existuje posloupnost $(\tilde{u}_n)$ taková, že $c \le J(\tilde{u}_n) \le c + \frac{1}{n}$ (pro $\forall n \in \mathbb{N}$).

Pokud (pro $n \in \mathbb{N}$) je $|J'(\tilde{u}_n)| \le \frac{1}{n}$, volme $u_n := \tilde{u}_n$.

Je-li $|J'(\tilde{u}_n)| > \frac{1}{n}$, je $J'(\tilde{u}_n) > \frac{1}{n}$ nebo $J'(\tilde{u}_n) < -\frac{1}{n}$.

Předpokládejme (BÚNO), že $J'(\tilde{u}_n) > \frac{1}{n}$.

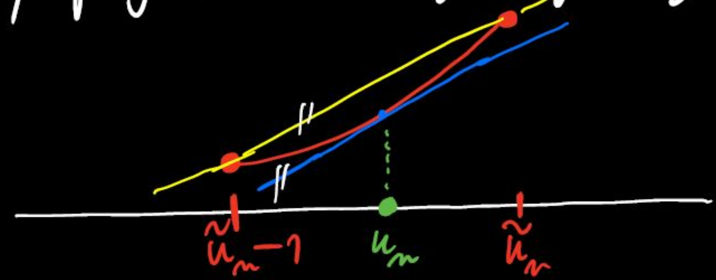
Označme $a := \inf \underbrace{\{ b \in \mathbb{R} : J \text{ roste na intervalu } (b, \tilde{u}_n) \}}_{\neq \emptyset\,!}$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$, volme $u_n := a$.

Pak zřejmě $c \le J(u_n) < J(\tilde{u}_n) \le c + \frac{1}{n}$,

$J'(u_n) = 0$

Je-li $a = -\infty$, plyne z Lagrangeovy věty, že



existuje $u_n \in (\tilde{u}_n - 1, \tilde{u}_n)$ takové, že

$$0 \le J'(u_n) = \frac{J(\tilde{u}_n) - J(\tilde{u}_n - 1)}{1} \le \frac{c + \frac{1}{n} - c}{1} = \frac{1}{n}$$

$$c \le J(u_n) < J(\tilde{u}_n) \le c + \frac{1}{n}$$

$\Longrightarrow$ $\blacksquare$

Nicméně, dá se dokázat (pomocí tzv. *deformačního lemmatu*), že i za situace

$$\boxed{\begin{aligned} &J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ &\inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u) \in \mathbb{R}, \end{aligned}}$$

existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$J(u_n) \to c := \inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u),$$

$$J'(u_n) \to 0.$$

Nicméně, dá se dokázat (pomocí tzv. *deformačního lemmatu*), že i za situace

$$\boxed{\begin{aligned} &J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ &\inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u) \in \mathbb{R}, \end{aligned}}$$

existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$J(u_n) \to c := \inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u),$$

$$J'(u_n) \to 0.$$

Pokud bychom věděli, že z takovéto posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní, bylo by zřejmě c kritickou hodnotou J.

$$\Big(u_{k_n} \to u \in \mathbb{R}^2,\ J(u_{k_n}) \to c,\ J'(u_{k_n}) \to 0 \implies J(u) = c,\ J'(u) = 0.\Big)$$

Nicméně, dá se dokázat (pomocí tzv. *deformačního lemmatu*), že i za situace

$$\boxed{\begin{aligned} &J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ &\inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u) \in \mathbb{R}, \end{aligned}}$$

existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$J(u_n) \to c := \inf_{u \in \mathbb{R}^2} J(u),$$

$$J'(u_n) \to 0.$$

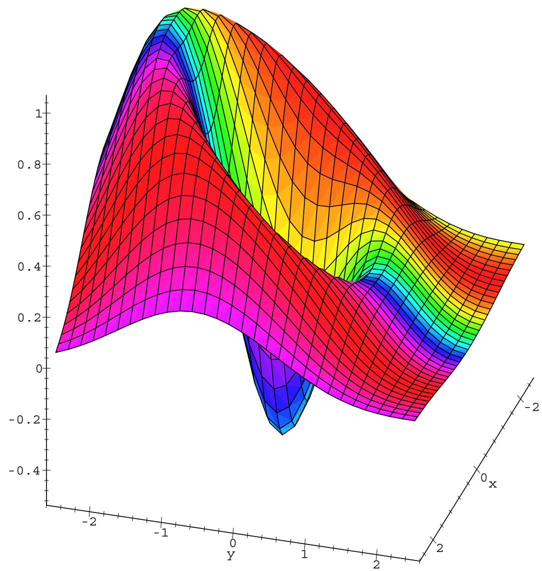
Pokud bychom věděli, že z takovéto posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní, bylo by zřejmě c kritickou hodnotou J.

$$\Big(u_{k_n} \to u \in \mathbb{R}^2,\ J(u_{k_n}) \to c,\ J'(u_{k_n}) \to 0 \implies J(u) = c,\ J'(u) = 0. \Big)$$

Toho lze docílit například přidáním předpokladu:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2 \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 \end{array}\right\} \implies (u_n) \text{ je omezená posloupnost.}}$$

Druhý případ.

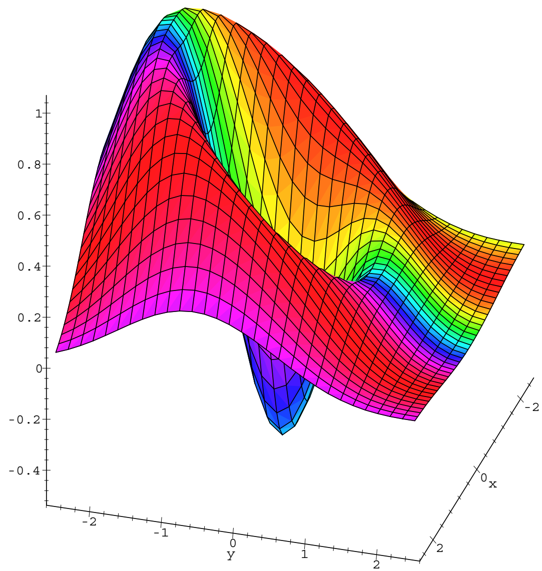


$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$r \in \mathbb{R}^+, \ \ e \in \mathbb{R}^2,$$

$$\|e\|_{\mathbb{R}^2} > r, \quad \inf_{\|u\|_{\mathbb{R}^2} = r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

Druhý případ.



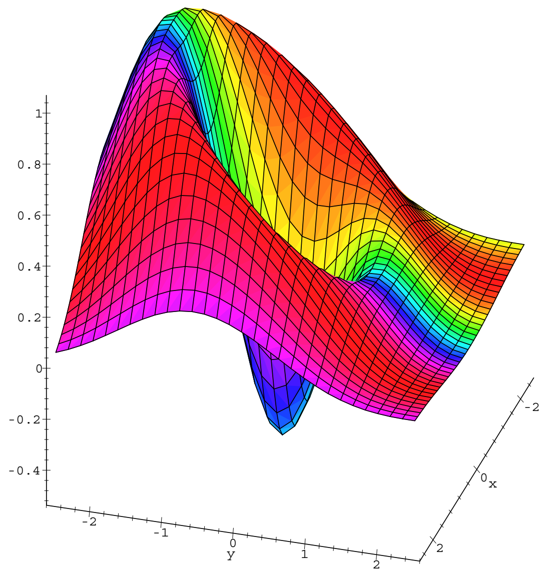
$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$r \in \mathbb{R}^+, \;\; e \in \mathbb{R}^2,$$

$$\|e\|_{\mathbb{R}^2} > r, \quad \inf_{\|u\|_{\mathbb{R}^2}=r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

Nabízí se takováto myšlenka: uvažujme všechny křivky ležící na grafu funkce J a jdoucí z bodu $(0, J(0))$ do bodu $(e, J(e))$; na každé z těchto křivek vezměme *nejvyšší* bod. Zdá se, že *nejnižší* z takto vybraných bodů odpovídá stacionárnímu bodu funkce J.

Druhý případ.



$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$r \in \mathbb{R}^+, \quad e \in \mathbb{R}^2,$$

$$\|e\|_{\mathbb{R}^2} > r, \quad \inf_{\|u\|_{\mathbb{R}^2} = r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

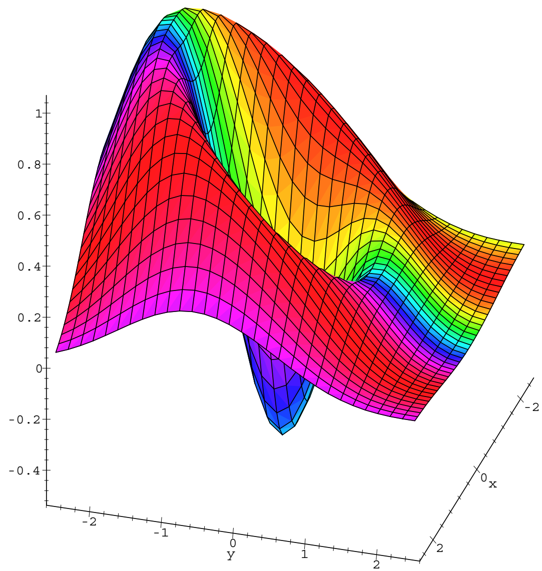
Řekněme to přesněji: obrázek svádí k domněnce, že

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma(t)),$$

$$\text{kde } \Gamma := \{\gamma \in C(\langle 0,1 \rangle, \mathbb{R}^2) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = e\},$$

je kritickou hodnotou J.

Druhý případ.



$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$r \in \mathbb{R}^+, \ \ e \in \mathbb{R}^2,$$

$$\|e\|_{\mathbb{R}^2} > r, \quad \inf_{\|u\|_{\mathbb{R}^2}=r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

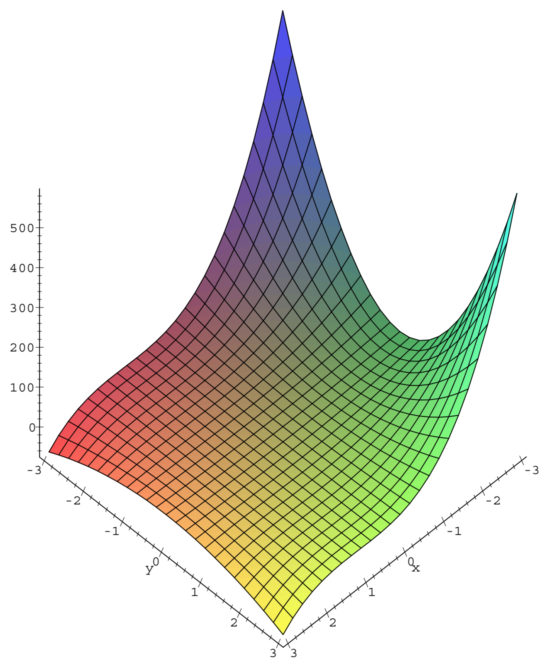
Řekněme to přesněji: obrázek svádí k domněnce, že

$$c \ = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma(t)),$$

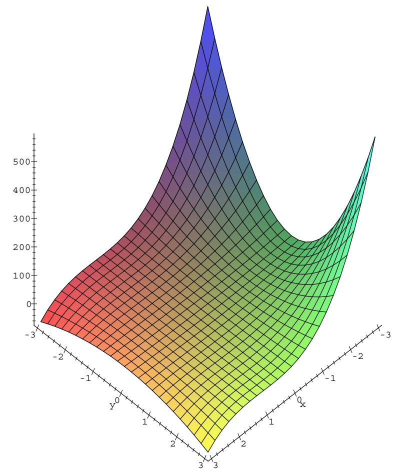
$$\text{kde } \Gamma := \{\gamma \in C(\langle 0,1\rangle, \mathbb{R}^2) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = e\},$$

je kritickou hodnotou J. **Nemusí to být pravda!**

Hezký protipříklad – $J(x, y) := x^2 + (1 - x)^3 y^2$ – nalezli Brézis s Nirenbergem.



Hezký protipříklad – $J(x,y) := x^2 + (1-x)^3 y^2$ – nalezli Brézis s Nirenbergem.



Volme

$$r = \frac{1}{2}, \;\; e = (2,2).$$

Pak zřejmě

$$J(0) = 0 = J(e),$$

$$\inf_{\|(x,y)\|=r} J(x,y) = \min_{\|(x,y)\|=r} J(x,y) > 0.$$

Na druhou stranu snadno spočteme, že

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = 2x - 3(1-x)^2 y^2,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y}(x,y) = 2(1-x)^3 y,$$

a proto bod 0 je jediným stacionárním bodem J, přičemž $J(0) < c$; c není kritickou hodnotou J.

Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

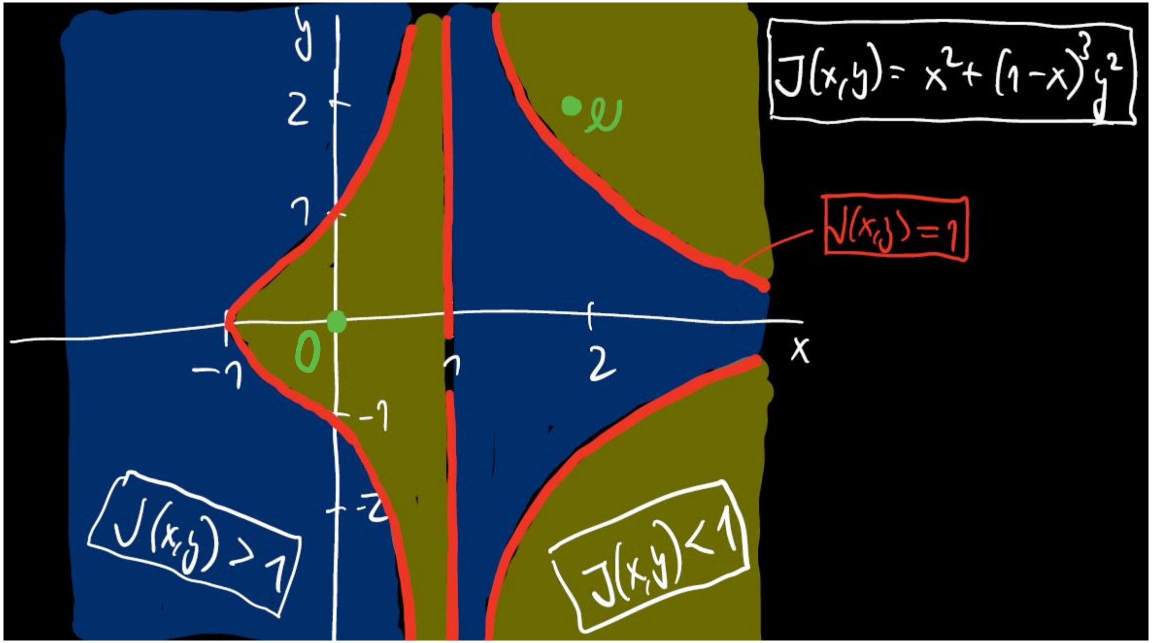
$$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma_n(t)) = J(u_n) \to c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma(t)),$$

je $\|u_n\| \to \infty$.

Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

$$\max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma_n(t)) = J(u_n) \to c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma(t)),$$

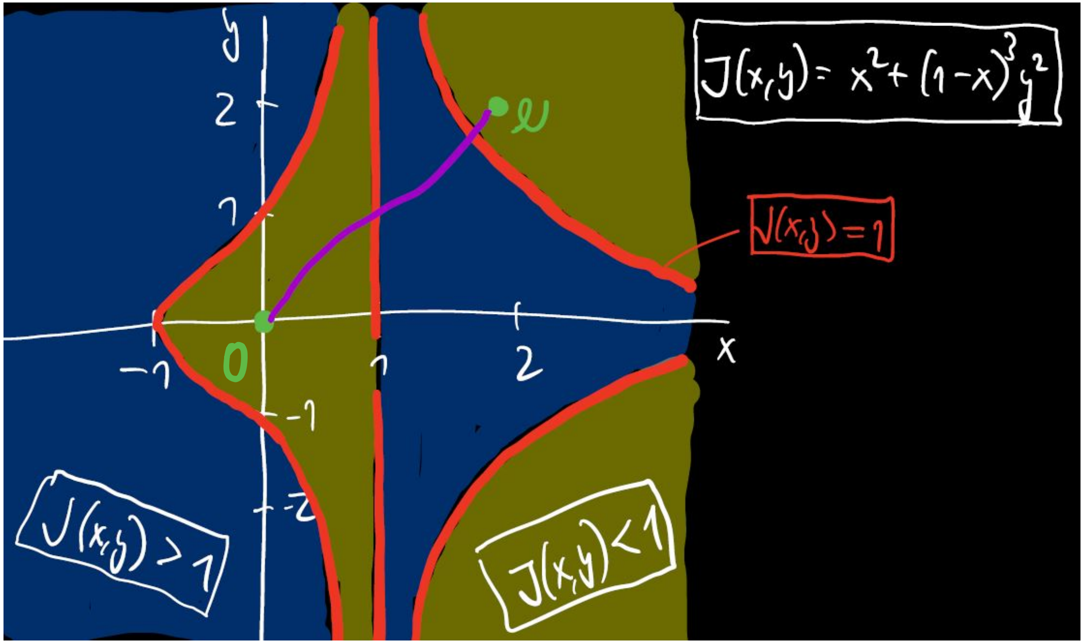
je $\|u_n\| \to \infty$.



Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

$$\max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma_n(t)) = J(u_n) \to c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma(t)),$$

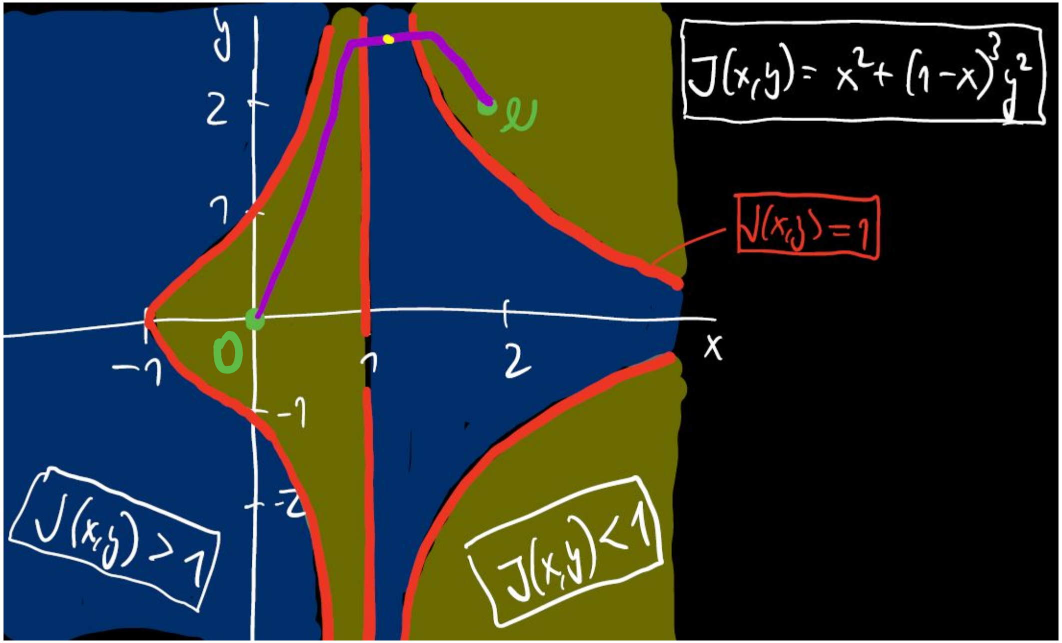
je $\|u_n\| \to \infty$.



Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

$$\max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma_n(t)) = J(u_n) \to c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma(t)),$$

je $\|u_n\| \to \infty$.



Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

$$\max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma_n(t)) = J(u_n) \to c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma(t)),$$

je $\|u_n\| \to \infty$. Dá se však ukázat, že i za situace

$$\boxed{\begin{gathered} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ r \in \mathbb{R}^+,\ e \in \mathbb{R}^2,\ \|e\|_{\mathbb{R}^2} > r,\ \inf_{\|u\|_{\mathbb{R}^2}=r} J(u) > J(0) \geq J(e), \end{gathered}}$$

existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$J(u_n) \to c \text{ a že } J'(u_n) \to 0.$$

Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

$$\max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma_n(t)) = J(u_n) \to c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in\langle 0,1\rangle} J(\gamma(t)),$$

je $\|u_n\| \to \infty$. Dá se však ukázat, že i za situace

$$\boxed{\begin{gathered} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ r \in \mathbb{R}^+,\ \ e \in \mathbb{R}^2,\ \ \|e\|_{\mathbb{R}^2} > r,\ \ \inf_{\|u\|_{\mathbb{R}^2}=r} J(u) > J(0) \geq J(e), \end{gathered}}$$

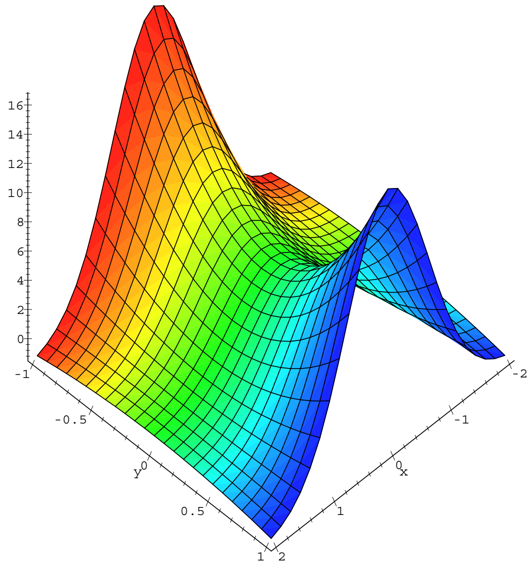
existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$J(u_n) \to c \text{ a že } J'(u_n) \to 0.$$

I zde lze tedy situaci zachránit, budeme-li navíc předpokládat i

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2 \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 \end{array}\right\} \implies (u_n) \text{ je omezená posloupnost.}}$$

Třetí případ.

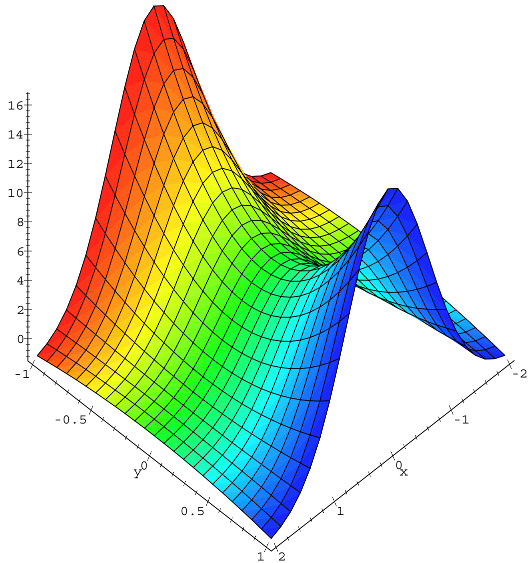


$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$\varrho \in \mathbb{R}^+,$$

$$\inf_{u \in \{(0,y):\ y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u).$$

Třetí případ.



$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$\varrho \in \mathbb{R}^+,$$

$$\inf_{u \in \{(0,y):\ y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u).$$

Opět: **obrázek zrádně napovídá**, že

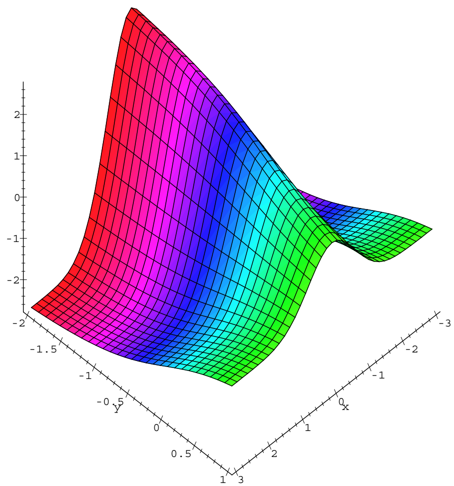
$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle -\varrho, \varrho \rangle} J(\gamma(t)),$$

$$\text{kde} \quad \Gamma = \{\gamma \in C(\langle -\varrho, \varrho \rangle, \mathbb{R}^2) : \ \gamma(-\varrho) = (-\varrho, 0),\ \gamma(\varrho) = (\varrho, 0)\},$$

je kritickou hodnotou funkce J.

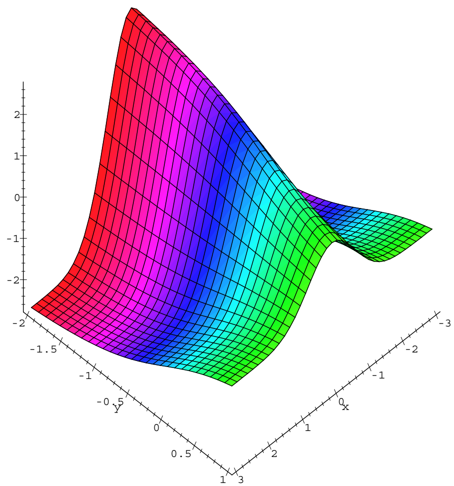
Opět ukážeme, že tomu tak nemusí být. Stačí uvažovat funkci

$$J(x,y) := \left(2\mathrm{e}^{-x^2} - 1\right) \operatorname{arccotg} y.$$



Opět ukážeme, že tomu tak nemusí být. Stačí uvažovat funkci

$$J(x,y) := \left(2\mathrm{e}^{-x^2} - 1\right) \operatorname{arccotg} y\,.$$



Je snadným cvičením ukázat, že pro tuto funkci platí

$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$\exists \varrho \in \mathbb{R}^+ : \inf_{u \in \{(0,y):\ y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u)$$

a že neexistuje žádný stacionární bod funkce J.

Příčinou nezdaru je totéž, co u předchozího příkladu, a opět: předpokládáme-li kromě

$$\boxed{\begin{gathered} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ \varrho \in \mathbb{R}^+, \quad \inf_{u \in \{(0,y):\ y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u) \end{gathered}}$$

Příčinou nezdaru je totéž, co u předchozího příkladu, a opět: předpokládáme-li kromě

$$\boxed{\begin{gathered} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ \varrho \in \mathbb{R}^+, \quad \inf_{u \in \{(0,y):\ y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u) \end{gathered}}$$

i splnění podmínky

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2 \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 \end{array}\right\} \implies (u_n) \text{ je omezená posloupnost,}}$$

Příčinou nezdaru je totéž, co u předchozího příkladu, a opět: předpokládáme-li kromě

$$\boxed{\begin{gathered} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ \varrho \in \mathbb{R}^+, \quad \inf_{u \in \{(0,y):\ y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u) \end{gathered}}$$

i splnění podmínky

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2 \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 \end{array}\right\} \implies (u_n) \text{ je omezená posloupnost,}}$$

je číslo

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle -\varrho, \varrho \rangle} J(\gamma(t)),$$

$$\text{kde} \quad \Gamma = \{\gamma \in C(\langle -\varrho, \varrho \rangle, \mathbb{R}^2) : \ \gamma(-\varrho) = (-\varrho, 0), \ \gamma(\varrho) = (\varrho, 0)\},$$

kritickou hodnotou J.

Nyní se budeme zabývat zobecněním dříve uvedených úvah pro funkcionály

$$J \in C^1(X, \mathbb{R}),$$

kde X je (reálný) Banachův prostor. V každém z dříve uvedených případů se ukázal jako podstatný předpoklad

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2 \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 \end{array}\right\} \implies (u_n) \text{ je omezená posloupnost.}}$$

Nyní se budeme zabývat zobecněním dříve uvedených úvah pro funkcionály

$$J \in C^1(X, \mathbb{R}),$$

kde X je (reálný) Banachův prostor. V každém z dříve uvedených případů se ukázal jako podstatný předpoklad

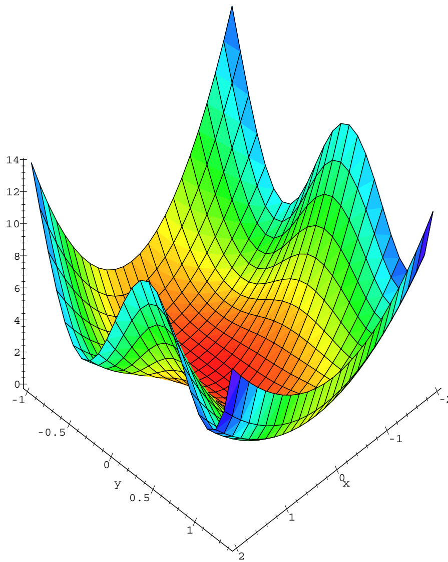
$$\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2 \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 \end{array}\right\} \implies (u_n) \text{ je omezená posloupnost.}$$

Tento předpoklad jsme kombinovali se známou skutečností, že v normovaných prostorech **konečné dimenze** (a tím prostor $\mathbb{R}^2$ je) platí, že z každé omezené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní. Tato vlastnost ovšem neplatí v **žádném** normovaném prostoru **nekonečné dimenze**. Musíme proto, chceme-li uvažovat prostory i nekonečné dimenze, ve svých předpokladech „přitvrdit“.

Definice.

Řekneme, že funkcionál $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, kde X je Banachův prostor, splňuje Palaisovu – Smaleovu podmínku (zkráceně (*PS*) *podmínku*), platí-li implikace

$$\boxed{\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } X \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 \text{ v } X^* \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{z posloupnosti } (u_n) \\ \text{lze vybrat posloupnost} \\ \text{konvergentní (v } X\text{).} \end{array}}}$$



Věta („Ekeland variational principle“; Ekeland, 1974).

Nechť X je Banachův prostor a nechť funkcionál $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ je na X omezený zdola a splňuje (PS) podmínku.

Pak existuje

$$\min_{u \in X} J(u).$$

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť $f \in L^2(\Omega)$.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ právě jedno slabé řešení.

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť $f \in L^2(\Omega)$.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ právě jedno slabé řešení.

Důkaz

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť $f \in L^2(\Omega)$.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ právě jedno slabé řešení.

Důkaz, ale až moc stručný.

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť $f \in L^2(\Omega)$.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ právě jedno slabé řešení.

Důkaz, ale až moc stručný.

Uvažujme Sobolevův prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ s normou $\|u\| := \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}$.

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť $f \in L^2(\Omega)$.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ právě jedno slabé řešení.

Důkaz, ale až moc stručný.

Uvažujme Sobolevův prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ s normou $\|u\| := \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}$.

Je známo, že slabá řešení naší úlohy odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J \in C^1\big(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\big), \quad J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fu \,\mathrm{d}x$$

s derivací

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x.$$

Nejdříve si ukážeme, že je splněn „geometrický předpoklad“ Ekelandova variačního principu, tj. že funkcionál J je omezený zdola.

Nejdříve si ukážeme, že je splněn „geometrický předpoklad“ Ekelandova variačního principu, tj. že funkcionál J je omezený zdola.

K tomu nám dobře poslouží a stačí odhady (využíváme Hölderovu nerovnost a vnoření $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$):

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fu \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Nejdříve si ukážeme, že je splněn „geometrický předpoklad“ Ekelandova variačního principu, tj. že funkcionál J je omezený zdola.

K tomu nám dobře poslouží a stačí odhady (využíváme Hölderovu nerovnost a vnoření $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$):

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega fu \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\|$$

Nejdříve si ukážeme, že je splněn „geometrický předpoklad“ Ekelandova variačního principu, tj. že funkcionál J je omezený zdola.

K tomu nám dobře poslouží a stačí odhady (využíváme Hölderovu nerovnost a vnoření $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$):

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fu \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\,\|u\| \geq \min_{t\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}t^2 - \underbrace{\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\right)}_{\in\mathbb{R}}\, t\right] \in \mathbb{R}.$$

Nejdříve si ukážeme, že je splněn „geometrický předpoklad“ Ekelandova variačního principu, tj. že funkcionál J je omezený zdola.

K tomu nám dobře poslouží a stačí odhady (využíváme Hölderovu nerovnost a vnoření $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$):

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \, c \, \|u\| \geq \min_{t \in \mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} t^2 - \underbrace{\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} \, c\right)}_{\in \mathbb{R}} t\right] \in \mathbb{R}.$$

K dokončení důkazu, že existuje řešení naší úlohy, stačí ukázat, že funkcionál J splňuje (PS) podmínku.

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{array}{c} (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*. \end{array}}$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered} (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*. \end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní.

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\|$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\,\|u\| \;\to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{array}{c}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{array}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\| \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená.

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\| \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilberův, existují $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) tak, že $u_n \rightharpoonup u$.

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\| \ \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilberův, existují $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) tak, že $u_n \rightharpoonup u$. Navíc, protože $J'(u_n) \to 0$, platí

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega f(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} \to 0,$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\| \ \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilberův, existují $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) tak, že $u_n \rightharpoonup u$. Navíc, protože $J'(u_n) \to 0$, platí

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, \mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega f(u_n - u)\, \mathrm{d}x}_{\to 0} \to 0,$$

$$0 \leftarrow \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, \mathrm{d}x$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\| \ \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilberův, existují $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) tak, že $u_n \rightharpoonup u$. Navíc, protože $J'(u_n) \to 0$, platí

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega f(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} \to 0,$$

$$0 \leftarrow \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0}$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\,\|u\| \ \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilberův, existují $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) tak, že $u_n \rightharpoonup u$. Navíc, protože $J'(u_n) \to 0$, platí

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega f(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} \to 0,$$

$$0 \leftarrow \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} = \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2\,\mathrm{d}x$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\| \ \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilberův, existují $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) tak, že $u_n \rightharpoonup u$. Navíc, protože $J'(u_n) \to 0$, platí

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega f(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} \to 0,$$

$$0 \leftarrow \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} = \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2\,\mathrm{d}x = \|u_n - u\|^2,$$

Buď dána posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\boxed{\begin{gathered}(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.\end{gathered}}$$

Máme dokázat, že z (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní. Z dříve získaného odhadu

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|u\| \ \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty$$

vyplývá, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilberův, existují $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) tak, že $u_n \rightharpoonup u$. Navíc, protože $J'(u_n) \to 0$, platí

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega f(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} \to 0,$$

$$0 \leftarrow \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} = \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2\,\mathrm{d}x = \|u_n - u\|^2,$$

a proto $u_n \to u$.

Dokázali jsme, že naše úloha má alespoň jedno řešení (v němž má funkcionál J minimum).

Dokázali jsme, že naše úloha má alespoň jedno řešení (v němž má funkcionál J minimum). Zbývá dokázat jednoznačnost.

Dokázali jsme, že naše úloha má alespoň jedno řešení (v němž má funkcionál J minimum). Zbývá dokázat jednoznačnost. To je ale velmi snadné, protože jsou-li u_1 a u_2 slabá řešení dané úlohy, tzn. že

$$u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega), \; J'(u_1) = J'(u_2) = 0,$$

Dokázali jsme, že naše úloha má alespoň jedno řešení (v němž má funkcionál J minimum). Zbývá dokázat jednoznačnost. To je ale velmi snadné, protože jsou-li u_1 a u_2 slabá řešení dané úlohy, tzn. že

$$u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega), \; J'(u_1) = J'(u_2) = 0,$$

je

$$\|u_1 - u_2\|^2$$

Dokázali jsme, že naše úloha má alespoň jedno řešení (v němž má funkcionál J minimum). Zbývá dokázat jednoznačnost. To je ale velmi snadné, protože jsou-li u_1 a u_2 slabá řešení dané úlohy, tzn. že

$$u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega), \;\; J'(u_1) = J'(u_2) = 0,$$

je

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x$$

Dokázali jsme, že naše úloha má alespoň jedno řešení (v němž má funkcionál J minimum). Zbývá dokázat jednoznačnost. To je ale velmi snadné, protože jsou-li u_1 a u_2 slabá řešení dané úlohy, tzn. že

$$u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \ J'(u_1) = J'(u_2) = 0,$$

je

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega f(u_1 - u_2)\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u_1 - u_2)\mathrm{d}x$$

Dokázali jsme, že naše úloha má alespoň jedno řešení (v němž má funkcionál J minimum). Zbývá dokázat jednoznačnost. To je ale velmi snadné, protože jsou-li u_1 a u_2 slabá řešení dané úlohy, tzn. že

$$u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \ J'(u_1) = J'(u_2) = 0,$$

je

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x =$$

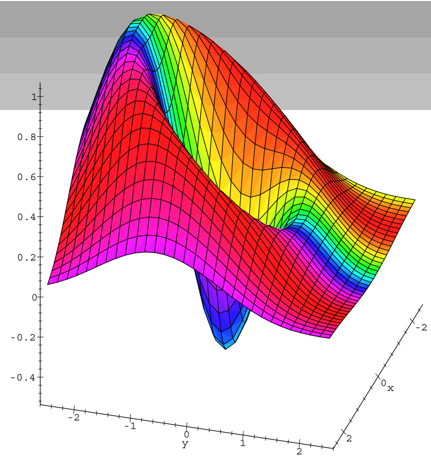
$$= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega f(u_1 - u_2)\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u_1 - u_2)\mathrm{d}x = 0,$$

a proto

$$u_1 = u_2.$$

■



Věta („Mountain pass theorem“; Ambrosetti, Rabinowitz, 1973).

Nechť

- $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, kde X je Banachův prostor,
- $r \in \mathbb{R}^+$, $e \in X$, $\|e\| > r$; $\inf\limits_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geq J(e)$,
- J splňuje (PS) podmínku.

Potom

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma(t)),$$

$$\text{kde } \Gamma := \{\gamma \in C(\langle 0,1 \rangle, X) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = e\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J.

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \leq 3$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ alespoň dvě netriviální slabá řešení.

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \leq 3$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{v } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ alespoň dvě netriviální slabá řešení.

Začátek důkazu.

Tentokrát slabá řešení naší úlohy odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J \in C^1\big(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\big), \quad J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 \,\mathrm{d}x$$

s derivací

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u^3 v \,\mathrm{d}x.$$

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \leq 3$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí.

Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{v } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ alespoň dvě netriviální slabá řešení.

Začátek důkazu.
Tentokrát slabá řešení naší úlohy odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J \in C^1\big(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\big), \quad J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int_\Omega u^4 \, \mathrm{d}x$$

s derivací

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u^3 v \, \mathrm{d}x.$$

(Zřejmě $u = 0$ je slabým řešením.

Věta.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \leq 3$, je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí.
Potom Dirichletova úloha

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ alespoň dvě netriviální slabá řešení.

Začátek důkazu.
Tentokrát slabá řešení naší úlohy odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J \in C^1\big(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\big), \quad J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 \, \mathrm{d}x$$

s derivací

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u^3 v \, \mathrm{d}x.$$

(Zřejmě $u = 0$ je slabým řešením.
Navíc, je-li u slabým řešením, je slabým řešením i funkce $-u$.)

Ukážeme si pouze to, že jsou splněny „geometrické předpoklady“ „Mountain pass theorem“, tj. že

$$(\exists r \in \mathbb{R}^+)(\exists e \in X): \quad \|e\| > r \;\wedge\; \inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

Ukážeme si pouze to, že jsou splněny „geometrické předpoklady“ „Mountain pass theorem“, tj. že

$$(\exists r \in \mathbb{R}^+)(\exists e \in X): \quad \|e\| > r \ \wedge \ \inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

Z vnoření $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^4(\Omega)$ snadno plyne, že existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\,c\,\|u\|^4$$

Ukážeme si pouze to, že jsou splněny „geometrické předpoklady“ „Mountain pass theorem“, tj. že

$$(\exists r \in \mathbb{R}^+)(\exists e \in X): \quad \|e\| > r \ \wedge \ \inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

Z vnoření $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^4(\Omega)$ snadno plyne, že existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}c\,\|u\|^4 = \|u\|^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}c\,\|u\|^2\Big).$$

Ukážeme si pouze to, že jsou splněny „geometrické předpoklady“ „Mountain pass theorem“, tj. že

$$(\exists r \in \mathbb{R}^+)(\exists e \in X): \quad \|e\| > r \ \wedge \ \inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geq J(e) .$$

Z vnoření $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^4(\Omega)$ snadno plyne, že existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{4} \int_\Omega u^4 \, dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4} c \, \|u\|^4 = \|u\|^2 \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} c \, \|u\|^2\Big).$$

Odtud plyne, že pro $r = \frac{1}{\sqrt{c}} \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\inf_{\|u\|=r} J(u) \geq r^2 \, \frac{1}{4} > J(0) = 0.$$

Nyní vezměme libovolné

$$0 \not\equiv u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ a } t \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$J(tu) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tu)|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega (tu)^4 \,\mathrm{d}x$$

Nyní vezměme libovolné

$$0 \not\equiv u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ a } t \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$J(tu) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tu)|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega (tu)^4 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 \int_0^\pi |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}t^4 \int_\Omega u^4 \,\mathrm{d}x$$

Nyní vezměme libovolné

$$0 \not\equiv u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ a } t \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$J(tu) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tu)|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega (tu)^4 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 \int_0^\pi |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}t^4 \int_\Omega u^4 \,\mathrm{d}x \to -\infty \text{ pro } t \to +\infty,$$

Nyní vezměme libovolné

$$0 \not\equiv u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ a } t \in \mathbb{R}.$$

Potom

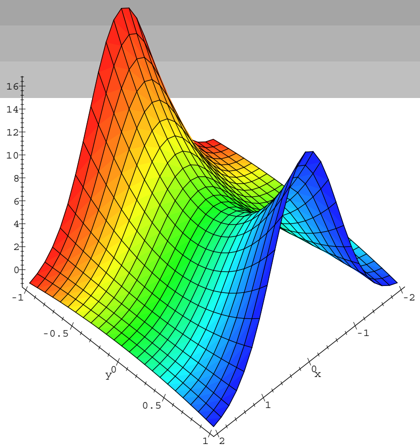
$$J(tu) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(tu)|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int_\Omega (tu)^4 \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \int_0^\pi |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4} t^4 \int_\Omega u^4 \, \mathrm{d}x \to -\infty \text{ pro } t \to +\infty,$$

a proto existuje $e = tu \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takové, že

$$\|e\| > r, \quad J(e) \leq 0 = J(0).$$

■



Věta („Saddle point theorem“; Rabinowitz, 1978).

Nechť

- $X = Y \oplus Z$ je Banachův prostor, $\dim Y < \infty$,
- $\varrho \in \mathbb{R}^+$, $M = \{u \in Y : \|u\|_X \leq \varrho\}$, $N = \{u \in Y : \|u\|_X = \varrho\}$,
- $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, $\inf\limits_{u \in Z} J(u) > \max\limits_{u \in N} J(u)$, J splňuje (PS) podmínku.

Potom

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} J(\gamma(u)),$$

$$\text{kde} \quad \Gamma := \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_N = \text{id}\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J.

Věta.

Existuje alespoň jedno slabé řešení Dirichletovy úlohy

$$\begin{cases} -u'' = u + \operatorname{arctg}(u+1) \text{ v } (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Věta.

Existuje alespoň jedno slabé řešení Dirichletovy úlohy

$$\begin{cases} -u'' = u + \operatorname{arctg}(u+1) \text{ v } (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Návod k důkazu. Slabá řešení dané úlohy odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J: \; W_0^{1,2}(0,\pi) \to \mathbb{R},$$

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_0^\pi (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi (u(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \left(\int_0^{u(x)} \operatorname{arctg}(s+1)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x.$$

Věta.

Existuje alespoň jedno slabé řešení Dirichletovy úlohy

$$\begin{cases} -u'' = u + \operatorname{arctg}(u+1) \text{ v } (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Návod k důkazu. Slabá řešení dané úlohy odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J: \ W_0^{1,2}(0,\pi) \to \mathbb{R},$$

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_0^\pi (u'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi (u(x))^2\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \left(\int_0^{u(x)} \operatorname{arctg}(s+1)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.$$

Uvažujme direktní součet

$$W_0^{1,2}(0,\pi) = Y \oplus Z,$$

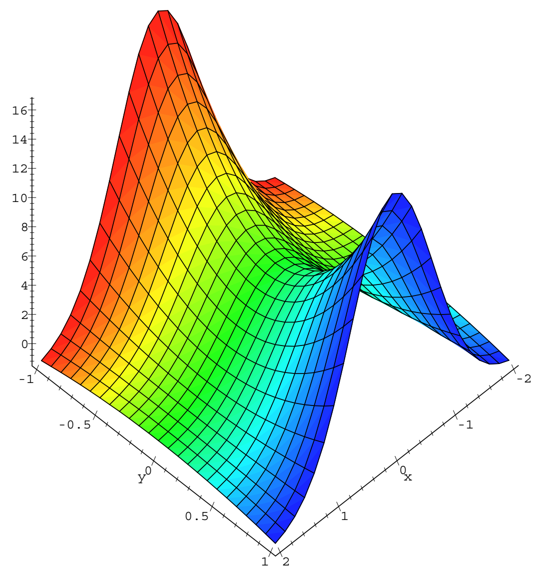
kde

$$Y = \{c\sin x: \ c\in\mathbb{R}\},$$

$$Z = \{u \in W_0^{1,2}(0,\pi): \ \int_0^\pi u(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0\}.$$

A „Saddle point theorem“ zaručuje, že stačí dokázat tato tři tvrzení:

- $J(a \sin x) \to -\infty$ pro $a \to +\infty$ i pro $a \to -\infty$,
- funkcionál J je omezený zdola na podprostoru Z,
- funkcionál J splňuje (PS) podmínku.



Literatura a zdroje

J. Bouchala
Přechodem hory k řešení okrajové úlohy
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 1, 2001, str. 43 – 51

M. Bailová a J. Bouchala
A mountain pass algorithm for quasilinear boundary value problem with p-Laplacian
Mathematics and Computers in Simulation, 2021

H. Brézis a L. Nirenberg
Remarks on finding critical points
Communications on Pure and Applied Mathematics 64, 1991, str. 939–963

Literatura a zdroje

- J. Mawhin a M. Willem
  Critical point theory and Hamiltonian systems
  Appl. Math. Sci. 74, Springer, New–York, 1989
- P. H. Rabinowitz
  Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations
  American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986
- M. Struwe
  Variational methods
  A series of modern surveys in mathematics 34, Springer, Berlin, 2000
- M. Willem
  Minimax theorems
  Birkhauser, Boston, 1996

Literatura a zdroje

J. Mawhin a M. Willem
Critical point theory and Hamiltonian systems
Appl. Math. Sci. 74, Springer, New–York, 1989

P. H. Rabinowitz
Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations
American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986

M. Struwe
Variational methods
A series of modern surveys in mathematics 34, Springer, Berlin, 2000

M. Willem
Minimax theorems
Birkhauser, Boston, 1996

Děkuji vám za pozonrost!

Literatura a zdroje

J. Mawhin a M. Willem
Critical point theory and Hamiltonian systems
Appl. Math. Sci. 74, Springer, New–York, 1989

P. H. Rabinowitz
Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations
American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986

M. Struwe
Variational methods
A series of modern surveys in mathematics 34, Springer, Berlin, 2000

M. Willem
Minimax theorems
Birkhauser, Boston, 1996

Děkuji vám za pozornost!