

Několik poznámek o sčítání

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, VŠB-TUO, 31.10.2022

Dvadsať minút, a nič som sa nedozvedel . . .

(komentář k videozáznamu přednášky)



Zenon z Éleje (490 BC–430 BC)

Podivuhodné tvrzení



Zenon: *Veškerý pohyb je pouhou ilusí.*

Jak z toho ven - návrhy moudrých

- *Díogenés ze Sinópe*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;
- *Henri Bergson*: dráha je dělitelná, ale pohyb nikoli;
- *Hermann Weyl*: prostor není diskrétní (dlaždičkový argument);
- *Bertrand Russell*: pohyb je jen změna polohy v čase, pohyb v okamžiku neexistuje;
- *Nick Huggett*: chyba je v tom, že Zenon předpokládá uzávěr;
- *Peter Lynds*: polohu pohybujícího se tělesa nelze přesně určit.

Jak z toho ven ještě jednou - tentokrát matematicky

- *Otázka*: Můžeme si dovolit *sečíst nekonečně mnoho objektů*?

Zenon podruhé: Achilles a želva

Závod na 100m, želva má 10m náskok, Achilles běží desetkrát rychleji. Náskok želvy:

$$10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

Posud'me výpočet

$$\begin{aligned} S &= 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots \\ 10S &= 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots \end{aligned}$$

Tedy $10S - S = 100$, takže $S = 11\frac{1}{9}$ metru.

Je-li výpočet legální, pak Achilles želvu dožene, a víme, kde.



Guido Grandi (1671–1742)

1703 G. Grandi posílá G.W. Leibnizovi k posouzení výraz

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots,$$

přičemž dochází k závěru, že součet je roven $\frac{1}{2}$.

Odůvodnění: dva bratři a drahokam.

Pozorování: *částečné součty*: $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

Co na to velikán



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

1711 Leibniz souhlasí. Odůvodnění: vzorec

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{pro každé } x \neq 1.$$

Pokus o matematické ospravedlnění Grandiho výsledku

Položme

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Potom

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots,$$

tedy

$$S = 1 - S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}.$$

Tak snadné to nebude

Sčítání by ale mělo být *asociativní*.

$$(2 + 3) - 8 = 2 + (3 - 8).$$

Avšak

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \cdots = 0,$$

případně

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) \cdots = 1.$$

Otázky:

- Která z hodnot $S = \frac{1}{2}, 0, 1$ je ta pravá?
- Proč jsme na podobné potíže nenarazili u Achilla?

Sčítání nekonečně mnoha výrazů

David Bressoud: *Infinite summation* je oxymoron.

Infinite znamená *konce nemající*.

Summation znamená *dosáhnout uzávěru, dosáhnout nejvyššího bodu*, ... (srovnej *summit* apod.).

Jak ale uzavřít proces, který nemá konec?

Samotný výraz je červenou vlajkou.

Je bezpečnější mluvit o *nekonečné řadě*.

Při sčítání nekonečně mnoha výrazů tedy sice používáme stejné symboly $+$, $\sum$, ale máme na paměti, že si máme dávat bacha.

Starověcí Řekové se vyhýbali nebezpečným konstrukcím.

Etalonem nebezpečných konstrukcí jsou *nekonečné řady*.

Co na to další velikán



Eudoxos z Knidu (408 BC – 355 BC)

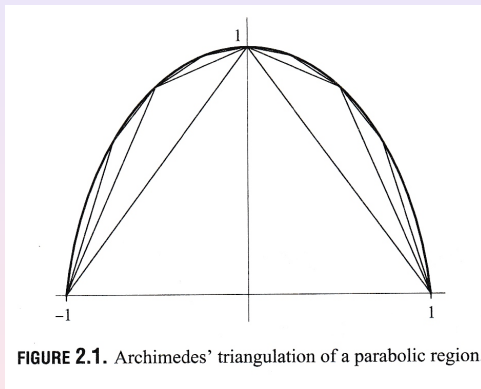


Archimédés ze Syrakus (287 BC – 212 BC)

Archimédés: kvadratura paraboly.

Eudoxus: metoda vyčerpávání.

E.J. Dijksterhuis (1892–1965): *Metoda vyčerpávání je nejhorší název na světě, neboť plochu nelze vyčerpat.*



Archimédovo vyčerpání

- První trojúhelník má plochu 1.
- Každá generace má čtvrt plochy té předchozí.
- Částečné součty:

$$1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}, \dots$$

- V n -té generaci máme

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}. \quad (1)$$

Dnešní přístup:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Přesně to Archimédés *neudělal*.

Označme K obsah oblasti vymezené obloukem.

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$. Pak vepíšeme do paraboly dost trojúhelníků, aby jejich obsah přesáhl $\frac{4}{3}$. Spor s (??).

Nyní předpokládejme, že $K < \frac{4}{3}$. Pak nalezneme n takové, že $\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} > K$. Spor s tím, že obsah oblasti nepřesáhne obsah vepsaných trojúhelníků.

Archimédovu metodu (uhodnu výsledek a dokážu konečnými aproximacemi, že to musí být on) převzali Cauchy a spol v 19. století pro sčítání *nekonečných řad funkcí*.

Vychází z ní i současná definice součtu nekonečné řady.

Geometrická řada

Ve 14. století sčítali Richard Swineshead (kolem 1350) a Nicole Oresme (1323–1382) nekonečné řady související s popisem pohybu.

Navázali na Archiméda a objevili řadu

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (\text{pro jaká } x?)$$

Příklady:

$$x = \frac{1}{3} : \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

$$x = -\frac{1}{2} : \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \dots = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3},$$

$$x = 2 : \quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \dots = \frac{1}{1-2} = -1?$$

Závěr: musíme se domluvit, co myslíme nekonečným součtem.

Můžeme například *axiomatizovat* vzorec:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro každé } x \neq 1.$$

Pokud to provedeme, jsme v dobré společnosti.

Tuto definici přijal (mimo jiné) Leonhard Euler.



Leonhard Euler (1707 – 1783)

Ivor Grattan-Guinness (1941–2014)

Convolutions in French Mathematics 1800–1840

Moderní pohled na kavalírský přístup matematiků 18. století k nekonečným sumám vzbuzuje dojem, že tito nebozí mužové odkládali své mozky jsouce s nimi konfrontováni.

Euler (1760)

O divergentních řadách

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

- tuto sumu určil Leibniz, mnozí nesouhlasí
- porozumět otázce znamená domluvit se na tom, co je to součet
- je povoleno tuto sumu ve výpočtech nahradit jejím součtem
- idea přibližování pro divergentní řady nefunguje.

Definition

Má-li suma cílovou hodnotu v Archimédově smyslu, pak říkáme, že je *konvergentní*.

Opatrnosti není nikdy dost

Pro jakoukoli nekonečnou sumaci musíme definovat, co myslíme součtem.

Jak se ukázalo, Eulerův přístup přináší více potíží než užitku.

Matematikové by museli přiřadit divergentním sumám určité hodnoty *součtů*.

To jde jen do jisté míry a s velkou opatrností.



Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

Daniel Bernoulli upozornil na následující nesrovnalost:

$$\begin{aligned}1 - x + x^2 - x^3 + x^4 &= \frac{1}{1 + x}, \\1 - x + x^3 - x^4 + x^6 &= (1 - x)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \\&= \frac{1 - x}{1 - x^3} = \frac{1}{1 + x + x^2}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$, dostaneme různé výsledky vpravo a stejné vlevo.



Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Augustin Louis Cauchy (1821)

Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique

Jedno z hlavních témat: nekonečné řady.

V úvodu vyzdvihuje geometrickou intuici a varuje před *algebraickými technikami*.

$$\begin{aligned}1 &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 + \dots \\ &= (1 - x) + x(1 - x) + x^2(1 - x) + \dots\end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Cauchy:

$$\begin{aligned}1 &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 \dots - x^n + x^n \\ &= (1 - x) + x(1 - x) + x^2(1 - x) + \dots - x^n(1 - x) + x^n,\end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

Kdy lze aproximovat?

Cauchy navazuje na Archiméda.

Vidíme, o kolik se částečný součet geometrické řady liší od cílové hodnoty.

Cílovou hodnotou bude $\frac{1}{1-x}$ právě tehdy, když lze učinit výraz $\frac{x^n}{1-x}$ libovolně malým.

To jest právě tehdy, když $-1 < x < 1$.

Theorem

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pokud } |x| < 1.$$

Odhalili jsme zajímavý jev nemající obdoby pro konečné identity.

$$1 + x = \frac{1-x^2}{1-x} \quad \text{platí pro každé } x \neq 1.$$

Kolem středověku se objevuje nutnost počítat s ∞ .

Odměna: poklady, které si Archimédés nedovedl ani představit.

Nebezpečí: (viděli jsme).

Idea: jistá míra zanedbávání nebezpečí se vyplatí.

Genialita pionýrů: vycítili, co si mohou dovolit.

To, že intuice nestačí, se plně projevilo v roce 1807.

Potřeba hlubšího porozumění tomu, co je legitimní.

Revoluce konce 17. století: počítejme s nekonečnem, jako by to byla konečné hodnota.

Jedna z hlavních motivací: vzorec pro výpočet π .

Nikalantha (1450–1550), James Gregory (1638–1675):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

John Wallis (1616–1703):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

Metoda: studium integrálu $\int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{p}})^q dt$.

Isaac Newton si v roce 1665 přečetl *Arithmetica infinitorum* Johna Wallise.

Zobecnil a zároveň zjednodušil jeho integrál:

$$\int_0^x (1 - t^2)^0 dt = x$$

$$\int_0^x (1 - t^2)^1 dt = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\int_0^x (1 - t^2)^2 dt = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$\int_0^x (1 - t^2)^3 dt = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$\vdots$

Newtonova binomická formule

Newton pochopil, že problém tkví v otázce, zda lze rozepsat $(1+x)^{\frac{m}{2}}$ ve tvaru polynomu (a pak integrovat).

Lze to provést i pro m liché?

Newton experimentoval a zjistil toto:

Theorem

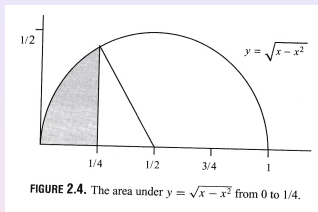
Pro každá $a \in \mathbb{R}$ a $|x| < 1$ platí

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)}{2!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Odtud snadno vyvodíme

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{3}{8 \cdot 3! \cdot 7} - \frac{3 \cdot 5}{16 \cdot 4! \cdot 9}\end{aligned}$$

Porovnání vzorců



$$\text{area} = \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2} dx$$

$$\text{area} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Zásadní otázka: můžeme prohodit nekonečnou sumu a integraci?

Nazrávání revoluce

V 17. a 18. století matematikové intuitivně chápali, že mezi sčítáním nekonečně mnoha veličin a sčítáním velkého konečného množství veličin je zásadní rozdíl.

Kolem roku 1800 přestávaly intuitivní představy stačit.

Nastal hlad po přesných definicích.

Jasným příkladem byly podivuhodné Fourierovy řady.

Matematikové se vrátili k Archimédovu modelu přístupu k nekonečným procesům.

Archimédés zdánlivě vynakládá spoustu nadbytečného úsilí k tomu, aby se vyhnul nekonečné sumaci.

Začalo se ukazovat, že k tomu je dobrý důvod.

Další podivuhodné vlastnosti sčítání

Konečné součty jsou komutativní.

$$2 + 3 - 8 = 2 - 8 + 3 = -8 + 2 + 3.$$

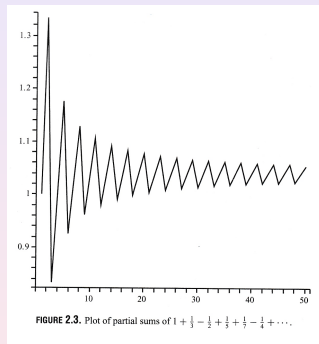
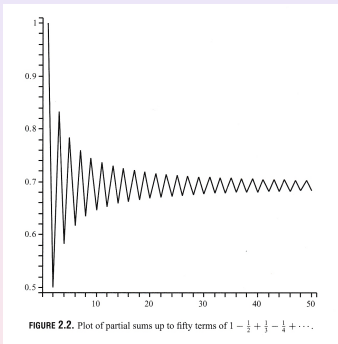
Porovnejme však nekonečné součty

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

a

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Částečné součty přerovnané řady



Mocninné řady tvaru

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

se staly základním nástrojem kalkulu koncem 17. století.

Hodily se zejména pro aproximace.

Byly nezbytné pro řešení diferenciálních rovnic.

Uvnitř intervalu konvergence se s nimi dá dělat téměř cokoli, jako by to byly polynomy.

Eulerova kniha *Introductio in analysin infinitorum* (1748) je učebnicí řad.

Vibrace kruhové membrány

Příklad (Euler 1759):

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \right) u = 0,$$

kde

- u je vertikální výchylka
- r je vzdálenost od středu
- α, β jsou materiálové konstanty.

Explicitní vzorec pro řešení neexistuje. Ale má-li řešení tvar mocninné řady

$$u = r^\lambda + a_1 r^{\lambda+1} + a_2 r^{\lambda+2} + \dots,$$

pak lze získat vzorce pro λ a $a_1, a_2, \dots$.

Mocninné řady byly všude.

Kdykoli se hledala representace funkce mocninnou řadou, byla vždy nalezena.

Někdy bez omezení ($\sin$, $\cos$, $\exp$), jindy s omezením na oblast proměnné ($\arctg x$, $\log(1 + x)$ apod.).

1671 James Gregory píše Johnu Collinsovi a udává šest členů řad pro tg , arctg , $\sec$, $\log \sec$, $\sec^{-1}(\sqrt{2}x)$, $\log(\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))$ a $2 \operatorname{arctg}(\operatorname{tgh} \frac{x}{2})$.

S řadami pracovali všichni, například

- Isaac Newton (1687, Principia),
- Johann Bernoulli (1694, Acta Eruditorum),
- Gottfried Leibniz (1694, dopis Bernoullimu),
- Abraham de Moivre (1708, dopis Bernoullimu).

Jméno ale dostaly po Brooku Taylorovi (1685–1731), který je prvně vydal tiskem (1715).



Jean Le Rond (1717–1783)

Dostal jméno podle kostela Saint Jean Le Rond v Paříži.

Později připojil *d'Alembert et de la Chapelle*.

Nebyl jediným matematikem, který si vymyslel své vlastní příjmení (James Joseph *Sylvester*).

V roce 1768 d'Alembert vydal článek, v němž se věnuje Newtonově binomické řadě. Ptá se, kdy platí

$$\sqrt{1 + \frac{200}{199}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{200}{199} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \left(\frac{200}{199}\right)^2 + \dots$$

Ještě kolem 101. členu se řada chová slušně.

- $n = 100$: 1.416223987,
- $n = 101$: 1.415756552,
- správný výsledek: 1.41598098

Od 300. členu dál se součet začne vzdalovat od správného výsledku a chyba roste nade všechny meze.

Aproximace divergentní řadou

Table 2.1. Binomial series approximations to $\sqrt{1 + 200/199}$.

n	sum of first n terms	sum of first $n + 1$ terms
100	1.416223987	1.415756552
200	1.416125419	1.415853117
300	1.416111363	1.415866832
400	1.416120069	1.415857961
500	1.416143716	1.415834169
600	1.416183194	1.415794514
700	1.416243295	1.415734170
800	1.416332488	1.415644629
900	1.416464086	1.415512518
1000	1.416658495	1.415317346
1500	1.420454325	1.411505919
2000	1.451536959	1.380289393
2500	1.727776909	1.102822490
3000	4.323452545	-1.504623925

Srovnání s geometrickou řadou

d'Alembert srovnal tuto řadu s geometrickou řadou.

Porovnání koeficientů:

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - n + 2)}{(n-1)!} \left(\frac{200}{199}\right)^{n-1}$$

d'Alembert zjistil, že

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(1 - \frac{3}{2n}\right) \frac{200}{199}.$$

Tento podíl je však větší než 1 právě pro $n > 300$.



Giuseppe Lodovico de la Grangia (1736–1813)

Luigi de la Grange Tournier

Joseph Louis Lagrange

Narozen v Turíně 1736,

dopisoval si často s Eulerem a d'Alembertem,

1766 vystřídal Eulera na Berlínské akademii,

1787 se přemístil do Paříže,

1808 byl dominantním členem komise posuzující skandální rukopis.

1813 Théorie des fonctions analytiques - odhad zbytku při
aproximaci funkce Taylorovým polynomem

$$|f(x) - T_f^{a,n}(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(\xi)|(x-a)^n}{n!}, \quad \text{kde } \xi \in (a, x).$$

Vzorec dvou outsiderů



Jak velký je faktoriál?

Abraham de Moivre (1667–1754) byl francouzský protestant, po revokaci ediktu nantského (1685) rodina uprchla do Londýna, kde nikdy nezískal akademickou posici a živořil jako tutor.

James Stirling (1692–1770) byl skotský jakobita, 1716 vyloučen z Oxfordu, protože odmítl přísahat věrnost králi (George 1).

Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Lagrangeův zbytek v součinnosti se Stirlingovou formulí přinesl odpovědi na otázky, které nechal d'Alembert otevřené:

- a co se stane pro $|x| = 1$?
- b kolik členů potřebujeme k předepsané aproximaci?
- c jestliže řada diverguje, jaké nejlepší přesnosti lze dosáhnout, a pro který člen?

Aproximace binomickou formulí

Chyba aproximace n členy Newtonovy formule jest

$$D_n(0, x) = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) \cdots (-n + \frac{3}{2})(1 - \xi)^{-n+\frac{1}{2}}}{n!} x^n,$$

což lze odhadnout

$$|D_n(0, x)| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} |x|^n,$$

tedy dle Wallise

$$|D_n(0, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}} |x|^n.$$

Co všechno odtud vyjde

Pro $|x| = 1$ jde odhad chyby k nule.

Pro $|x| > 1$ řada diverguje, ale nejlepší aproximace dosáhneme pro

$$n = \frac{3}{2 \log |x|}.$$

Potom pro $x = \frac{200}{199}$ je nejlepší volba $n = 300$ s chybou asi 4.88×10^{-4} .

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

- y je výchylka vibrující struny nad posicí x ,
- c je konstanta závisající na délce, napětí a hmotnosti struny,
- t je čas.

K řešení potřebujeme okrajové podmínky, například

$y(0, t) = y(\ell, t) = 0$ a potřebujeme znát počáteční stav $y(x, 0)$.

Výsledek: jestliže lze $y(x, 0)$ popsat lineární kombinací funkcí tvaru $\sin(\frac{k\pi x}{\ell})$, pak řešení bude tvaru

$$y(x, t) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) - 2 \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{3\pi ct}{\ell}\right) + \dots$$

Nekonečně mnoho harmonik?

Na d'Alemberta navázal Daniel Bernoulli (1753), který navrhl, že by vibrující struna mohla mít nekonečně mnoho harmonik.

Tuto možnost zavrhl Leonhard Euler s odůvodněním, že řešení by nutně muselo být periodické.

Krize udeřila *21. prosince 1807.*



Do Francouzského Institutu přinesl 39-letý *Joseph Fourier* (1768-1830) svou práci *Teorie vedení tepla v pevných tělesech*.

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na **konstantní** teplotě 0° ,
- teplo je dodáváno na jedné z krátkých stran,
- druhá strana je daleko (v **nekonečnu**).

Fourierův tenký pásek

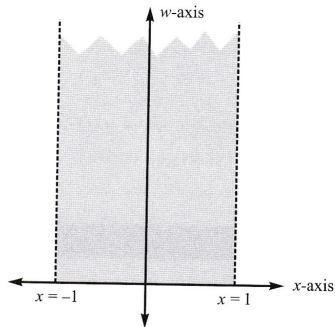
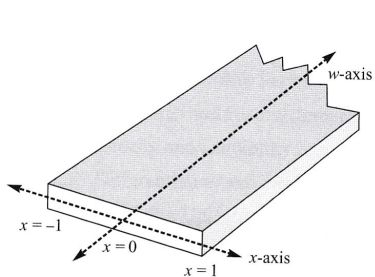


FIGURE 1.1. Two views of Fourier's thin plate.

$z(x, y)$... teplota v bodě $[x, y]$ (**funkce dvou proměnných**),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x, 0) = f(x)$... známá teplota dolního okraje (**funkce jedné proměnné**).

Fourier se omezil na případ, kdy $f(x) = f(-x)$ (f je **sudá funkce**).

První a nejdůležitější případ: $z(x, 0) = f(x) = 1$.

Úkol: nalézt **stabilní řešení** splňující uvedené podmínky.

První potíže: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod **nespojivosti**)?

Fourier nicméně našel řešení.

Studoval funkce, které **klesnou** k nule na **okolí** bodu $[0, 1]$.

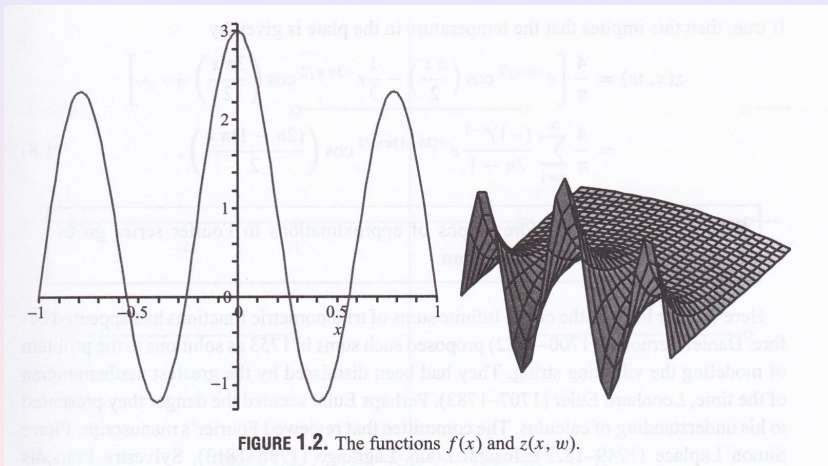
Tvrzení: Předpokládejme, že funkce f je tvaru

$$f(x) = a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + a_2 \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \cdots + a_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right),$$

kde $a_1, \dots, a_n$ jsou libovolné konstanty. Potom se bude teplota řídit vzorcem

$$z(x, w) = a_1 e^{-\pi w/2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cdots + a_n e^{-(2n-1)\pi w/2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Šíření tepla v pásku



Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru.

To vylučuje $f = 1$.

To se Fourierovi nelíbilo, protože v praxi to jde.

Fourier překonal i tuto potíž. Všiml si, že zvyšujeme-li n , dostaneme funkce, které se stále více **blíží** k $f = 1$.

Idea: co když těch funkcí vezmeme **nekonečně mnoho**?

Fourierův odvážný krok

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Je-li toto pravda, potom

$$\begin{aligned} z(x, w) &= \frac{4}{\pi} \left[e^{-\pi w/2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3} e^{-3\pi w/2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \dots \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} e^{-(2n-1)\pi w/2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$

(nekonečná řada funkcí).

Fourierova drzá funkce

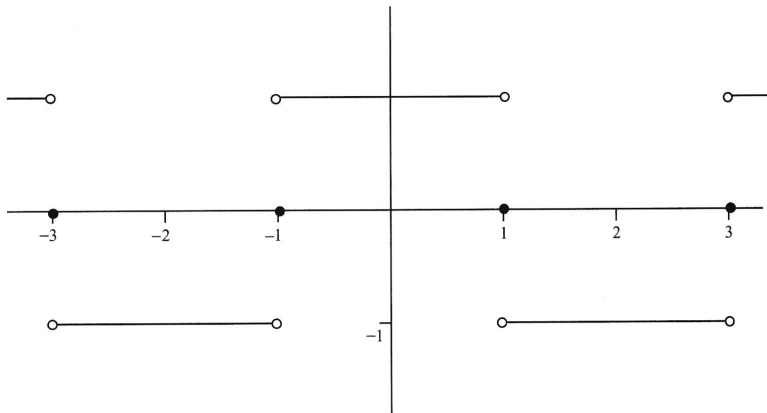


FIGURE 1.3. $f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2} + \dots \right]$.

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)
- Gaspard Monge (61)
- Siméon Denis Poisson (26)

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Na co to svést?

Nabízela se konvergence.

Chyba bude v konvergenci.

Nebude to konvergovat.

Lagrangeova argumentace: výraz definující f není definován pro všechna x , neboť řada absolutních hodnot koeficientů

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

diverguje.

Na jaře 1808 sepsal Siméon Denis Poisson zprávu komise o Fourierově *Teorii šíření tepla v tuhých tělesech*.

Závěr: práce neobsahuje nic nového ani zajímavého.

Fourier tvrdil, že jeho řada konverguje všude.

Svá tvrzení opíral o dva ožehavé předpoklady:

- kosinová řada dává smysl,
- lze ji integrovat člen po členu.

V roce 1829 se ukázalo, že měl pravdu.



Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805–1859

Cauchyův pozoruhodný výsledek

A.L. Cauchy (1821):

Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique

Na stránce 120 čteme:

Theorem

Necht' S je nekonečná řada spojitých funkcí,

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

Jestliže jsou jednotlivé členy této řady spojitě funkce na okolí bodu x , pak je na okolí x spojitá i funkce S .

Věta má jedinou chybu: *neplatí*.

Cauchyův důkaz

Chci: $|x - a| < \delta \Rightarrow |S(x) - S(a)| < \varepsilon$.

Cauchy začíná pozorováním:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(a)| &= |S_n(x) + R_n(x) - S_n(a) - R_n(a)| \\ &\leq |S_n(x) - S_n(a)| + |R_n(x)| + |R_n(a)|. \end{aligned}$$

Spojitosť S_n :

$$|S_n(x) - S_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } \delta \text{ dost malé.}$$

Konvergence S v a :

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \& \ |R_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } n \text{ dost velké.}$$

Jestliže nevidíte, co je na tom špatně, nebud'te zklamáni.
Matematikům to trvalo přes čtvrt století.

V čem je problém?

Spojitosť S_n :

$$|S_n(x) - S_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } \delta \text{ dost malé } \textit{závislé na } n.$$

Konvergence S v a :

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \& \ |R_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } n \text{ dost velké } \textit{závislé na } \delta.$$

Jak to spravit?

Je nutné jedno z toho zakázat.

Obvykle se zakazuje druhá závislost (*stejněměrná konvergence*).

Cauchy a věta o střední hodnotě

Cauchy 1823

Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal

Theorem

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$ a má derivaci v (a, b) , pak lze nalézt $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cauchyův důkaz věty o střední hodnotě

Vezmu δ tak malé, aby pro $|h| < \delta$ platilo

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < f'(x) + \varepsilon.$$

Definujme $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, kde $x_{i+1} = x_i + h$.

Potom

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} < f'(x_0) + \varepsilon$$

$$f'(x_1) - \varepsilon < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} < f'(x_1) + \varepsilon$$

$$f'(x_2) - \varepsilon < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} < f'(x_2) + \varepsilon$$

$\vdots$

$$f'(x_{n-1}) - \varepsilon < \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} < f'(x_{n-1}) + \varepsilon.$$

Cauchyův důkaz věty o střední hodnotě

Označ $A = \min f'$, $B = \max f'$, pak

$$A - \varepsilon < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} < B + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} < B + \varepsilon$$

$\vdots$

$$A - \varepsilon < \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} < B + \varepsilon.$$

Posčítáme, vydělíme:

$$A - \varepsilon < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < B + \varepsilon.$$

Najdu x_1 a x_2 : $f'(x_1) = A$, $f'(x_2) = B$ a využiji spojitosti derivace.

K větě o střední hodnotě

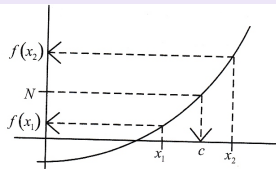


FIGURE 3.6. Intermediate value property in Cauchy's proof of the mean value theorem.

derivace a nabývání mezíhodnot

Wo ist ein Kern des Pudels?

Zdroje potíží jsou dva:

- práce s kvantifikátorem (predikátová logika),
- práce s nekonečnem.

Proč se učit práci s nekonečnem?

*“Lines that are parallel
meet at Infinity!”
Euclid repeatedly
heatedly urged.*

*Until he died,
and so reached that vicinity;
in it he found
that the damned things diverged.*

(Piet Hein (1905–1996): *Grooks VI*)

Proč se učit práci s kvantifikátorem a predikátové logice?



1734 George Berkeley: *The Analyst* (abuse of infinity, compensating errors, ...)

1784 Berlínská Akademie vypisuje cenu za *jasnou a precisní teorii nekonečna v matematice*.

Cenu získal Simon Antoine Jean L'Huilier (1750–1840).

Zachránce věty o střední hodnotě



Pierre Ossian Bonnett (1819–1892)



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

Nastoupil na universitu v Bonnu ke studiu práv.

Po čtyřech letech vyloučen bez titulu s tím, že se místo studiu věnuje pouze alkoholu a šermu.

Později nastoupil na univerzitu v Münsteru k pedagogickému studiu.

Zde potkal Christoffa Gudermanna, který jej obrátil k analýze.

V roce 1854 šokoval celý matematický svět svými prvními články.

Theorem

Položme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

kde a je liché celé číslo, $b \in (0, 1)$ a $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Potom f je v každém bodě spojitá a v žádném nemá derivaci.

Jsme svědky zrodu záplavy bizarních funkcí, jejichž zjevně jediným účelem je to, aby se co nejvíce lišily od těch poctivých funkcí, které sloužily nějakému účelu. Jsou nespojité, nebo třeba i spojité, ale nemají derivace. Za starých časů, když jsme zkonstruovali funkci, tak měla nějaký jasně daný praktický účel. Dnes je konstruujeme jen pro to, abychom usvědčili naše předky z omylů, a k ničemu jiném nám nejsou.

Henri Poincaré (1899)

*Odvracím se s odporem a hrůzou od té neblahé morové rány
způsobené funkcemi, které nemají derivace.*

Hermite, dopis Stieltjesovi (1893)

Zašla analýza příliš daleko?

Vzdálila se příliš od reality a přestala sloužit svému účelu?

Otázka representovatelnosti funkce nekonečnou trigonometrickou řadou byla díky Dirichletovi zodpovězena pro všechny funkce, které máme šanci potkat v přírodě. Avšak stojí za to studovat i ty funkce, na které Dirichletovy výsledky nestačí, a to ze dvou důvodů. Jednak nám mohou více objasnit základy infinitezimálního počtu. Ale hlavně proto, že mají úzký vztah k teorii čísel. A tam budou důležité právě ty funkce, které Dirichlet nestudoval.

Bernhard Riemann

Riemann ml pravdu. Když v roce 1896 Jacques Hadamard a Charles de la Vallée Poussin dokázali prvočíselnou větu, potřebovali k důkazu veškerou analýzu, kterou měli k dispozici.

A na úplný závěr jeden limerick

*A conjecture both deep and profound
Is whether a circle is round.
In a paper by Erdős,
Written in Kurdish,
A counterexample is found.*

(Anonymous)

The last slide

