CANTOROVA HOSPODA

JIŘÍ BOUCHALA

100. přednáška (v OSMAčkovém seriálu)
v semináři OSMA, 29. 11. 2022

NENÍ SPOJITOST JAKO SPOJITOST

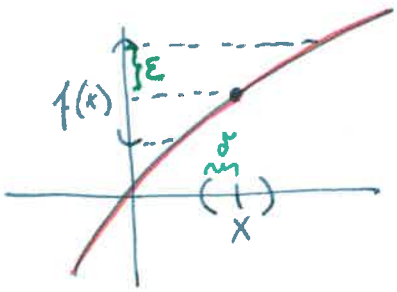
Def. f je spojitá v $x \in \mathbb{R}$ $\equiv$ $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$

$$\Updownarrow$$

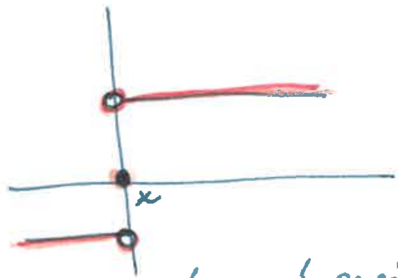
$$\forall (y_n) \subset \mathbb{R} : \left[y_n \to x \Rightarrow f(y_n) \to f(x) \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} : \left[|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \right]}$$



f spoj. v x



f není spoj. v x

(f spojitá zprava v x $\equiv$ $\lim\limits_{y \to x+} f(y) = f(x)$,

f spojitá zleva v x $\equiv$ $\lim\limits_{y \to x-} f(y) = f(x)$)

Př.

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ kde } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ & m, n \ldots \text{nesoudělná} \end{cases}$$

(Riemannova funkce)

Pak

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: f je spojitá v x

$\forall x \in \mathbb{Q}$: f není spojitá v x

$$\left(\Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} : \ (R) \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{= 0} \in \mathbb{R} \right)$$

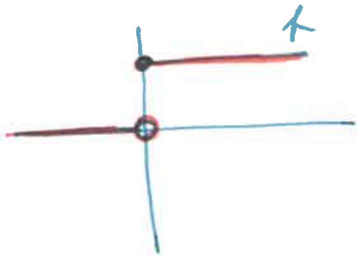
Def. Buď $I \subset \mathbb{R}$ interval

$$f \text{ je spoj. v } I \equiv \left[\forall x \in I\ \forall (y_n) \subset I:\ y_n \to x \Rightarrow f(y_n) \to f(x)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I:\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$

Př.
$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



f je spoj. v $\langle 0, \infty)$, f je spojitá v $(-\infty, 0)$

f není spoj. v $(-\infty, 0\rangle$

Př. Weierstrass (18.7.1872)

$$W(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \pi \cdot x)$$

$0 < a < 1$
$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$
$b > 1$ ... liché, celé

... spojitá v $\mathbb{R}$
... nemá derivaci v žádném $x \in \mathbb{R}$

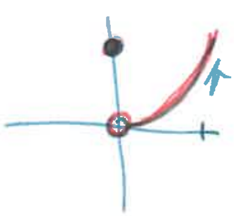
Věta
f monotónní na (a,b) $\Longrightarrow$ $\forall x \in (a,b)$: $\lim_{y \to x+} f(y) \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \to x-} f(y) \in \mathbb{R}$

Důsledek. Množina bodů nespojitosti f na (a,b) je nejvýše spočetná

Dk. cvičení

Věta Je-li f konvexní na (a,b), je f spojitá na (a,b)

Př.



f je konvexní na $\langle 0, \infty)$,
ale f není spojitá na $\langle 0, \infty)$
(f je spojitá na $(0, \infty)$)

Kde je dobrá spojitost:

- Weierstrassova věta
- Darbouxova vlastnost

...

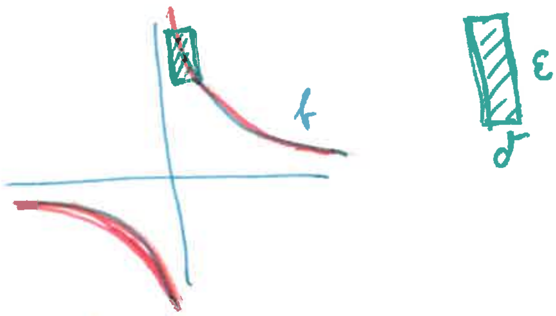
Def.

f je stejnoměrně spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y \in I:\ |x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon}$$

Př. $f(x) := \frac{1}{x}$



f je spojitá v $(0,1)$

f není stejnoměrně spojitá v $(0,1)$

Zřejmě platí:

f je stejnoměrně spojitá v I $\implies$ f je spojitá v I

Věta

f spoj. v $\langle a,b\rangle$ $(a,b\in\mathbb{R};\ a<b)$ $\implies$	f je stejnoměrně spojitá v $\langle a,b\rangle$

Dk. Předpokládejme opak, tj.

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x,y\in\langle a,b\rangle:\ |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$$

$$\Big\Downarrow \ \delta=\tfrac{1}{n}$$

(*) $$\boxed{\exists \varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n,y_n\in\langle a,b\rangle:\ |x_n-y_n|<\frac{1}{n} \wedge |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon}$$

Bol. $(x_n)\subset\langle a,b\rangle \implies \left[\exists x\in\langle a,b\rangle:\ x_{n_k}\to x\right]$ (**)

$$|y_{n_k}-x| \leq \underbrace{|y_{n_k}-x_{n_k}|}_{\leq \frac{1}{n_k}\to 0} + \underbrace{|x_{n_k}-x|}_{\to 0} \to 0 \implies y_{n_k}\to x$$ (***)

$$\left.\begin{matrix}(*)\\(**)\\(***)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})| \geq \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$|f(x) - f(x)| = 0$$, a to je **spor**.

Cbd.

Pozn. f spoj. v $\langle a,b\rangle \Longrightarrow f$ stejn. spoj. v $\langle a,b\rangle$

$$\Downarrow$$

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

Věta. Buď $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

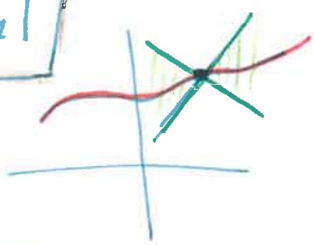
$\boxed{\text{Pak } f \text{ je stejnoměrně spojitá v } (a,b) \text{ právě tehdy, existuje-li spojité rozšíření } f \text{ na } \langle a,b\rangle}$

Dk. cvičení

Def. f je lipschitzovsky spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\exists L>0\ \forall x,y \in I: \quad |f(x)-f(y)| \leq L\cdot|x-y|}$$



Věta.

$$\exists M>0\ \forall x \in I: |f'(x)| \leq M$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ je lipschitzovsky spojitá v } I \quad (L=M)$$

Dk. $\forall x,y \in I$:

$$|f(x)-f(y)| \underset{\text{Lagrange}}{=} |f'(\xi)\cdot(x-y)| \leq M\cdot|x-y|$$

Cbd.

Věta f lipschitzovsky spoj. v I $\implies$ f' existuje s.v. v I (a $|f'| \le L$)

Def. f je <u>absolutně spojitá v intervalu</u> $I \subset \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall n \in \mathbb{N}$: $\left[\begin{array}{c} I \ni a_1<b_1 \le a_2<b_2 \le \dots \le a_n<b_n \in I \\ \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \\ \Downarrow \\ \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon \end{array} \right]$

Věta

f je a.s. na intervalu I

$\Downarrow$

f je stejnoměrně spoj. na I

Dk. zřejmý (volme $n=1$)

Věta

f je lipschitzovsky spojitá na I

$\Downarrow$

f je a.s. na I

Dk. stačí si uvědomit, že

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| \le \sum_{k=1}^{n} L\cdot|b_k-a_k| < L\cdot\delta,$$

a pro dané $\varepsilon>0$ zvolit $\delta \le \frac{\varepsilon}{L}$ ...

cbd

Shrnutí a plán:

f má omezenou derivaci v I

$$\Downarrow \qquad \not\Uparrow \quad f(x) := |x|,\ I = (-1,1)$$

f je Lipschitzovsky spoj. v I

$$\Downarrow \qquad \not\Uparrow \quad f(x) := \sqrt{x},\ I = (0,1)$$

f je absolutně spoj. v I

$$\Downarrow \qquad \not\Uparrow \quad f \ldots \text{Cantorova ol. fun.},\ I = \langle 0,1 \rangle$$

f je stejnoměrně spoj. v I

$$I = \langle a,b \rangle \ \Uparrow \qquad \Downarrow \qquad \not\Uparrow \quad f(x) := \frac{1}{x},\ I = (0,1)$$

f je spojitá v I

Př. Funkce $f(x) := \sqrt{x}$ je na $(0,1)$ absolutně spojitá, ale ne lipschitzovsky spoj.

Dk. f má na $(0,1)$ neomezenou derivaci, proto není lipsch. spojitá

Ukažme, že f je a.s. na $(0,1)$.

Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Zvolme $\delta^* > 0$ takové, aby

$$\sqrt{\delta^*} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

f má na $\langle \delta^*, 1\rangle$ omezenou derivaci, je tedy na $\langle \delta^*, 1\rangle$ lipschitzovská, a proto i absolutně spojitá. Odtud plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že

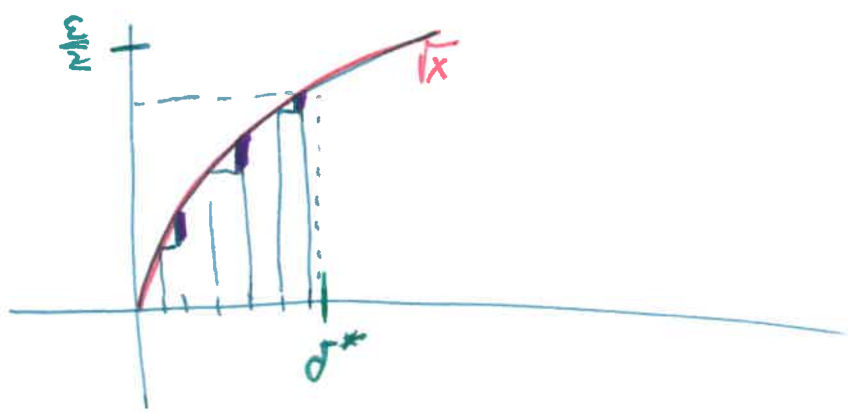
$$\delta^* \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le 1$$

$$\sum (b_k - a_k) < \delta \qquad (**)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

... k dokončení důkazu stačí zkombinovat $(*)$ a $(**)$



cbd.

Věta. Funkce f je a.s. na $\langle a,b\rangle$ právě tehdy, existuje-li funkce $g \in \mathcal{L}^1(a,b)$ taková, že

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

Dodatek. Navíc pak platí: $f'(x) = g(x)$
pro s.v. $x \in (a,b)$

(tzn. $\boxed{f \text{ je a.s. na } \langle a,b\rangle \quad \ldots \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt}$)

Lebesgueův integrál

Věta

$$W^{1,2}(a,b) = H^1(a,b) = \{ f \in L^2(a,b) : f' \in L^2(a,b) \} =$$

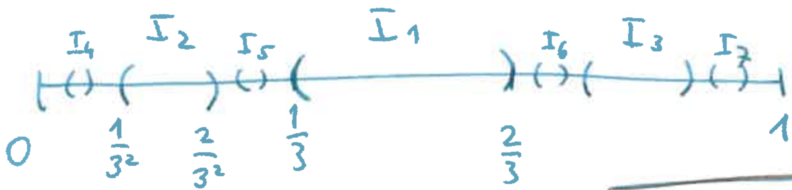
derivace ve smyslu distribucí

$$= \{ f \in AC(\langle a,b\rangle) : f' \in L^2(a,b) \}$$

množina všech a.s. funkcí na $\langle a,b\rangle$

klasická derivace

Př. Cantorovo diskontinuum
a Cantorova stupňovitá funkce



Cantorovo diskontinuum

$$\boxed{D = \langle 0,1\rangle \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}$$

... **nespočetné**
... **řídká**
... **uzavřená**
... $\lambda(D) = 0$

$$x \in D \iff x \overset{\text{lze}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}, \quad i_n \in \{0,2\}$$

$$= 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n}, \quad j_n \in \{0,1\}$$

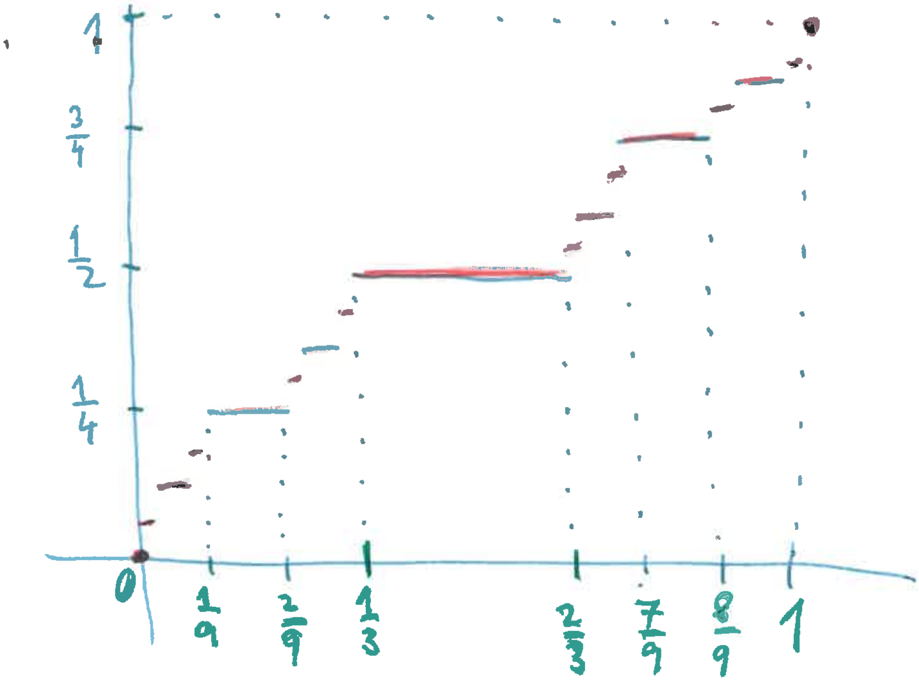
Cantorova stupňovitá funkce S

$$x = 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n} \in D \quad \dots \quad \boxed{S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{2^n}}$$

$$x = 2\cdot \underbrace{0{,}j_1 j_2 j_3 \dots}_{\text{triadický}} \quad \dots \quad S(x) = \underbrace{0{,}j_1 j_2 j_3 \dots}_{\text{dyadický}}$$

dodefinujeme S na $\langle 0,1\rangle \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

tak, aby S byla konstantní na každém I_n.



$S : \langle 0,1 \rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,1 \rangle$

... spojitá (a proto i stejnoměrně spojitá !!) na $\langle 0,1 \rangle$

... neklesající na $\langle 0,1 \rangle$

... $S'(x) = 0$ s. v. v $(0,1)$

$$\Downarrow$$

$$S(x) \neq S(0) + \int_0^x S'(t)\,dt = 0,$$

a proto S není a. s. (a tedy ani lipschitzovská) na $\langle 0,1 \rangle$

A hezký příklad na závěr

Definujme $\varphi : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$

$$\boxed{t = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_n}{3^n} = 2\cdot\left(\frac{j_1}{3}+\frac{j_2}{3^2}+\frac{j_3}{3^3}+\dots\right) \in D} \qquad (j_i \in \{0,1\})$$

$$\boxed{\varphi(t) := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_{2n-1}}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_{2n}}{2^n}\right)} = \left(\frac{j_1}{2}+\frac{j_3}{2^2}+\frac{j_5}{2^3}+\dots, \frac{j_2}{2}+\frac{j_4}{2^2}+\frac{j_6}{2^3}+\dots\right)$$

$$\boxed{t \in I_k = (\alpha,\beta)}$$

$$\boxed{\varphi(t) := \frac{\beta - t}{\beta-\alpha}\varphi(\alpha) + \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\varphi(\beta)}$$

Pak
- $\varphi : \langle 0,1\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$
- φ je spojité na $\langle 0,1\rangle$
- $\varphi(D) = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

A hezká věta na závěr:

Věta. Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, je-li spojitým obrazem Cantorova diskontinua

Literatura.
- V. Jarník – Diferenciální počet I, II (DML.cz)
- P.S. Aleksandrov – Úvod do obecné teorie množin a funkcí