O S M A

OBČASNÝ SEMINÁŘ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

PETR VODSTRČIL

16. 3. 2021

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

1

Věta

Nechť $F \subset \mathbb{R}$ je množina typu F_σ. Pak existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na $\mathbb{R}$ taková, že $N^f = F$.

Důkaz.

Vzhledem k předpokladu lze množinu F psát ve tvaru

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

kde množiny F_n jsou uzavřené.

Pro každé $x \in F$ položme

$$n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$$

a definujme funkci f předpisem

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{n(x)} & \text{pro } x \in F \cap \mathbb{Q}, \\ -\frac{1}{n(x)} & \text{pro } x \in F \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus F. \end{cases}$$

Není obtížné si rozmyslet, že pro funkci f platí $N^f = F$.

SKUTEČNĚ:

- Je-li $x_0 \in F \cap \mathbb{Q}$, pak $f(x_0) > 0$ a zřejmě v každém okolí bodu x_0 leží nějaké iracionální číslo. Všimněme si, že pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je $f(x) \leq 0$.
To ale znamená, že $\boxed{f \text{ není v } x_0 \text{ spojitá.}}$

- Podobně pro $x_0 \in F \setminus \mathbb{Q}$ je $f(x_0) < 0$ a v každém okolí bodu x_0 leží racionální číslo. Pro $x \in \mathbb{Q}$ ale platí $f(x) \geq 0$
$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ není v } x_0 \text{ spojitá.}}$

- Nyní předpokládejme, že $x_0 \in \mathbb{R} \setminus F$. Dokážeme, že funkce f je v bodě x_0 spojitá.

Buď tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ dáno. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\boxed{\frac{1}{n_0} < \varepsilon.}$$

Protože $x_0 \in \mathbb{R}\setminus F \subset \underbrace{\mathbb{R}\setminus(\overbrace{F_1\cup F_2\cup\dots\cup F_{n_0}}^{\text{uzavřená}})}_{\text{otevřená}}$,

existuje $\delta\in\mathbb{R}^+$ takové, že

$$\boxed{(x_0-\delta,\, x_0+\delta)\cap(F_1\cup F_2\cup\dots\cup F_{n_0}) = \emptyset.}$$

Je-li nyní $x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ jakýkoliv prvek, pak

$$|f(x)| = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{je-li } x\in\mathbb{R}\setminus F,\\ \frac{1}{n(x)}, & \text{je-li } x\in F \end{array}\right\} < \frac{1}{n_0}.$$

platí, protože $x\notin F_1\cup\dots\cup F_{n_0}$

Proto

$$\boxed{(\forall x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta)):\ |f(x)-\underbrace{f(x_0)}_{=0}| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,}$$

což znamená, že f je spojitá v bodě $x_0\in\mathbb{R}\setminus F$.

Celkem jsme tedy dostali, že $\boxed{N^f = F.}$

$\square$

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak je množina N^f nejvýše spočetná.

DŮKAZ

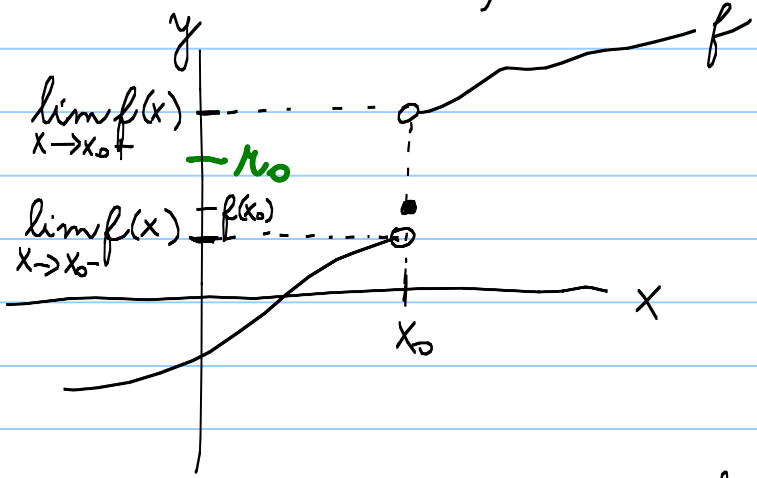
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je neklesající na $\mathbb{R}$. Pak snadno nahlédneme, že pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ platí

Existence konečných jednostranných limit

$$\boxed{\overbrace{\lim_{x\to x_0-} f(x)}^{\in\mathbb{R}} = \sup\{f(x) : x < x_0\} \leq f(x_0) \leq \inf\{f(x) : x > x_0\} = \underbrace{\lim_{x\to x_0+} f(x)}_{\in\mathbb{R}}.}$$

Každému $x_0 \in N^f$ (bod nespojitosti) přiřaďme nějaké racionální číslo r_0 z intervalu

$$\left(\lim_{x\to x_0-} f(x),\ \lim_{x\to x_0+} f(x)\right).$$



Tím je definováno zobrazení $\varphi : N^f \to \mathbb{Q}$, $[D\varphi = N^f]$ které je prosté. Protože $\mathbb{Q}$ je spočetná, musí být N^f nejvýše spočetná. $\square$

Věta

Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je monotónní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $N^f = S$.

Důkaz.

Je-li $S = \emptyset$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že S je neprázdná a nejvýše spočetná. To znamená, že existuje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ne nutně prostá) taková, že $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = S$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nejprve definujme množinu

$$M_x \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} : s_n \leq x\}$$

a poté definujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in M_x} \frac{1}{2^n},$$

o které lze ukázat, že má požadované vlastnosti. □

DOKONČENÍ DŮKAZU

Námi definovaná funkce je neklesající, neboť platí

$$x < y \implies M_x \subset M_y \implies \underbrace{\sum_{n \in M_x} \frac{1}{2^n}}_{f(x)} \leq \underbrace{\sum_{n \in M_y} \frac{1}{2^n}}_{f(y)}.$$

Zbývá ukázat, že $N^f = S$.

Předpokládejme, že $\boxed{x_0 \in S}$, tzn. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\boxed{x_0 = s_{n_0}.}$$

Pak pro každé $x < x_0$ platí

$$f(x_0) - f(x) = \sum_{n \in M_{x_0} \setminus M_x} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{n_0}}.$$

platí, protože $n_0 \in M_{x_0} \setminus M_x$

Proto je vyloučené, aby platilo $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$

$\implies f$ není v bodě x_0 spojitá zleva $\implies \boxed{x_0 \in N^f.}$

Je potřeba ještě ukázat, že f je spojitá ve všech bodech

$$\boxed{x_0 \in \mathbb{R} \setminus S.}$$

Nechť tedy $x_0 \in \mathbb{R} \setminus S$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\boxed{\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.}$

Protože $x_0 \notin \underset{\text{uzavřená množina}}{\{s_1, s_2, \dots, s_{n_0}\}}$, existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že $\boxed{(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap \{s_1, s_2, \dots, s_{n_0}\} = \emptyset.}$

Pak pro všechna $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ platí

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

mezi čísly x a x_0 není žádné číslo z množiny $\{s_1, s_2, \dots, s_{n_0}\}$

součet geom. řady

$\square$