# Drobné perličky na dně historie

Konference českých matematiků & O8MA
FEI VŠB-TUL Ostrava

Mirko Rokyta

KMA MFF UK Praha

6.4.2022

# 0. Úvod

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

> Jakýkoli jednoduchý problém se muže stát neřešitelným, stačí mu věnovat dostatečný počet zasedání.
>
> (Ze zákonů Edwarda A. Murphyho)

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

> Jakýkoli jednoduchý problém se muže stát neřešitelným, stačí mu věnovat dostatečný počet zasedání.
>
> (Ze zákonů Edwarda A. Murphyho)

Menu:

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

> Jakýkoli jednoduchý problém se muže stát neřešitelným, stačí mu věnovat dostatečný počet zasedání.
>
> (Ze zákonů Edwarda A. Murphyho)

Menu:

1. Omezená přesnost kalkulaček

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

> Jakýkoli jednoduchý problém se muže stát neřešitelným, stačí mu věnovat dostatečný počet zasedání.
>
> (Ze zákonů Edwarda A. Murphyho)

Menu:

1. Omezená přesnost kalkulaček
2. O čísle "*e*" v jednotkové krychli

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

> Jakýkoli jednoduchý problém se muže stát neřešitelným, stačí mu věnovat dostatečný počet zasedání.
>
> (Ze zákonů Edwarda A. Murphyho)

Menu:

1. Omezená přesnost kalkulaček
2. O čísle "*e*" v jednotkové krychli
3. Jak souvisí "protilehlá ku přeponě" s Taylorem?

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

> Jakýkoli jednoduchý problém se muže stát neřešitelným, stačí mu věnovat dostatečný počet zasedání.
>
> (Ze zákonů Edwarda A. Murphyho)

Menu:

1. Omezená přesnost kalkulaček
2. O čísle "*e*" v jednotkové krychli
3. Jak souvisí "protilehlá ku přeponě" s Taylorem?
4. Byl Gauss genius?

- **Jeden složitější problém nebo více jednodušších?**

> Jakýkoli jednoduchý problém se muže stát neřešitelným, stačí mu věnovat dostatečný počet zasedání.
>
> (Ze zákonů Edwarda A. Murphyho)

Menu:

1. Omezená přesnost kalkulaček
2. O čísle "*e*" v jednotkové krychli
3. Jak souvisí "protilehlá ku přeponě" s Taylorem?
4. Byl Gauss genius?

Jednotící prvek... krása myšlenky, vhled do problému.

# 1. Pozdravena budiž kalkulačka, vzpomínka z mládí

Courtesy *Hostinec U kamenného stolu*

Courtesy *Hostinec U kamenného stolu*

- Podle Edita Pelantová; Miloslav Znojil: *Můžeme věřit své vlastní kalkulačce?* Rozhledy M-F, 85,4 (2010), 11–18.

  `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146379/Rozhledy_085-2010-4_3.pdf`.

Courtesy *Hostinec U kamenného stolu*

- Podle Edita Pelantová; Miloslav Znojil: *Můžeme věřit své vlastní kalkulačce?* Rozhledy M-F, 85,4 (2010), 11–18.

  **https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146379/Rozhledy_085-2010-4_3.pdf**.

  Inspirováno přednáškou Jeana-Michela Mullera.

Courtesy *Hostinec U kamenného stolu*

- Podle Edita Pelantová; Miloslav Znojil: *Můžeme věřit své vlastní kalkulačce?* Rozhledy M-F, 85,4 (2010), 11–18.

  **https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146379/Rozhledy_085-2010-4_3.pdf.**

  Inspirováno přednáškou Jeana-Michela Mullera.

**Nebojte se iracionality.**

Vložte do našeho ústavu *e* Kč. Každý rok odečteme poplatek 1 Kč a vynásobíme zůstatek počtem let, které uplynuly od původního vkladu. Po 25 letech vyplatíme zůstatek.

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | $-4.375 \cdot 10^{21}$ |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | $-4.375 \cdot 10^{21}$ |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | $-4.375 \cdot 10^{21}$ |
| 20 míst | |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | $-4.375 \cdot 10^{21}$ |
| 20 míst | 615 990 |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | $-4.375 \cdot 10^{21}$ |
| 20 míst | 615 990 |
| 21 míst | |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | $-4.375 \cdot 10^{21}$ |
| 20 míst | 615 990 |
| 21 míst | −4 458 |

- **Výpočet na kalkulačce, $e$ s přesností na . . .**

| přesnost | výše vkladu po 25 letech |
|---|---|
| 5 míst | $2.818 \cdot 10^{20}$ |
| 9 míst | $2.390 \cdot 10^{16}$ |
| 4 místa | $-4.375 \cdot 10^{21}$ |
| 20 míst | 615 990 |
| 21 míst | −4 458 |

Situace je zralá na to, abychom provedli analýzu problému.

## Analýza situace "s přesným $e$"

$a_0 = e$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$a_0 = e$

$a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$a_0 = e$

$a_1 = 1 \cdot (e - 1)$

$a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1 \cdot (e - 1) \qquad a_1 = 1 \cdot \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \right)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1)$$

$$a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1)$$

$$a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23}-1)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23}-1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!} + \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \cdots\right)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23}-1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!} + \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \cdots\right)$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24}-1)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23}-1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!} + \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \cdots\right)$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24}-1) \qquad a_{25} = 25!\cdot\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \cdots\right)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23}-1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!} + \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \cdots\right)$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24}-1) \qquad a_{25} = 25!\cdot\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26\cdot 27} + \frac{1}{26\cdot 27\cdot 28} + \cdots\Big)$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23}-1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!} + \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \cdots\right)$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24}-1) \qquad a_{25} = 25!\cdot\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26\cdot 27} + \frac{1}{26\cdot 27\cdot 28} + \cdots\Big)$$

$$0 < a_{25} < 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{26^3} + \cdots$$

## Analýza situace "s přesným $e$"

$$a_0 = e \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$a_1 = 1\cdot(e-1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1-1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2-1) \qquad a_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23}-1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!} + \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \cdots\right)$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24}-1) \qquad a_{25} = 25!\cdot\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26\cdot 27} + \frac{1}{26\cdot 27\cdot 28} + \cdots\Big)$$

$$0 < a_{25} < 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{26^3} + \cdots < 1.04$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$a_0 = e_{24}$

$a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1 \cdot (e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1 \cdot \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!} \right)$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right)$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right) = 1$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right) = 1$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24} - 1) \qquad a_{25} = 25!\cdot 0$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right) = 1$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24} - 1) \qquad a_{25} = 25!\cdot 0$$

$$\approx 10^{25}\cdot \text{"skoro nula"}$$

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right) = 1$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24} - 1) \qquad a_{25} = 25!\cdot 0$$

$$\approx 10^{25}\cdot \text{"skoro nula"}$$

**Ponaučení:**

- Zde bylo $|e - e_{24}| < 6\cdot 10^{-26}$.

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right) = 1$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24} - 1) \qquad a_{25} = 25!\cdot 0$$

$$\approx 10^{25}\cdot \text{"skoro nula"}$$

**Ponaučení:**

- Zde bylo $|e - e_{24}| < 6\cdot 10^{-26}$. Žádná *přesnost* nemusí být dostatečně *přesná*,

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right) = 1$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24} - 1) \qquad a_{25} = 25!\cdot 0$$

$$\approx 10^{25}\cdot \text{"skoro nula"}$$

**Ponaučení:**

- Zde bylo $|e - e_{24}| < 6\cdot 10^{-26}$. Žádná *přesnost* nemusí být dostatečně *přesná*, když nevíme *přesně*, jakou potřebujeme *přesnost*.

## Analýza situace "s přibližným $e$"

$$a_0 = e_{24} \qquad a_0 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}$$

$$a_1 = 1\cdot(e_{24} - 1) \qquad a_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) \qquad a_2 = 2!\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{24!}\right)$$

$$\cdots$$

$$a_{24} = 24\cdot(a_{23} - 1) \qquad a_{24} = 24!\cdot\left(\frac{1}{24!}\right) = 1$$

$$a_{25} = 25\cdot(a_{24} - 1) \qquad a_{25} = 25!\cdot 0$$

$$\approx 10^{25}\cdot \text{"skoro nula"}$$

**Ponaučení:**

- Zde bylo $|e - e_{24}| < 6\cdot 10^{-26}$. Žádná *přesnost* nemusí být dostatečně *přesná*, když nevíme *přesně*, jakou potřebujeme *přesnost*.
- Nevěřte kalkulačkám, i když dary přinášejí.

# 2. Sčítání přes jednotku a číslo *e*.

- **Úloha**

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je.

- **Úloha**

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1.

- **Úloha**

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

- **Úloha**

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

| Generovaná čísla | Počet pokusů |
|---|---|

- **Úloha**

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

| Generovaná čísla | Počet pokusů |
|---|---|
| $0,0586 \quad 0,9563$ | |

- **Úloha**

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

| Generovaná čísla | Počet pokusů |
|---|---|
| $0,0586 \quad 0,9563$ | 2 |

## Úloha

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

| Generovaná čísla | | | Počet pokusů |
|---|---|---|---|
| $0,0586$ | $0,9563$ | | 2 |
| $0,1755$ | $0,5780$ | $0,5351$ | 3 |

## Úloha

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

| Generovaná čísla | | | Počet pokusů |
|---|---|---|---|
| $0,0586$ | $0,9563$ | | 2 |
| $0,1755$ | $0,5780$ | $0,5351$ | 3 |
| $0,2272$ | $0,9138$ | | 2 |

## Úloha

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

| Generovaná čísla | | | | | Počet pokusů |
|---|---|---|---|---|---|
| $0,0586$ | $0,9563$ | | | | 2 |
| $0,1755$ | $0,5780$ | $0,5351$ | | | 3 |
| $0,2272$ | $0,9138$ | | | | 2 |
| $0,0037$ | $0,0540$ | $0,5720$ | $0,3695$ | $0,5332$ | 5 |

## Úloha

Generujme náhodná čísla z intervalu $(0, 1)$ a sčítejme je. Evidujme počet pokusů potřebných k tomu, aby takový součet překročil číslo 1. Jaký průměrný počet pokusů potřebujeme, pokud tento experiment opakujeme dostatečně často?

| Generovaná čísla | | | | | Počet pokusů |
|---|---|---|---|---|---|
| $0,0586$ | $0,9563$ | | | | 2 |
| $0,1755$ | $0,5780$ | $0,5351$ | | | 3 |
| $0,2272$ | $0,9138$ | | | | 2 |
| $0,0037$ | $0,0540$ | $0,5720$ | $0,3695$ | $0,5332$ | 5 |

Průměr = 3 (Při čtyřech opakováních)

# Počet opakování Jednotlivé průměry

| Počet opakování | Jednotlivé průměry | | |
|---|---|---|---|
| $n = 11$ | 2.3636 | 2.7272 | 2.9090 |

| Počet opakování | Jednotlivé průměry | | |
|---|---|---|---|
| $n = 11$ | 2.3636 | 2.7272 | 2.9090 |
| $n = 111$ | 2.7297 | 2.8378 | 2.8018 |

| Počet opakování | Jednotlivé průměry | | |
|---|---|---|---|
| $n = 11$ | 2.3636 | 2.7272 | 2.9090 |
| $n = 111$ | 2.7297 | 2.8378 | 2.8018 |
| $n = 1\,111$ | 2.6921 | 2.7290 | 2.7380 |

| Počet opakování | Jednotlivé průměry | | |
|---|---|---|---|
| $n = 11$ | 2.3636 | 2.7272 | 2.9090 |
| $n = 111$ | 2.7297 | 2.8378 | 2.8018 |
| $n = 1\,111$ | 2.6921 | 2.7290 | 2.7380 |
| ... | | ... | |

| Počet opakování | Jednotlivé průměry | | |
|---|---|---|---|
| $n = 11$ | 2.3636 | 2.7272 | 2.9090 |
| $n = 111$ | 2.7297 | 2.8378 | 2.8018 |
| $n = 1\,111$ | 2.6921 | 2.7290 | 2.7380 |
| $\dots$ | | $\dots$ | |
| $n = 111\,111$ | 2.7141 | 2.7188 | 2.7186 |

| Počet opakování | Jednotlivé průměry | | |
|---|---|---|---|
| $n = 11$ | 2.3636 | 2.7272 | 2.9090 |
| $n = 111$ | 2.7297 | 2.8378 | 2.8018 |
| $n = 1\,111$ | 2.6921 | 2.7290 | 2.7380 |
| $\dots$ | | $\dots$ | |
| $n = 111\,111$ | 2.7141 | 2.7188 | 2.7186 |

**Tvrzení**

*Buďte $x_1, x_2, \dots, x_n$ náhodně rovnoměrně rozděleny v intervalu (0,1), přičemž platí*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq 1\,, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n > 1\,.$$

| Počet opakování | Jednotlivé průměry | | |
|---|---|---|---|
| $n = 11$ | 2.3636 | 2.7272 | 2.9090 |
| $n = 111$ | 2.7297 | 2.8378 | 2.8018 |
| $n = 1\,111$ | 2.6921 | 2.7290 | 2.7380 |
| $\dots$ | | $\dots$ | |
| $n = 111\,111$ | 2.7141 | 2.7188 | 2.7186 |

**Tvrzení**

*Buďte $x_1, x_2, \dots, x_n$ náhodně rovnoměrně rozděleny v intervalu (0,1), přičemž platí*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq 1\,, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n > 1\,.$$

*Potom průměr z počtu n, při opakování tohoto procesu, konverguje k číslu $e \approx 2.718\,281\,828\,459\dots$*

## Co to je, když. . . :

1 pokus nestačí:

## Co to je, když. . . :

| | |
|---|---|
| 1 pokus nestačí: | $\left\lvert\{x_1 \leq 1, x_1 \in (0,1)\}\right\rvert$ |

## Co to je, když. . . :

| | |
|---|---|
| 1 pokus nestačí: | $\left\lvert\{x_1 \leq 1, x_1 \in (0,1)\}\right\rvert = P[n > 1]$ |

## Co to je, když. . . :

| | |
|---|---|
| 1 pokus nestačí: | $\left\lvert\{x_1 \leq 1, x_1 \in (0,1)\}\right\rvert = P[n > 1]$ |
| 2 pokusy nestačí: | $\left\lvert\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right\rvert$ |

Co to je, když. . . :

| | |
|---|---|
| 1 pokus nestačí: | $\left\lvert\{x_1 \leq 1, x_1 \in (0,1)\}\right\rvert = P[n > 1]$ |
| 2 pokusy nestačí: | $\left\lvert\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right\rvert = P[n > 2]$ |

Co to je, když. . . :

| | |
|---|---|
| 1 pokus nestačí: | $\left\{x_1 \leq 1, x_1 \in (0,1)\right\}\Big\| = P[n > 1]$ |
| 2 pokusy nestačí: | $\left\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\right\}\Big\| = P[n > 2]$ |

Obecně je

$$P[n > k] = \left|\left\{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 1, x_j \in (0,1)\right\}\right|.$$

Co to je, když. . . :

| | |
|---|---|
| 1 pokus nestačí: | $\left\{x_1 \leq 1, x_1 \in (0,1)\right\}\Big\vert = P[n > 1]$ |
| 2 pokusy nestačí: | $\left\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\right\}\Big\vert = P[n > 2]$ |

Obecně je

$$P[n > k] = \left\vert\left\{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 1, x_j \in (0,1)\right\}\right\vert.$$

Přitom platí

$$P[n = k] = P[n > k - 1] - P[n > k].$$

Co to je, když. . . :

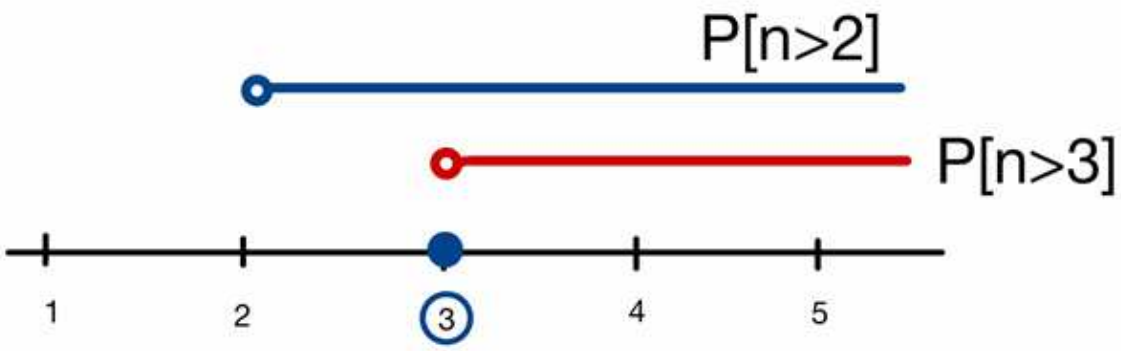
| | |
|---|---|
| 1 pokus nestačí: | $\left\{x_1 \leq 1, x_1 \in (0,1)\right\}\Big\| = P[n > 1]$ |
| 2 pokusy nestačí: | $\left\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\right\}\Big\| = P[n > 2]$ |

Obecně je

$$P[n > k] = \left|\left\{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 1, x_j \in (0,1)\right\}\right|.$$

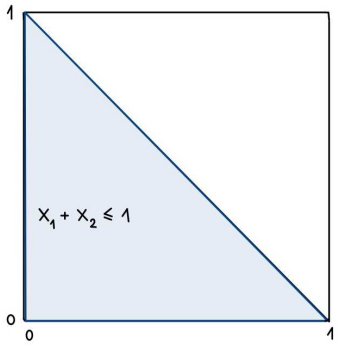
Přitom platí

$$P[n = k] = P[n > k - 1] - P[n > k].$$

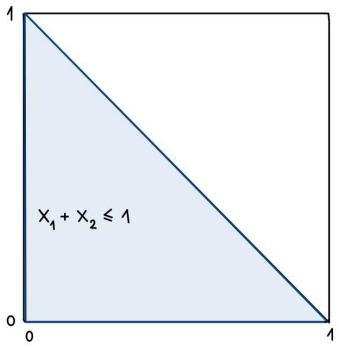


## 2 dimenze

## 2 dimenze ($P[n > 2]$)

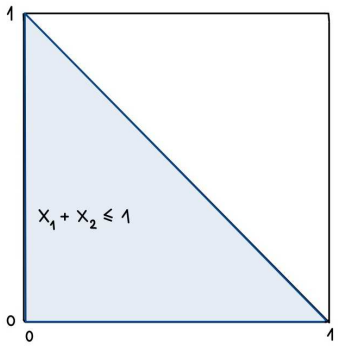


## 2 dimenze ($P[n > 2]$)



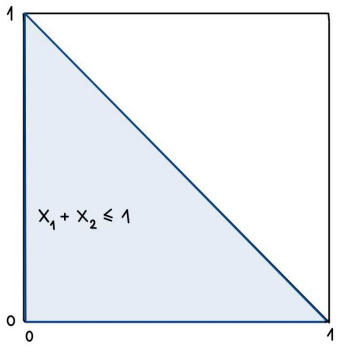

$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right|$$

## 2 dimenze ($P[n > 2]$)




$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

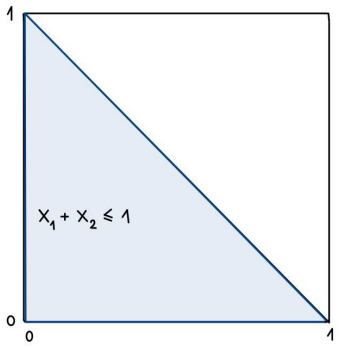
- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)




$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

- **3 dimenze**

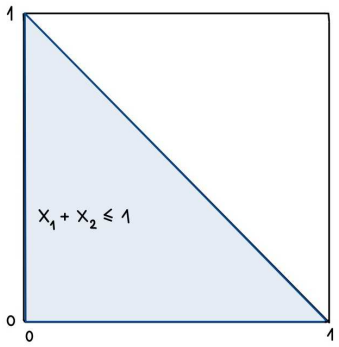
- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)




$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)

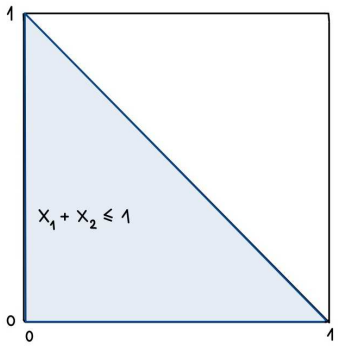



$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1)^3\right|$$

- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)

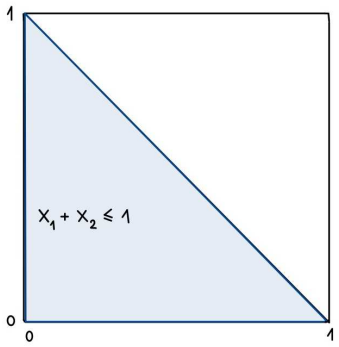



$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1)^3\right| = \frac{1}{6}$$

- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)



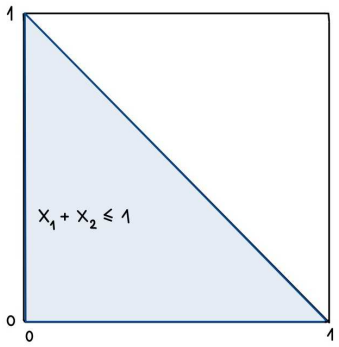

$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1)^3\right| = \frac{1}{6}$$

- **k dimenzí**

- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)



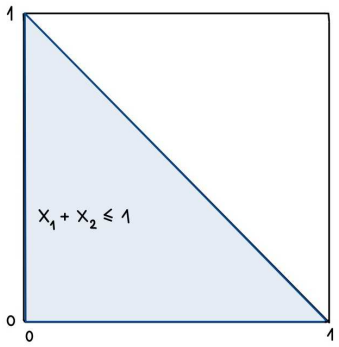

$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1)^3\right| = \frac{1}{6}$$

- **k dimenzí** ($P[n > k]$)

- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)




$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

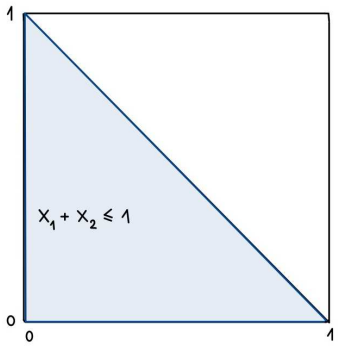
- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1)^3\right| = \frac{1}{6}$$

- **k dimenzí** ($P[n > k]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| =$$

- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)




$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

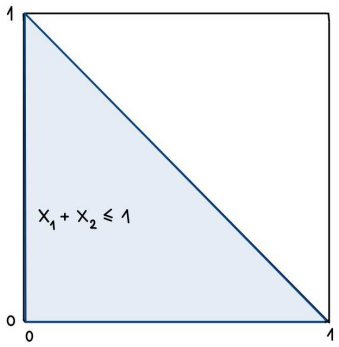
- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1)^3\right| = \frac{1}{6}$$

- **k dimenzí** ($P[n > k]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{k!}\left|(0,1)^k\right|$$

- **2 dimenze** ($P[n > 2]$)




$$\left|\{x_1 + x_2 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,1)^2\right| = \frac{1}{2}$$

- **3 dimenze** ($P[n > 3]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1)^3\right| = \frac{1}{6}$$

- **k dimenzí** ($P[n > k]$)

$$\left|\{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 1, x_j \in (0,1)\}\right| = \frac{1}{k!}\left|(0,1)^k\right| = \frac{1}{k!}$$

- **Finále:**

$P_k := P[n{=}k]$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k]$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k{-}1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k{-}1}{k!}.$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} =$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + \cdots$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} = 1{\cdot}P_1 + 2{\cdot}P_2 + 3{\cdot}P_3 + \cdots \qquad (P_1 = 0)$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} = 1{\cdot}P_1 + 2{\cdot}P_2 + 3{\cdot}P_3 + \cdots \qquad (P_1 = 0)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k\, P_k$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} = 1{\cdot}P_1 + 2{\cdot}P_2 + 3{\cdot}P_3 + \cdots \qquad (P_1 = 0)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k\, P_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!}$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} = 1{\cdot}P_1 + 2{\cdot}P_2 + 3{\cdot}P_3 + \cdots \qquad (P_1 = 0)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k\, P_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!}$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} = 1{\cdot}P_1 + 2{\cdot}P_2 + 3{\cdot}P_3 + \cdots \qquad (P_1 = 0)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k\,P_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

- **Finále:**

$$P_k := P[n{=}k] = P[n > k{-}1] - P[n > k] = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Pozn:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1. \qquad \text{(d.cv.)}$$

- **Počet pokusů (expectation):**

$$\widetilde{N} = 1{\cdot}P_1 + 2{\cdot}P_2 + 3{\cdot}P_3 + \cdots \qquad (P_1 = 0)$$

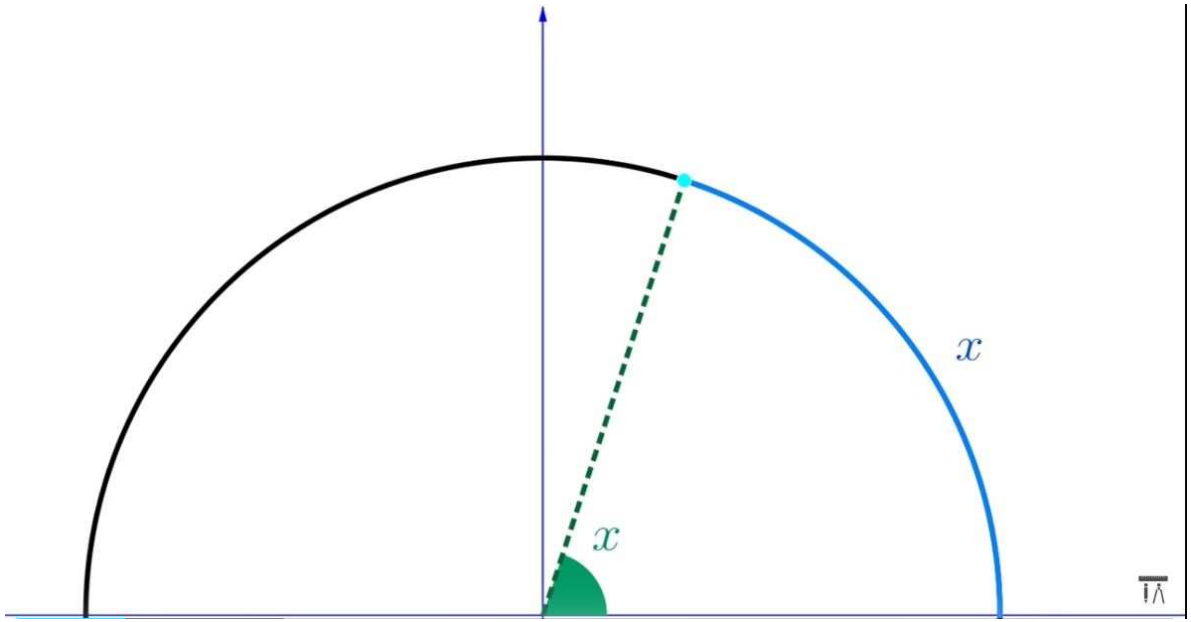
$$= \sum_{k=2}^{\infty} k\,P_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e\,.$$

# 3. Taylor, zakletý v jednotkovém kruhu

Courtesy *Mathemaniac*, `https://www.youtube.com/watch?v=x09IsbVZeXo&list=LL`

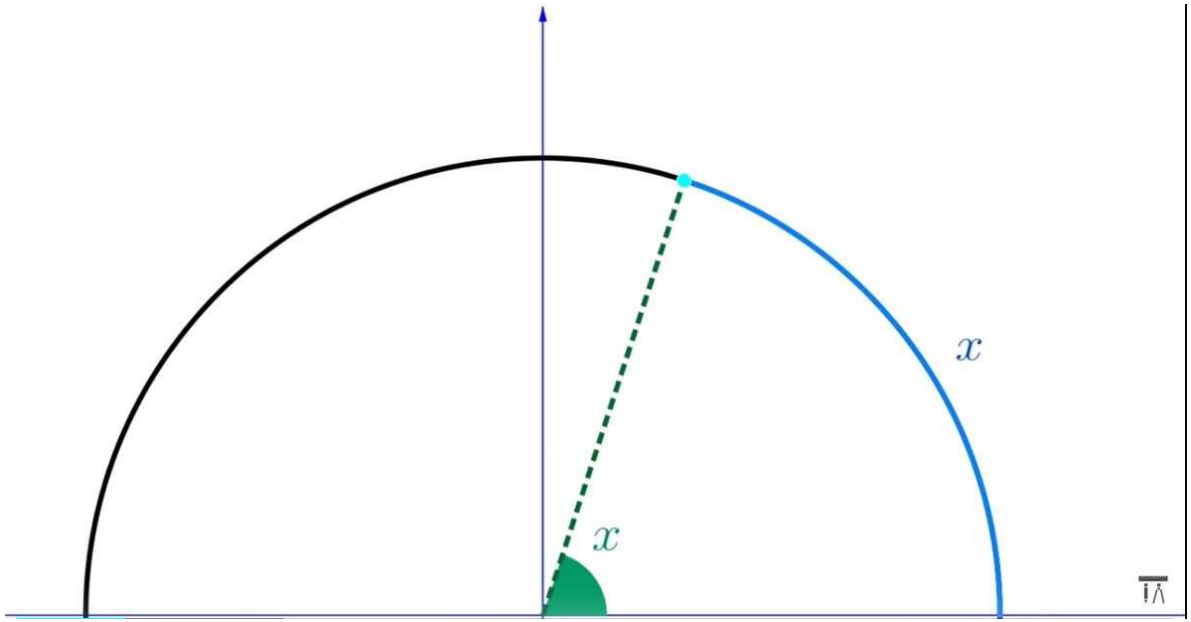
# 3. Taylor, zakletý v jednotkovém kruhu

Courtesy *Mathemaniac*, `https://www.youtube.com/watch?v=x09IsbVZeXo&list=LL`



# 3. Taylor, zakletý v jednotkovém kruhu

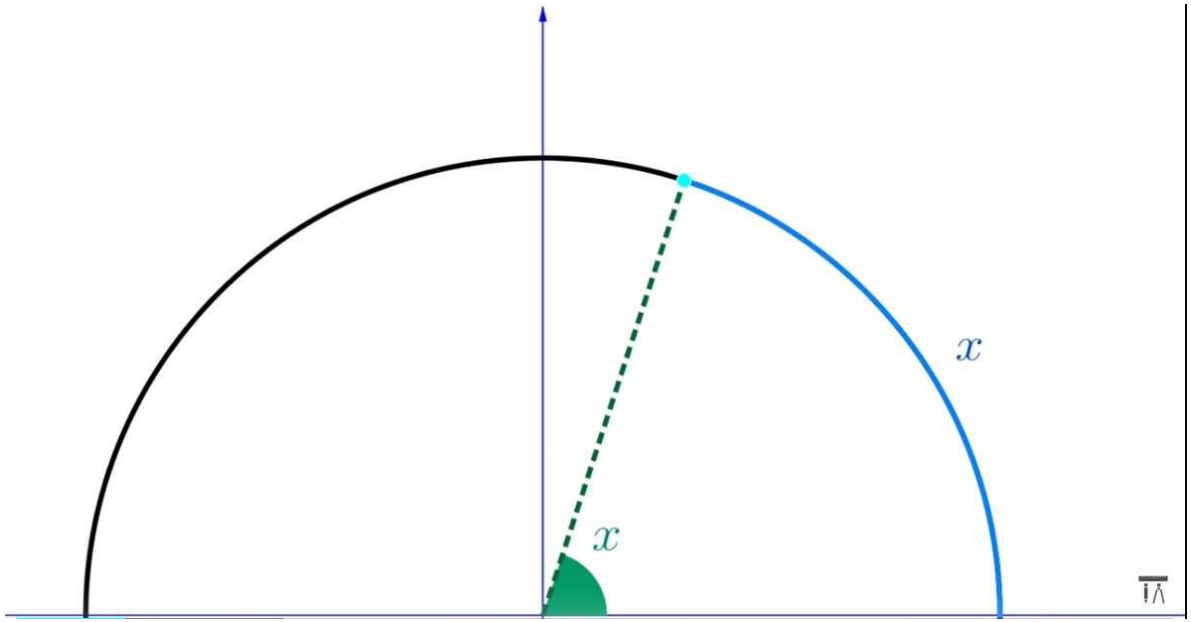
Courtesy *Mathemaniac*, `https://www.youtube.com/watch?v=x09IsbVZeXo&list=LL`




$\sin x =$ $y$-ová souřadnice bleděmodrého bodu

# 3. Taylor, zakletý v jednotkovém kruhu

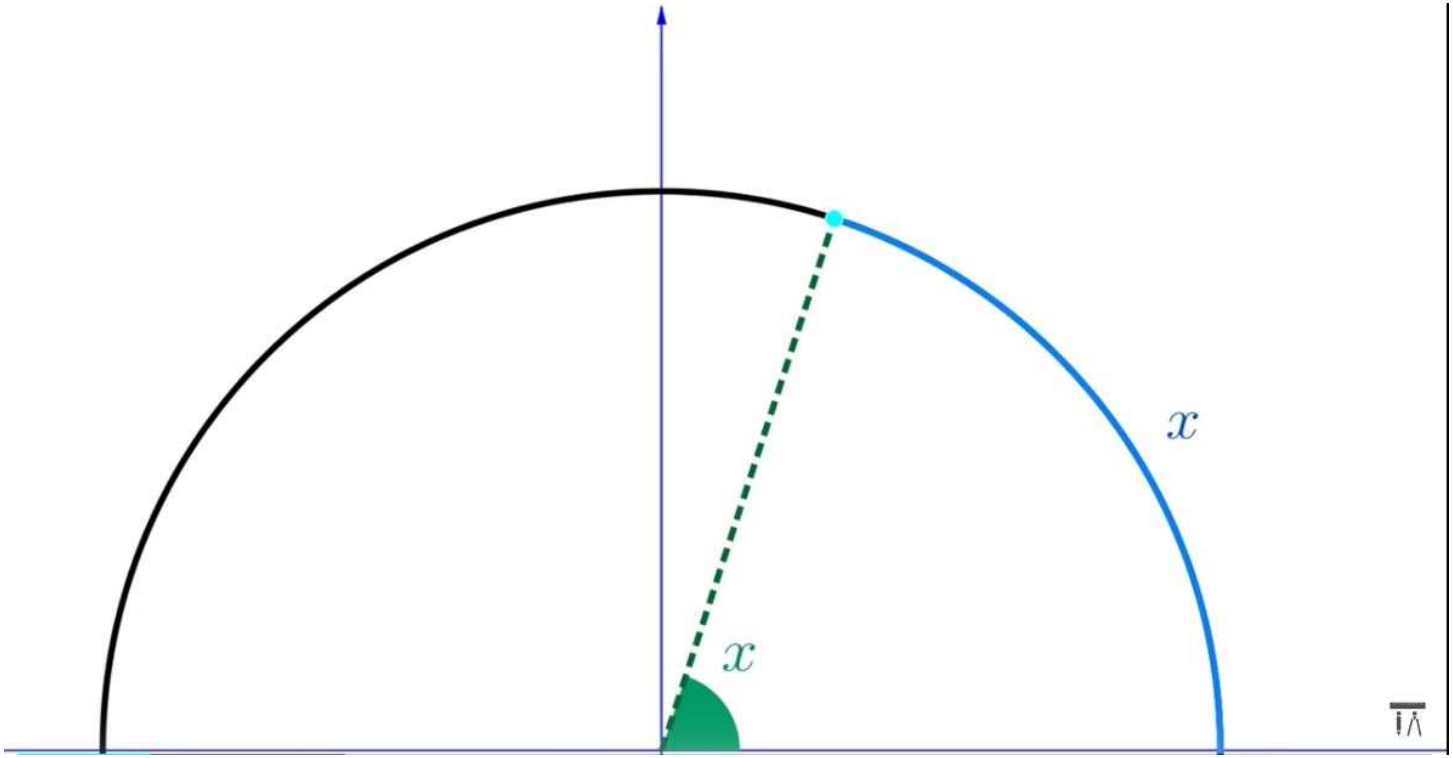
Courtesy *Mathemaniac*, `https://www.youtube.com/watch?v=x09IsbVZeXo&list=LL`

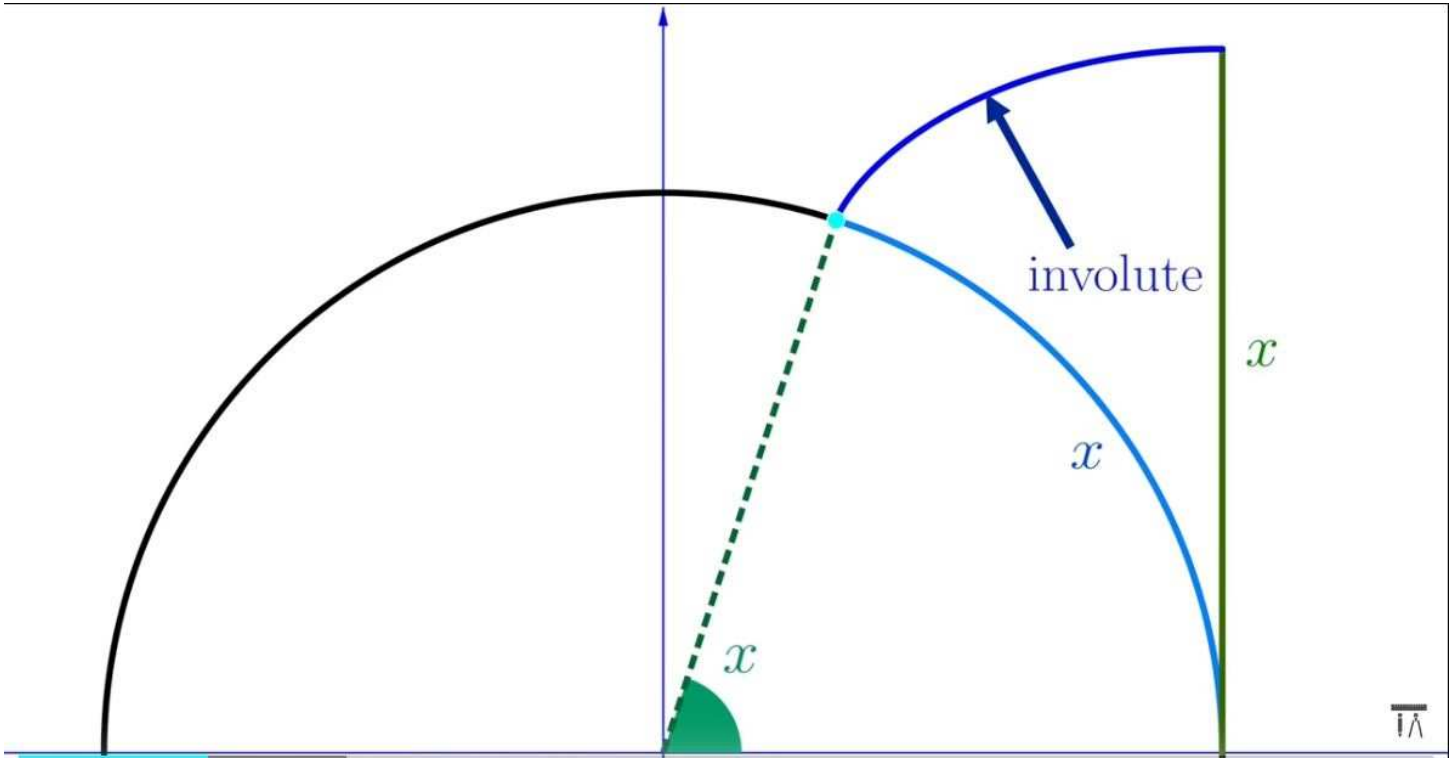


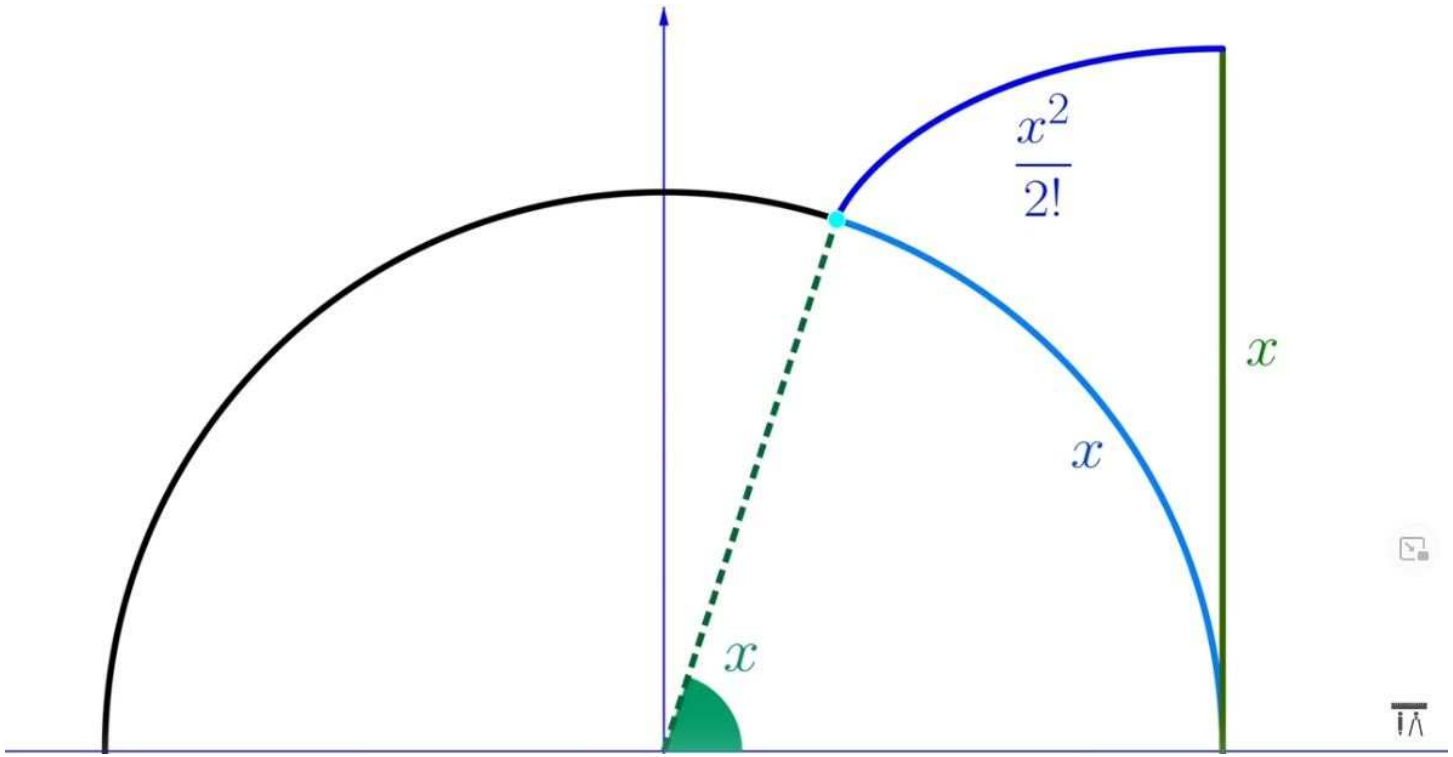

$\sin x = y$-ová souřadnice bleděmodrého bodu

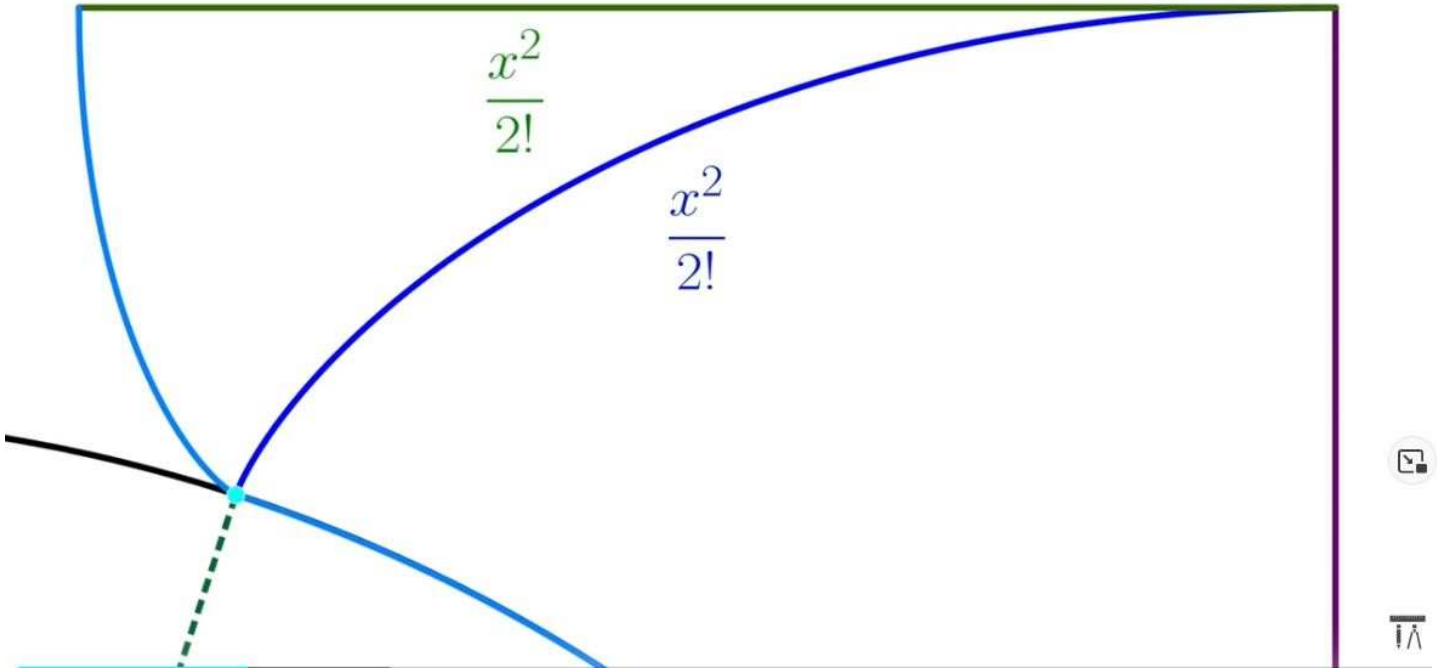
vs.

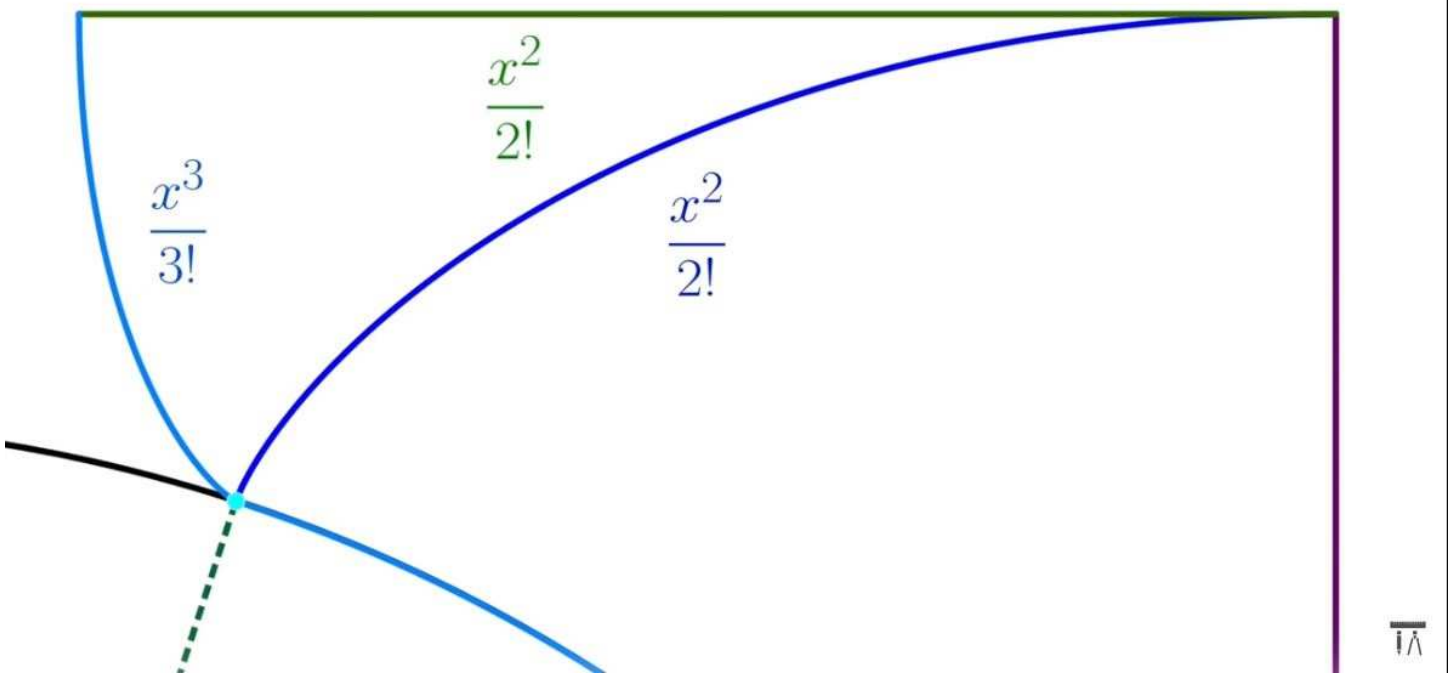
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

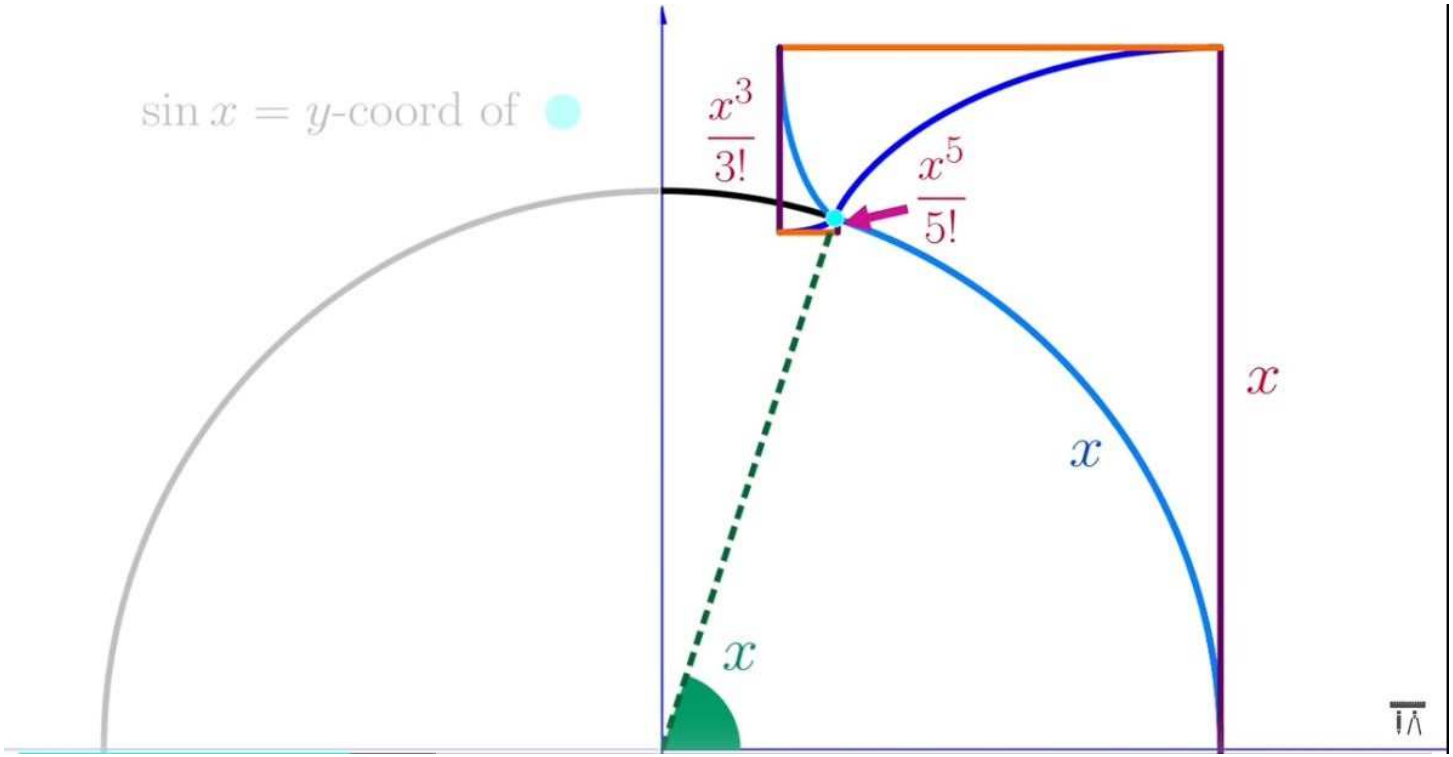

$x$
$x$


involute
$x$
$x$
$x$

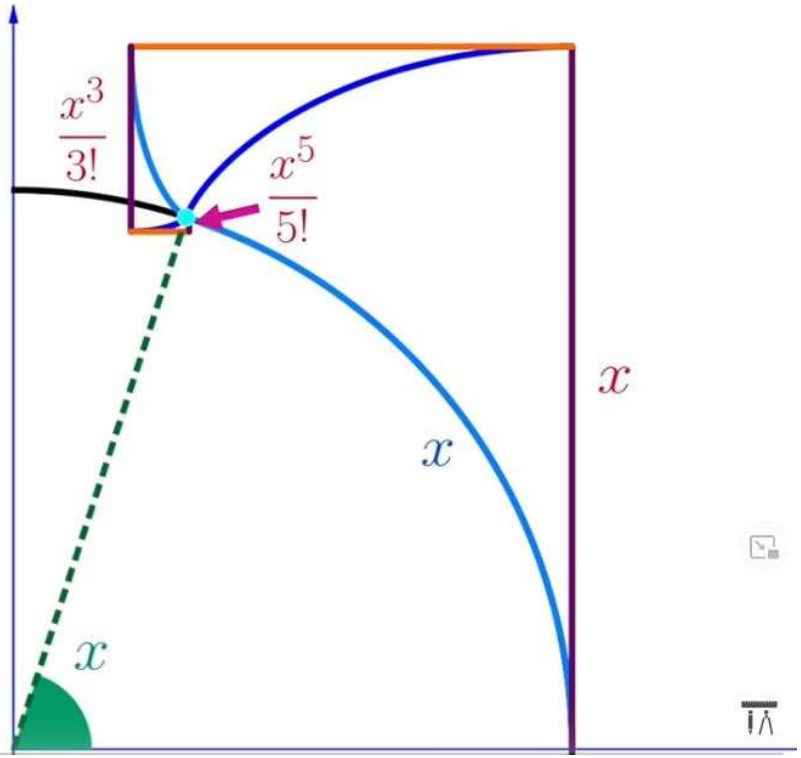

$\frac{x^2}{2!}$
$x$
$x$
$x$

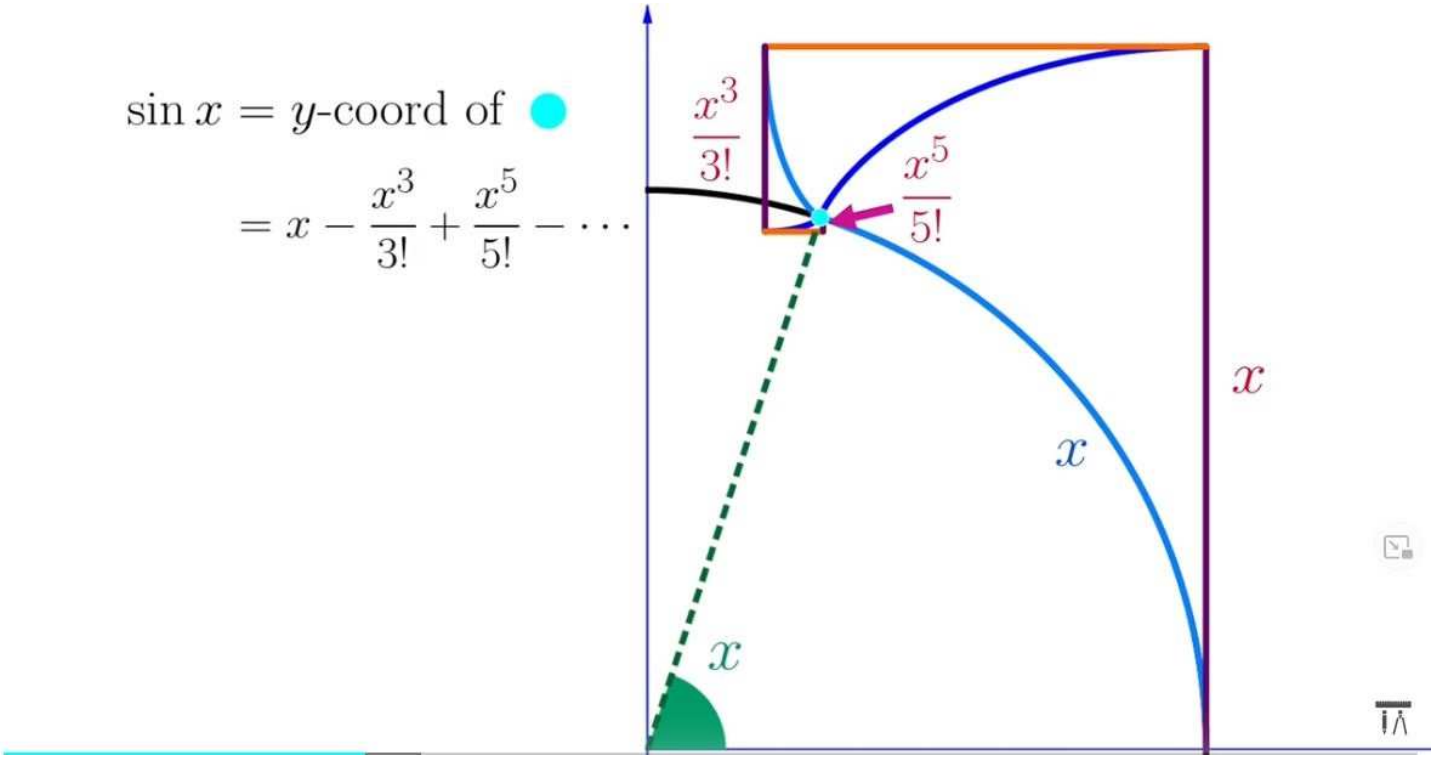

$\frac{x^2}{2!}$
$\frac{x^2}{2!}$


$\frac{x^2}{2!}$
$\frac{x^3}{3!}$
$\frac{x^2}{2!}$

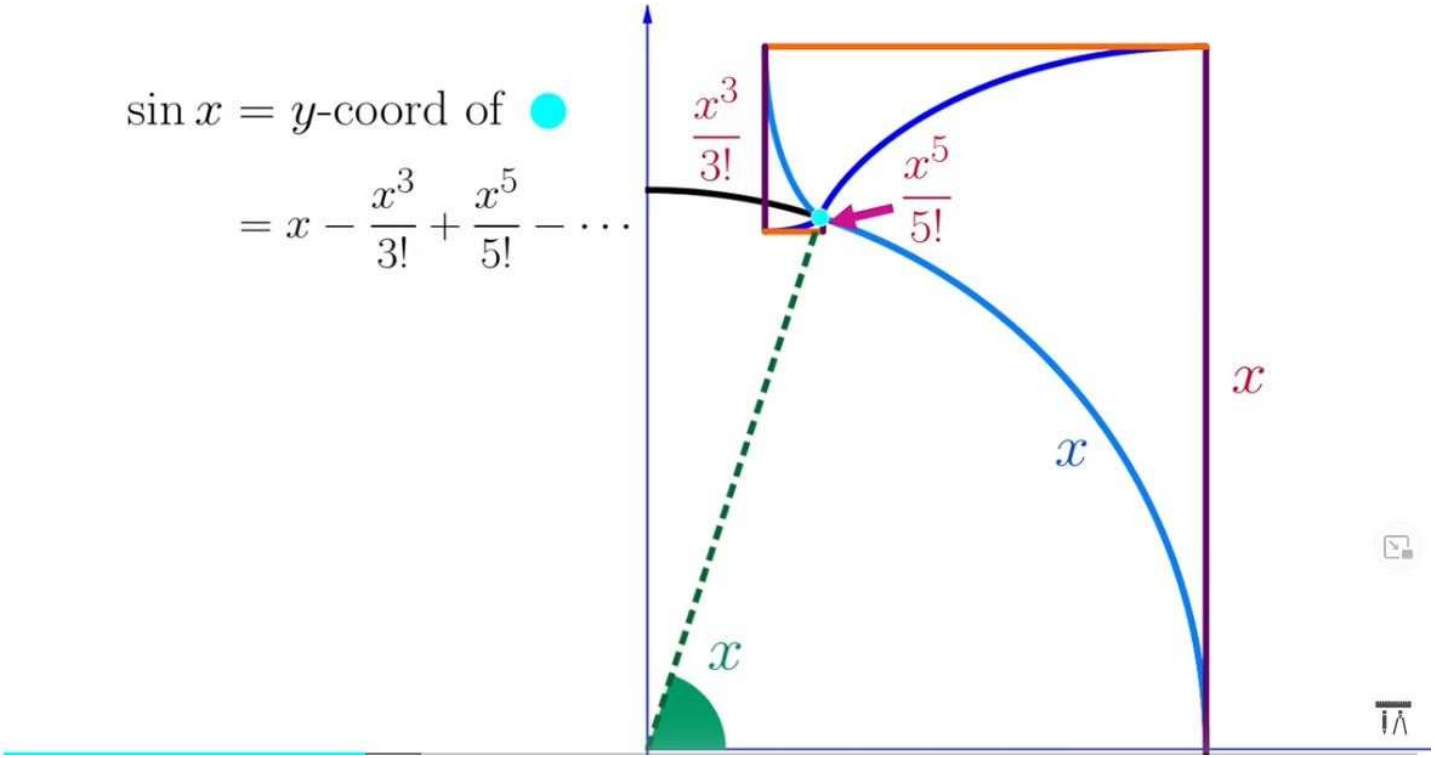

$\sin x = y$-coord of
$\frac{x^3}{3!}$
$\frac{x^5}{5!}$
$x$
$x$
$x$

$$\sin x = y\text{-coord of}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$






$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$




$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

# 4. Geniální uhodnutí nebo dobrý postřeh?

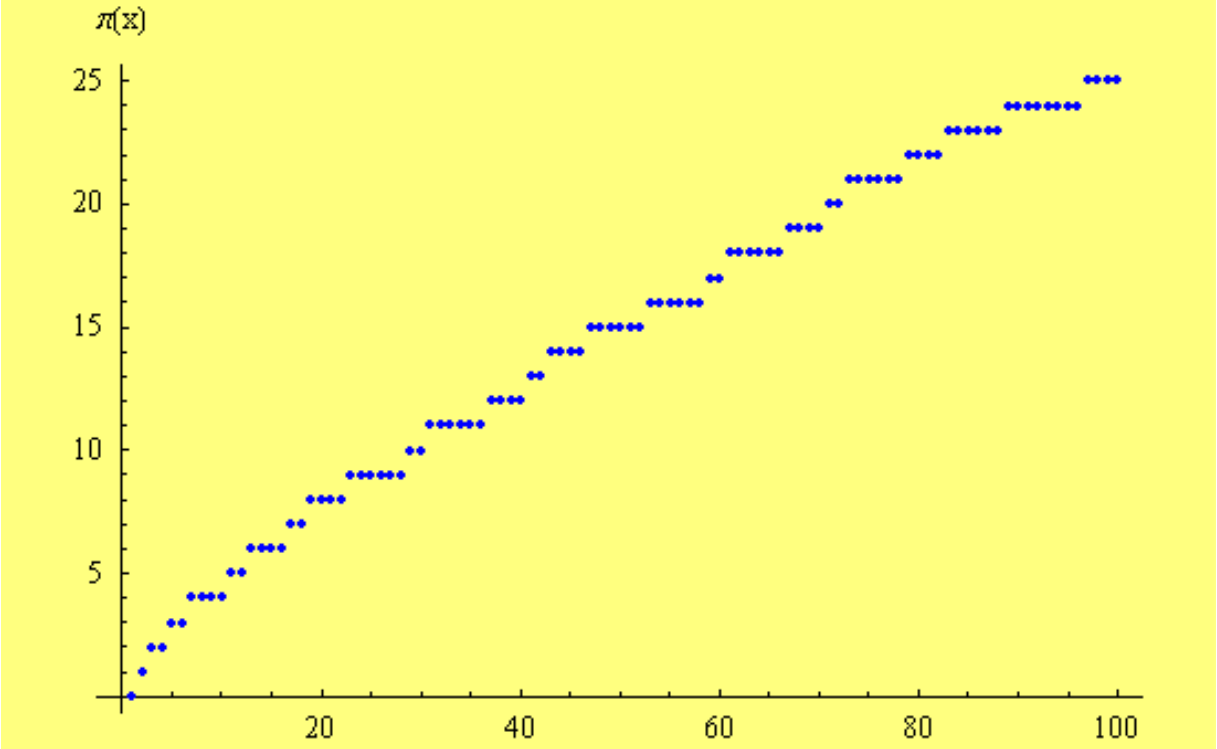
Označme

Označme

$$\pi(x) = \text{počet prvočísel, menších než } x.$$

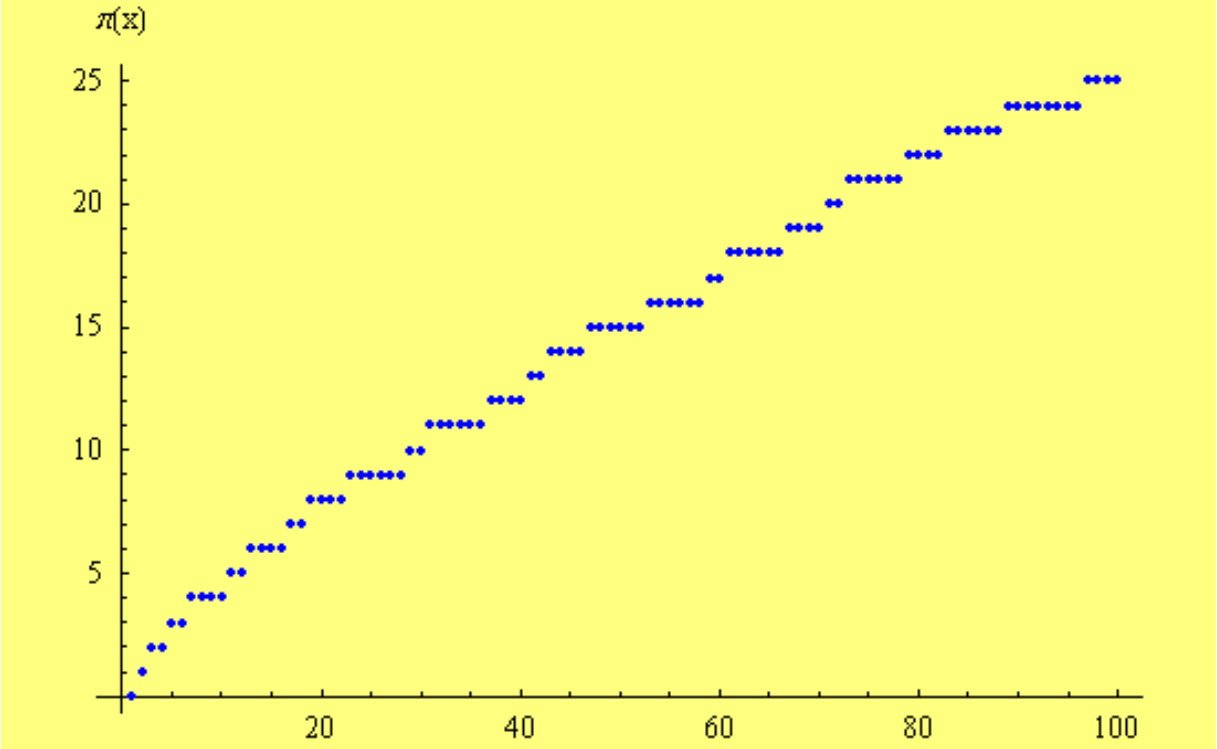
Označme

$$\pi(x) = \text{počet prvočísel, menších než } x.$$



Označme

$$\pi(x) = \text{počet prvočísel, menších než } x.$$




**Prvočíselná věta** $\approx$ uměli bychom tím proložit "co nejpřesněji" křivku, popsanou pomocí "známých" funkcí?

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

Gaussův odhad se zdá být "geniálně uhodnutý", přitom však není zas tak obtížné (pokud jsme všímaví) odhad $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ zpozorovat.

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

Gaussův odhad se zdá být "geniálně uhodnutý", přitom však není zas tak obtížné (pokud jsme všímaví) odhad $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ zpozorovat. (Hodně těžké je až dokázat jej.)

R. **1792**, ve věku 15 let (!), vyslovil *C. F. Gauss* (bez důkazu) domněnku (dnes známou jako **prvočíselná věta**):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}\,.$$

Gaussův odhad se zdá být "geniálně uhodnutý", přitom však není zas tak obtížné (pokud jsme všímaví) odhad $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ zpozorovat. (Hodně těžké je až dokázat jej.) Viz následující tabulka.

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ |
|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ |
|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ |
|---:|---:|---:|
| 1 000 | 168 | 5,952 |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ |
|---:|---:|---:|
| 1 000 | 168 | 5,952 |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ |
|---:|---:|---:|
| 1 000 | 168 | 5,952 |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---:|---:|---:|---:|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |

Rozdíl v poměrech je přibližně:

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026$ |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10$$

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n}$$

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

Odtud plyne prvočíselná hypotéza:

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10^n$$

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

Odtud plyne prvočíselná hypotéza:

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10^n \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\pi(x)} \approx \ln x$$

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

Odtud plyne prvočíselná hypotéza:

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10^n \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\pi(x)} \approx \ln x \quad \Longrightarrow \quad \pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$

| $x$ | $\pi(x)$ | Poměr $\frac{x}{\pi(x)}$ | Rozdíl v poměrech |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 5,952 | — |
| 10 000 | 1 229 | 8,137 | 2,185 |
| 100 000 | 9 592 | 10,425 | 2,288 |
| 1 000 000 | 78 498 | 12,739 | 2,314 |
| 10 000 000 | 664 579 | 15,047 | 2,308 |
| Rozdíl v poměrech je přibližně: | | | $2,3026 \approx \ln 10$ |

Tedy:

$$\frac{10^{n+1}}{\pi(10^{n+1})} - \frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10 = \ln \frac{10^{n+1}}{10^n} = \ln 10^{n+1} - \ln 10^n.$$

Odtud plyne prvočíselná hypotéza:

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \ln 10^n \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\pi(x)} \approx \ln x \quad \Longrightarrow \quad \pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$

Prvočíselnou větu dokázali až v r. 1896 (nezávisle na sobě) *Jacques Hadamard* a *Charles de la Vallée Poussin*.

# Děkuji za pozornost.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

mirko.rokyta@mff.cuni.cz