

16.03.

2021

Množiny bodů nespojitosti reálných funkcí

Petr Vodstrčil

`petr.vodstrcil@vsb.cz`

VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A INFORMATIKY

KATEDRA
APLIKOVANÉ
MATEMATIKY

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ε - δ podmínka

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ $\iff$

$$\iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ε - δ podmínka

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ $\iff$

$$\iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definice

Pro každou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme množiny

$$S^f \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \in \mathbb{R} : f \text{ je spojitá v bodě } x_0\},$$

$$N^f \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \in \mathbb{R} : f \text{ není spojitá v bodě } x_0\}$$

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ε - δ podmínka

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ $\iff$

$$\iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definice

Pro každou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme množiny

$$S^f \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \in \mathbb{R} : f \text{ je spojitá v bodě } x_0\},$$

$$N^f \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \in \mathbb{R} : f \text{ není spojitá v bodě } x_0\} \quad (= \mathbb{R} \setminus S^f).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ε - δ podmínka

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ $\iff$

$$\iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definice

Pro každou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme množiny

$$S^f \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \in \mathbb{R} : f \text{ je spojitá v bodě } x_0\},$$

$$N^f \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \in \mathbb{R} : f \text{ není spojitá v bodě } x_0\} \quad (= \mathbb{R} \setminus S^f).$$

Jak může pro různé funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vypadat množina N^f ?

Úmluva

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Úmluva

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$

Úmluva

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$

Úmluva

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Úmluva

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$

Úmluva

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus K \end{cases} \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina})$

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus K \end{cases} \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}) \implies N^f = K,$

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus K \end{cases} \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}) \implies N^f = K,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = \mathbb{R} \setminus K \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}),$

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus K \end{cases} \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}) \implies N^f = K,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = \mathbb{R} \setminus K \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = I \quad (I \text{ je interval (otevřený, uzavřený, polouzavřený)}),$

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus K \end{cases} \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}) \implies N^f = K,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = \mathbb{R} \setminus K \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = I \quad (I \text{ je interval (otevřený, uzavřený, polouzavřený)}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = S \quad (S \subset \mathbb{R} \text{ je spočetná množina}),$

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus K \end{cases} \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}) \implies N^f = K,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = \mathbb{R} \setminus K \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = I \quad (I \text{ je interval (otevřený, uzavřený, polouzavřený)}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = S \quad (S \subset \mathbb{R} \text{ je spočetná množina}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = \mathbb{R} \setminus S \quad (S \subset \mathbb{R} \text{ je spočetná množina}),$

Abychom zde nemuseli řešit definiční obory funkcí, budeme od této chvíle uvažovat pouze funkce definované na $\mathbb{R}$.

Příklady funkcí a odpovídajících množin N^f

- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \implies N^f = \emptyset,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \implies N^f = \mathbb{R},$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus K \end{cases} \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}) \implies N^f = K,$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = \mathbb{R} \setminus K \quad (K \subset \mathbb{R} \text{ je konečná množina}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = I \quad (I \text{ je interval (otevřený, uzavřený, polouzavřený)}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = S \quad (S \subset \mathbb{R} \text{ je spočetná množina}),$
- $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ??? \implies N^f = \mathbb{R} \setminus S \quad (S \subset \mathbb{R} \text{ je spočetná množina}),$
- ...

Otevřené a uzavřené množiny – připomenutí

Definice

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, platí-li

$$(\forall x \in M) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : (x - \delta, x + \delta) \subset M.$$

Definice

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, platí-li

$$(\forall x \in M) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : (x - \delta, x + \delta) \subset M.$$

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *uzavřená*, pokud je $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Otevřené a uzavřené množiny – připomenutí

Definice

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, platí-li
$$(\forall x \in M)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : (x - \delta, x + \delta) \subset M.$$
- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *uzavřená*, pokud je $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Pozorování

Je-li $M \subset \mathbb{R}$ uzavřená množina a $x \in \mathbb{R} \setminus M$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap M = \emptyset.$$

Otevřené a uzavřené množiny – připomenutí

Definice

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, platí-li
$$(\forall x \in M) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : (x - \delta, x + \delta) \subset M.$$
- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *uzavřená*, pokud je $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Pozorování

Je-li $M \subset \mathbb{R}$ uzavřená množina a $x \in \mathbb{R} \setminus M$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap M = \emptyset.$$

Vlastnosti otevřených a uzavřených množin

- Sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Otevřené a uzavřené množiny – připomenutí

Definice

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, platí-li
$$(\forall x \in M) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : (x - \delta, x + \delta) \subset M.$$
- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *uzavřená*, pokud je $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Pozorování

Je-li $M \subset \mathbb{R}$ uzavřená množina a $x \in \mathbb{R} \setminus M$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap M = \emptyset.$$

Vlastnosti otevřených a uzavřených množin

- Sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Otevřené a uzavřené množiny – připomenutí

Definice

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, platí-li
$$(\forall x \in M) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : (x - \delta, x + \delta) \subset M.$$
- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *uzavřená*, pokud je $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Pozorování

Je-li $M \subset \mathbb{R}$ uzavřená množina a $x \in \mathbb{R} \setminus M$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap M = \emptyset.$$

Vlastnosti otevřených a uzavřených množin

- Sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Otevřené a uzavřené množiny – připomenutí

Definice

- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, platí-li
$$(\forall x \in M) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : (x - \delta, x + \delta) \subset M.$$
- Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *uzavřená*, pokud je $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Pozorování

Je-li $M \subset \mathbb{R}$ uzavřená množina a $x \in \mathbb{R} \setminus M$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap M = \emptyset.$$

Vlastnosti otevřených a uzavřených množin

- Sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.
- Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Spojitosť v bodě x_0 : $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Spojítost v bodě x_0 : $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Věta

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Spojitosť v bodě x_0 : $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Věta

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

Spojítost v bodě x_0 : $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Věta

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

Definice a pozorování

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Zavedeme-li množinu $M_n^f \subset \mathbb{R}$ podmínkou

$$x_0 \in M_n^f \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n},$$

Spojítost v bodě x_0 : $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Věta

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\iff$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

Definice a pozorování

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Zavedeme-li množinu $M_n^f \subset \mathbb{R}$ podmínkou

$$x_0 \in M_n^f \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n},$$

bude splněna rovnost

$$S^f = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^f.$$

$$M_n^f = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \left(\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \right) \left(\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \right) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} \right\}, \quad S^f = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^f$$

$$M_n^f = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} \right\}, \quad S^f = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^f$$

Věta

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina M_n^f otevřená.

$$M_n^f = \{x_0 \in \mathbb{R} : (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\}, \quad S^f = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^f$$

Věta

Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina M_n^f otevřená.

Věta (snadný důsledek předchozí věty)

Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pak S^f je množina typu G_δ (spočetný průnik otevřených množin),

$$M_n^f = \{x_0 \in \mathbb{R} : (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\}, \quad S^f = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^f$$

Věta

Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina M_n^f otevřená.

Věta (snadný důsledek předchozí věty)

Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pak S^f je množina typu G_δ (spočetný průnik otevřených množin), a tedy

$N^f = \mathbb{R} \setminus S^f$ je množina typu F_σ (spočetné sjednocení uzavřených množin).

$$M_n^f = \{x_0 \in \mathbb{R} : (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\}, \quad S^f = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^f$$

Věta

Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina M_n^f otevřená.

Věta (snadný důsledek předchozí věty)

Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pak S^f je množina typu G_δ (spočetný průnik otevřených množin), a tedy $N^f = \mathbb{R} \setminus S^f$ je množina typu F_σ (spočetné sjednocení uzavřených množin).

Velmi zajímavé je, že předchozí větu lze obrátit.

$$M_n^f = \{x_0 \in \mathbb{R} : (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\}, \quad S^f = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^f$$

Věta

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina M_n^f otevřená.

Věta (snadný důsledek předchozí věty)

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pak S^f je množina typu G_δ (spočetný průnik otevřených množin), a tedy $N^f = \mathbb{R} \setminus S^f$ je množina typu F_σ (spočetné sjednocení uzavřených množin).

Velmi zajímavé je, že předchozí větu lze obrátit.

Přesněji řečeno, platí následující věta.

Věta

Nechť $F \subset \mathbb{R}$ je množina typu F_σ . Pak existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na $\mathbb{R}$ taková, že $N^f = F$.

Důkaz.

Vzhledem k předpokladu lze množinu F psát ve tvaru

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

kde množiny F_n jsou uzavřené.

Důkaz.

Vzhledem k předpokladu lze množinu F psát ve tvaru

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

kde množiny F_n jsou uzavřené.

Pro každé $x \in F$ položme

$$n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min \{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$$

Důkaz.

Vzhledem k předpokladu lze množinu F psát ve tvaru

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

kde množiny F_n jsou uzavřené.

Pro každé $x \in F$ položíme

$$n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min \{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$$

a definujeme funkci f předpisem

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{n(x)} & \text{pro } x \in F \cap \mathbb{Q}, \\ -\frac{1}{n(x)} & \text{pro } x \in F \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus F. \end{cases}$$

Důkaz.

Vzhledem k předpokladu lze množinu F psát ve tvaru

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

kde množiny F_n jsou uzavřené.

Pro každé $x \in F$ položíme

$$n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min \{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$$

a definujeme funkci f předpisem

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{n(x)} & \text{pro } x \in F \cap \mathbb{Q}, \\ -\frac{1}{n(x)} & \text{pro } x \in F \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus F. \end{cases}$$

Není obtížné si rozmyslet, že pro funkci f platí $N^f = F$.



Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme množinu

$$F_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \dots \right\}$$

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme množinu (rozmyslete si, proč je uzavřená)

$$F_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \dots \right\}$$

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme množinu (rozmyslete si, proč je uzavřená)

$$F_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \dots \right\} \quad \Rightarrow \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{Q}.$$

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu (rozmyslete si, proč je uzavřená)

$$F_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \dots \right\} \implies F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{Q}.$$

Otázka

Jaká funkce vznikne, aplikujeme-li nyní výše uvedenou obecnou konstrukci?

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu (rozmyslete si, proč je uzavřená)

$$F_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \dots \right\} \implies F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{Q}.$$

Otázka

Jaká funkce vznikne, aplikujeme-li nyní výše uvedenou obecnou konstrukci?

Odpověď

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{k}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \text{nsd}(k, n) = 1), \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu (rozmyslete si, proč je uzavřená)

$$F_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \dots \right\} \implies F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{Q}.$$

Otázka

Jaká funkce vznikne, aplikujeme-li nyní výše uvedenou obecnou konstrukci?

Odpověď

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{k}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \text{nsd}(k, n) = 1), \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

f je tzv. Riemannova funkce. Pro tuto funkci platí $N^f = \mathbb{Q}$, což znamená, že je spojitá ve všech iracionálních bodech a nespojitá ve všech bodech racionálních.

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme množinu (rozmyslete si, proč je uzavřená)

$$F_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \dots \right\} \implies F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{Q}.$$

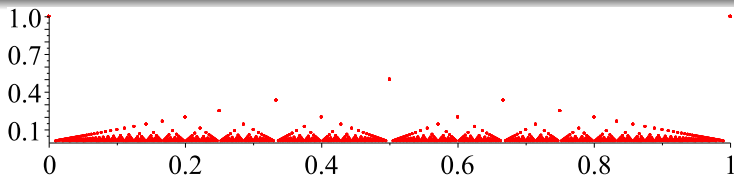
Otázka

Jaká funkce vznikne, aplikujeme-li nyní výše uvedenou obecnou konstrukci?

Odpověď

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{k}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \text{nsd}(k, n) = 1), \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

f je tzv. Riemannova funkce. Pro tuto funkci platí $N^f = \mathbb{Q}$, což znamená, že je spojitá ve všech iracionálních bodech a nespojitá ve všech bodech racionálních.



Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ ,

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , neboť

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , neboť

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Každá nejvýše spočetná množina $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ ,

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , neboť

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F.$$

Každá nejvýše spočetná množina $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , protože

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \quad (\text{jednoprvkové množiny jsou uzavřené}).$$

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , neboť

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Každá nejvýše spočetná množina $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , protože

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \quad (\text{jednoprvkové množiny jsou uzavřené}).$$

Každý interval (jakéhokoliv typu) je množina typu F_σ .

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , neboť

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Každá nejvýše spočetná množina $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , protože

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \quad (\text{jednoprvkové množiny jsou uzavřené}).$$

Každý interval (jakéhokoliv typu) je množina typu F_σ . Například

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a, b_n \rangle \quad (-\infty < a < b_n < b, \quad b_n \rightarrow b).$$

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , neboť

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Každá nejvýše spočetná množina $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , protože

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \quad (\text{jednoprvkové množiny jsou uzavřené}).$$

Každý interval (jakéhokoliv typu) je množina typu F_σ . Například

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a, b_n \rangle \quad (-\infty < a < b_n < b, \ b_n \rightarrow b).$$

Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ .

Které množiny (ne)jsou typu F_σ ?

Každá uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , neboť

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Každá nejvýše spočetná množina $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ , protože

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \quad (\text{jednoprvkové množiny jsou uzavřené}).$$

Každý interval (jakéhokoliv typu) je množina typu F_σ . Například

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a, b_n \rangle \quad (-\infty < a < b_n < b, \ b_n \rightarrow b).$$

Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ .

Umíme dát příklad množiny, která by nebyla typu F_σ ?

Věta

Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ není typu F_σ .

Věta

Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ není typu F_σ .

Důkaz.

Předpokládejme sporem, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a všechny množiny F_n jsou uzavřené.

Věta

Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ není typu F_σ .

Důkaz.

Předpokládejme sporem, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a všechny množiny F_n jsou uzavřené.

Protože je množina racionálních čísel spočetná, existuje (prostá) posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$.

Věta

Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ není typu F_σ .

Důkaz.

Předpokládejme sporem, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a všechny množiny F_n jsou uzavřené.

Protože je množina racionálních čísel spočetná, existuje (prostá) posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$.

Proto platí

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cup \{q_n\}).$$

Věta

Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ není typu F_σ .

Důkaz.

Předpokládejme sporem, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a všechny množiny F_n jsou uzavřené.

Protože je množina racionálních čísel spočetná, existuje (prostá) posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$.

Proto platí

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cup \{q_n\}).$$

Označíme-li (uzavřenou!) množinu $F_n \cup \{q_n\}$ jako $\tilde{F}_n$, dostaneme

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n.$$

Věta

Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ není typu F_σ .

Důkaz.

Předpokládejme sporem, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a všechny množiny F_n jsou uzavřené.

Protože je množina racionálních čísel spočetná, existuje (prostá) posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$.

Proto platí

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cup \{q_n\}).$$

Označíme-li (uzavřenou!) množinu $F_n \cup \{q_n\}$ jako $\tilde{F}_n$, dostaneme

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n.$$

Uvědomme si, že každá množina $\tilde{F}_n$ obsahuje právě jedno racionální číslo q_n .

Důkaz.

Nyní si rozmysleme, že existuje posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezených uzavřených intervalů takových, že

- $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ (intervaly jsou do sebe vnořené),

Důkaz.

Nyní si rozmysleme, že existuje posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezených uzavřených intervalů takových, že

- $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ (intervaly jsou do sebe vnořené),
- $(\forall n \in \mathbb{N}) : I_n \cap \tilde{F}_n = \emptyset$.

Důkaz.

Nyní si rozmysleme, že existuje posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezených uzavřených intervalů takových, že

- $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ (intervaly jsou do sebe vnořené),
- $(\forall n \in \mathbb{N}) : I_n \cap \tilde{F}_n = \emptyset$.

Ze základního kurzu analýzy víme, že existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Důkaz.

Nyní si rozmysleme, že existuje posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezených uzavřených intervalů takových, že

- $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ (intervaly jsou do sebe vnořené),
- $(\forall n \in \mathbb{N}) : I_n \cap \tilde{F}_n = \emptyset$.

Ze základního kurzu analýzy víme, že existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Protože $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_0 \in \tilde{F}_{n_0}$.

Důkaz.

Nyní si rozmysleme, že existuje posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezených uzavřených intervalů takových, že

- $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ (intervaly jsou do sebe vnořené),
- $(\forall n \in \mathbb{N}) : I_n \cap \tilde{F}_n = \emptyset$.

Ze základního kurzu analýzy víme, že existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Protože $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_0 \in \tilde{F}_{n_0}$.

Ale to je spor s podmínkou $I_{n_0} \cap \tilde{F}_{n_0} = \emptyset$.



Důkaz.

Nyní si rozmysleme, že existuje posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezených uzavřených intervalů takových, že

- $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ (intervaly jsou do sebe vnořené),
- $(\forall n \in \mathbb{N}) : I_n \cap \tilde{F}_n = \emptyset$.

Ze základního kurzu analýzy víme, že existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Protože $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_0 \in \tilde{F}_{n_0}$.

Ale to je spor s podmínkou $I_{n_0} \cap \tilde{F}_{n_0} = \emptyset$. □

Důsledek

Neexistuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která by byla ve všech racionálních bodech spojitá a ve všech iracionálních bodech nespojitá.

Najděte (existuje-li) funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$N^f = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ má ukončený desetinný rozvoj}\}.$$

Domácí úkol

Najděte (existuje-li) funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$N^f = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ má ukončený desetinný rozvoj}\}.$$

Taková funkce by např. v bodech $\frac{8}{3} = 2,66666\dots$ nebo $\pi = 3,14159\dots$ byla spojitá, zatímco např. v bodech $\frac{4}{5} = 0,8$ nebo $\frac{11}{8} = 1,375$ by spojitá nebyla.

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Důkaz.

Je-li $S = \emptyset$, je tvrzení triviální.

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Důkaz.

Je-li $S = \emptyset$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že S je neprázdná a nejvýše spočetná.

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Důkaz.

Je-li $S = \emptyset$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že S je neprázdná a nejvýše spočetná. To znamená, že existuje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ne nutně prostá) taková, že $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = S$.

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Důkaz.

Je-li $S = \emptyset$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že S je neprázdná a nejvýše spočetná. To znamená, že existuje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ne nutně prostá) taková, že $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = S$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nejprve definujeme množinu

$$M_x \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} : s_n \leq x\}$$

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Důkaz.

Je-li $S = \emptyset$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že S je neprázdná a nejvýše spočetná. To znamená, že existuje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ne nutně prostá) taková, že $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = S$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nejprve definujeme množinu

$$M_x \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} : s_n \leq x\}$$

a poté definujeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in M_x} \frac{1}{2^n},$$

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Důkaz.

Je-li $S = \emptyset$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že S je neprázdná a nejvýše spočetná. To znamená, že existuje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ne nutně prostá) taková, že $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = S$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nejprve definujeme množinu

$$M_x \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} : s_n \leq x\}$$

a poté definujeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in M_x} \frac{1}{2^n},$$

o které lze ukázat, že má požadované vlastnosti. □

Další vlastnosti funkce $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in M_x} \frac{1}{2^n}$

Domácí úkol

Rozmyslete si a pokuste se dokázat následující vlastnosti funkce f :

- f je neklesající na $\mathbb{R}$ – jasné
rozmyslete si, jak by musela vypadat množina S , aby funkce f byla rostoucí,

Domácí úkol

Rozmyslete si a pokuste se dokázat následující vlastnosti funkce f :

- f je neklesající na $\mathbb{R}$ – jasné
rozmyslete si, jak by musela vypadat množina S , aby funkce f byla rostoucí,
- $(\forall x_0 \in \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ (f je zprava spojitá v každém bodě),

Domácí úkol

Rozmyslete si a pokuste se dokázat následující vlastnosti funkce f :

- f je neklesající na $\mathbb{R}$ – jasné
rozmyslete si, jak by musela vypadat množina S , aby funkce f byla rostoucí,
- $(\forall x_0 \in \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ (f je zprava spojitá v každém bodě),
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,

Domácí úkol

Rozmyslete si a pokuste se dokázat následující vlastnosti funkce f :

- f je neklesající na $\mathbb{R}$ – jasné
rozmyslete si, jak by musela vypadat množina S , aby funkce f byla rostoucí,
- $(\forall x_0 \in \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ (f je zprava spojitá v každém bodě),
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.



E. ČECH: Bodové množiny, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1936.

(<http://www.dml.cz/manakin/handle/10338.dmlcz/400435>)



J. LUKEŠ A KOLEKTIV: Problémy z matematické analýzy, Univerzita Karlova, Praha, 1982.

(<http://matematika.cuni.cz/dl/lukes/problemy.pdf>)

Děkuji za pozornost!