

Když hra nikdy nekončí!

Pavel Ludvík



Přírodovědecká
fakulta

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PŘF UP Olomouc

13. dubna 2022

Občasný seminář z matematické analýzy

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému studentovi **Marku Šuranskému**, že měl odvahu vybrat si téma bakalářské práce “Nekonečné hry”.

A co je to nikdy/navždy?



Petr Pan: Ale copak nevíš, že jsi ji (*tj. Wendy*) mohla zabít?



Petr Pan: Ale copak nevíš, že jsi ji *(tj. Wendy)* mohla zabít?

Nezbeda: *(Nadšeně kýve hlavou.)*



Petr Pan: Ale copak nevíš, že jsi ji *(tj. Wendy)* mohla zabít?

Nezbeda: *(Nadšeně kýve hlavou.)*

Petr Pan: Nezbedo... posílám tě **navždy** do vyhnanství!



Petr Pan: Ale copak nevíš, že jsi ji *(tj. Wendy)* mohla zabít?

Nezbeda: *(Nadšeně kýve hlavou.)*

Petr Pan: Nezbedo... posílám tě **navždy** do vyhnanství!

Wendy: Prosím, ne navždy...



Petr Pan: Ale copak nevíš, že jsi ji *(tj. Wendy)* mohla zabít?

Nezbeda: *(Nadšeně kýve hlavou.)*

Petr Pan: Nezbedo... posílám tě **navždy** do vyhnanství!

Wendy: Prosím, ne navždy...

Petr Pan: No dobře, tak tedy na týden.

O čem bude přednáška?

O čem bude přednáška?

Bude o hrách, které sice mají nekonečný průběh, ale po spočetně mnoha krocích skončí.

O čem přednáška nebude?

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1** Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:

Hráč 2:

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1: 12

Hráč 2:

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12
Hráč 2:	6

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4
Hráč 2:		6

Příklad konečné hry - Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4
Hráč 2:	6	3

Příklad konečné hry – Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4	2
Hráč 2:		6	3

Příklad konečné hry - Hra na dělení

Jak se to hraje?

Uvažme hru pro dva hráče. Na začátku je dáno $n \in \mathbb{N}$ a pak hráči střídavě hlásí kladné dělitele n . Při výběru se řídí pravidly:

- 1 Hráč nemůže hlásit dělitele, který je násobkem již dříve zvoleného dělitele.
- 2 Hráč, který nahlásí 1, prohrává.

Ukázka hry

Nechť $n = 12$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč 1:	12	4	2	
Hráč 2:		6	3	1

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Matematickou indukcí lze dokázat, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Matematickou indukcí lze dokázat, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii.
- 3 Předpokládejme, že vyhrávající strategii má druhý hráč. To znamená, že na libovolný tah prvního hráče umí zareagovat tak, že vyhraje.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Matematickou indukcí lze dokázat, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii.
- 3 Předpokládejme, že vyhrávající strategii má druhý hráč. To znamená, že na libovolný tah prvního hráče umí zareagovat tak, že vyhraje.
- 4 Když tedy první hráč hraje v prvním tahu n , musí druhý hráč umět zareagovat tak, aby vyhrál.

Tvrzení

První hráč má vyhrávající strategii.

Důkaz

- 1 Protože má n konečný počet dělitelů, je tímto číslem omezen i počet tahů hry.
- 2 Matematickou indukcí lze dokázat, že jeden z hráčů má vždy vyhrávající strategii.
- 3 Předpokládejme, že vyhrávající strategii má **druhý hráč**. To znamená, že na libovolný tah prvního hráče umí zareagovat tak, že vyhraje.
- 4 Když tedy první hráč hraje v prvním tahu n , musí druhý hráč umět zareagovat tak, aby vyhrál.
- 5 Jenže tuto strategii mohl aplikovat od prvního tahu již první hráč a vyhrál by. **Spor.**

Poznámky

- 1 Použitý argument **neříká**, jak by ona výherní strategie mohla vypadat.

Poznámky

- 1 Použitý argument **neříká**, jak by ona výherní strategie mohla vypadat.
- 2 Pro obecné n je podoba této strategie dokonce otevřený problém!

Vše nejlepší, Stefane Banachu!



Vše nejlepší, Stefane Banachu!



Stefan Banach (30. 3. 1892 Kraków – 31. 8. 1945 Lviv)

Jeden z nejvlivnějších matematiků 20. století. Zakladatel moderní funkcionální analýzy.

Vše nejlepší, Stefane Banachu!



Dnes slavíme **130 let** (+ 14 dnů) od jeho narození!

Kawiarnia Szkocka a Księga Szkocka

Skotská kavárna a Skotská kniha

Skotská kavárna a Skotská kniha



Obrázek: Skotská kavárna před pár lety.

Skotská kavárna a Skotská kniha

V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy Lviv byl ještě Lvów...

Skotská kavárna a Skotská kniha

V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy Lviv byl ještě Lvów...
...se v restauračním zařízení zvaném **Kawiarnia Szkocka** (= *Skotská kavárna*)...

Skotská kavárna a Skotská kniha

V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy Lviv byl ještě Lvów...

...se v restauračním zařízení zvaném **Kawiarnia Szkocka** (= *Skotská kavárna*)...

...scházeli matematikové působící na místní technické univerzitě a společně řešili obtížné matematické problémy. Z počátku své poznámky zapisovali tužkou na mramorové desky tamějších stolů. Zaslýchnuvši opakujících se a stále naléhavějších stížností personálu, věnovala skupině manželka jednoho z nich, jistá paní Lucja Banachová, velký zápisník. Ten vešel do dějin matematiky jako **Księga Szkocka** (*Skotská kniha*) a po dlouhých válečných a jiných peripetiích byla vydána v USA až roku 1957.

Skotská kavárna a Skotská kniha

- 1 Do Lvovské skupiny patřili například: [Hugo Steinhaus](#), [Stefan Banach](#), [Stanisław Mazur](#), [Stanisław Ulam](#), [Juliusz Schauder](#), ...

Skotská kavárna a Skotská kniha

- 1 Do Lvovské skupiny patřili například: Hugo Steinhaus, Stefan Banach, Stanisław Mazur, Stanisław Ulam, Juliusz Schauder, ...
- 2 Konkurenční skupina polských matematiků se vytvořila ve Varšavě: Wacław Sierpiński, Kazimierz Kuratowski, Karol Borsuk, Alfred Tarski, ...

Skotská kavárna a Skotská kniha

- 1 Do Lvovské skupiny patřili například: [Hugo Steinhaus](#), [Stefan Banach](#), [Stanisław Mazur](#), [Stanisław Ulam](#), [Juliusz Schauder](#), ...
- 2 Konkurenční skupina polských matematiků se vytvořila ve Varšavě: [Wacław Sierpiński](#), [Kazimierz Kuratowski](#), [Karol Borsuk](#), [Alfred Tarski](#), ...
- 3 Anglický překlad opatřený Ulamovým komentářem vydala roku 1957 Los Alamos National Laboratory.

Skotská kavárna a Skotská kniha

- 1 Do Lvovské skupiny patřili například: [Hugo Steinhaus](#), [Stefan Banach](#), [Stanisław Mazur](#), [Stanisław Ulam](#), [Juliusz Schauder](#), ...
- 2 Konkurenční skupina polských matematiků se vytvořila ve Varšavě: [Wacław Sierpiński](#), [Kazimierz Kuratowski](#), [Karol Borsuk](#), [Alfred Tarski](#), ...
- 3 Anglický překlad opatřený Ulamovým komentářem vydala roku 1957 Los Alamos National Laboratory.
- 4 Roku 1981 vydal R. Daniel Mauldin *Scottish Book* znovu společně s dosud známými řešeními uvedených problémů.

Skotská kavárna a Skotská kniha

- 1 Do Lvovské skupiny patřili například: [Hugo Steinhaus](#), [Stefan Banach](#), [Stanisław Mazur](#), [Stanisław Ulam](#), [Juliusz Schauder](#), ...
- 2 Konkurenční skupina polských matematiků se vytvořila ve Varšavě: [Wacław Sierpiński](#), [Kazimierz Kuratowski](#), [Karol Borsuk](#), [Alfred Tarski](#), ...
- 3 Anglický překlad opatřený Ulamovým komentářem vydala roku 1957 Los Alamos National Laboratory.
- 4 Roku 1981 vydal R. Daniel Mauldin *Scottish Book* znovu společně s dosud známými řešeními uvedených problémů.
- 5 Řada problémů zůstává nevyřešena!

The Scottish Book

Mathematics from the Scottish Café

Edited by R. Daniel Mauldin

Birkhäuser
Boston • Basel • Stuttgart

17/tycie 1935

Przedmiot - Prace

Wskaz. 4. Kierły przedstaw. medycyna (zwłaszcza
da się uwzględnić kula, by wskazać się
komparatywny, przy czym niegi
Wskaz. 4. Kierły przedstaw. medycyna (zwłaszcza
da się uwzględnić kula, by wskazać się
komparatywny, przy czym niegi

Prace - Prace - Prace

4. Kierły przedstaw. medycyna (zwłaszcza
da się uwzględnić kula, by wskazać się
komparatywny, przy czym niegi
Wskaz. 4. Kierły przedstaw. medycyna (zwłaszcza
da się uwzględnić kula, by wskazać się
komparatywny, przy czym niegi

Prace - Prace - Prace

Wskaz. 4. Kierły przedstaw. medycyna (zwłaszcza
da się uwzględnić kula, by wskazać się
komparatywny, przy czym niegi

Prerekvizity

Definice (spočetná a nespočetná množina)

Množinu M nazveme **spočetnou**, pokud existuje zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$, které je surjektivní (tj. „na“).

Prerekvizity

Definice (spočetná a nespočetná množina)

Množinu M nazveme **spočetnou**, pokud existuje zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$, které je surjektivní (tj. „na“). Tedy prvky množiny M lze seřadit do posloupnosti.

Prerekvizity

Definice (spočetná a nespočetná množina)

Množinu M nazveme **spočetnou**, pokud existuje zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$, které je surjektivní (tj. „na“). **Tedy prvky množiny M lze seřadit do posloupnosti.**

Množinu M nazveme **nespočetnou**, pokud není spočetná.

Věta (G. Cantor)

Množina $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je nespočetná.

Důkaz

Věta (G. Cantor)

Množina $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je nespočetná.

Důkaz

1 Dokazujeme sporem. Nechť $[0, 1]$ je spočetná množina.

Věta (G. Cantor)

Množina $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je nespočetná.

Důkaz

- 1 Dokazujeme sporem. Nechť $[0, 1]$ je spočetná množina.
- 2 Posloupnost jejích prvků (ve dvojkové soustavě) je:

0,	0	1	1	0	...
0,	1	1	0	1	...
0,	0	0	1	1	...
0,	1	0	1	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

(**Pozn.** U racionálních čísel použijeme vždy reprezentaci s nekonečným rozvojem.)

Věta (G. Cantor)

Množina $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je nespočetná.

Důkaz

- 1 Dokazujeme sporem. Nechť $[0, 1]$ je spočetná množina.
- 2 Posloupnost jejích prvků (ve dvojkové soustavě) je:

0,	0	1	1	0	...
0,	1	1	0	1	...
0,	0	0	1	1	...
0,	1	0	1	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- 3 Vytvoříme číslo, které vznikne pozměněním zažlucených číslic. Je-li číslice 0, změníme na 1 a naopak.

Věta (G. Cantor)

Množina $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je nespočetná.

Důkaz

- 1 Dokazujeme sporem. Nechť $[0, 1]$ je spočetná množina.
- 2 Posloupnost jejích prvků (ve dvojkové soustavě) je:

0,	1	1	1	0	...
0,	1	0	0	1	...
0,	0	0	0	1	...
0,	1	0	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- 3 Vytvoříme číslo, které vznikne pozměněním zažlucených číslic. Je-li číslice 0, změníme na 1 a naopak.

Věta (G. Cantor)

Množina $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je nespočetná.

Důkaz

- 1 Dokazujeme sporem. Nechť $[0, 1]$ je spočetná množina.
- 2 Posloupnost jejích prvků (ve dvojkové soustavě) je:

0,	1	1	1	0	...
0,	1	0	0	1	...
0,	0	0	0	1	...
0,	1	0	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- 3 Vytvoříme číslo, které vznikne pozměněním zažlucených číslic. Je-li číslice 0, změníme na 1 a naopak.
- 4 Vytvořené číslo se liší od každého čísla v posloupnosti aspoň v jedné číslici. **To je spor.**

Hry na reálné přímce

43

MAZUR

PRIZE: One bottle
of wine, S. ULAM

DEFINITION OF A CERTAIN game. Given is a set E of real numbers. A game between two players A and B is defined as follows: A selects an arbitrary interval d_1 ; B then selects an arbitrary segment (interval) d_2 contained in d_1 ; then A in his turn selects an arbitrary segment d_3 contained in d_2 and so on. A wins if the intersection $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ contains a point of the set E ; otherwise, he loses. If E is a complement of a set of first category, there exists a method through which A can win; if E is a set of first category, there exists a method through which B will win.

Problem. IT IS TRUE THAT THERE exists a method of winning for the player A only for those sets E whose complement is, in a certain interval, of first category; similarly, does a method of win exist for B if E is a set of first category?

Addendum. Mazur's conjecture is true.

S. BANACH
August 4, 1935

Modifications of Mazur's Game

(1) There is given a set of real numbers E . Players A and B give in turn the digits 0 or 1. E wins if the number formed by these digits in a given order (in the binary system) belongs to E . For which E does there exist a method of win for player A (player B)?

ULAM

(2) There is given a set of real numbers E . The two players A and B in turn give real numbers which are positive and such that a player always gives a number smaller than the last one given. Player A wins if the sum of the given series of numbers is an element of the set E . The same question as for (1).
[Ed. See Problem 67 for another modification.]

BANACH

Banachova hra

Jak se to hraje?

1 Je dána množina $V \subset [0, \infty]$.

Banachova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, \infty]$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k > 0$ a hráč **B** číslo $b_k > 0$, aby $a_k < b_{k-1}$ a $b_k < a_k$.

Banachova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, \infty]$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k > 0$ a hráč **B** číslo $b_k > 0$, aby $a_k < b_{k-1}$ a $b_k < a_k$.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$0 \leq \dots < b_3 < a_3 < b_2 < a_2 < b_1 < a_1.$$

Banachova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, \infty]$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k > 0$ a hráč **B** číslo $b_k > 0$, aby $a_k < b_{k-1}$ a $b_k < a_k$.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$0 \leq \dots < b_3 < a_3 < b_2 < a_2 < b_1 < a_1.$$

- 4 Položme $s := \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$.

Banachova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, \infty]$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k > 0$ a hráč **B** číslo $b_k > 0$, aby $a_k < b_{k-1}$ a $b_k < a_k$.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$0 \leq \dots < b_3 < a_3 < b_2 < a_2 < b_1 < a_1.$$

- 4 Položme $s := \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$.
- 5 Hráč **A** vyhrává, právě když $s \in V$.

"The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case."

Paul Halmos, I want to be a mathematician

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A :

Hráč B :

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A : 9

Hráč B :

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A : 9

Hráč B : $\frac{1}{4}$

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A : 9 $\frac{1}{5}$

Hráč B : $\frac{1}{4}$

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A : 9 $\frac{1}{5}$

Hráč B : $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A : 9 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{17}$

Hráč B : $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A : 9 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{17}$

Hráč B : $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

Hráč A : 9 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{17}$ $\frac{1}{65}$

Hráč B : $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

$$\text{Hráč A :} \quad 9 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{17} \quad \frac{1}{65}$$

$$\text{Hráč B :} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{256}$$

Kdo vyhraje?

$$\begin{aligned} s &= 9 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{64} + \frac{1}{65} + \frac{1}{256} + \dots \\ &< 9 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 9 + \frac{2}{3} < 10. \end{aligned}$$

Vyhrává tedy hráč **B**.

Ukázka hry

Nechť $V = [10, \infty)$. Pak hra může probíhat například takto:

$$\text{Hráč A :} \quad 9 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{17} \quad \frac{1}{65}$$

$$\text{Hráč B :} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{256}$$

Kdo vyhraje?

$$\begin{aligned} s &= 9 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{64} + \frac{1}{65} + \frac{1}{256} + \dots \\ &< 9 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 9 + \frac{2}{3} < 10. \end{aligned}$$

Vyhrává tedy hráč **B**, protože hráč **A** frajeřil.

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- 2 Definujeme částečný součet před k -tým tahem hráče **B** jako

$$s_k := \sum_{n=1}^{k-1} (a_n + b_n) + a_k.$$

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- 2 Definujeme částečný součet před k -tým tahem hráče **B** jako

$$s_k := \sum_{n=1}^{k-1} (a_n + b_n) + a_k.$$

- 3 Ukážeme, že hráč **B** může v k -tém tahu přijmout sadu opatření (závislou jen na s_k a v_k) která zajistí, že celkový součet s nebude v_k . Pokud se jimi bude řídit, zvítězí.

Jak taková opatření vypadají?

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 4 V k -tém tahu definuje **B** posloupnost $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ a přijme opatření
- $$\forall n \geq k : b_n < \beta_n^k.$$

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 4 V k -tém tahu definuje **B** posloupnost $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ a přijme opatření
$$\forall n \geq k : b_n < \beta_n^k.$$
- 5 Pokud $v_k \leq s_k$, pak může být $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ libovolné, protože jistě nenastane $s = v_k$.

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 4 V k -tém tahu definuje **B** posloupnost $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ a přijme opatření
- $$\forall n \geq k : b_n < \beta_n^k.$$
- 5 Pokud $v_k \leq s_k$, pak může být $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ libovolné, protože jistě nenastane $s = v_k$.
- 6 Pokud $v_k > s_k$, pak je třeba zajistit, aby se ve zbývajících tazích nenásčítalo právě $v_k - s_k$. Protože příspěvky hráče **A** budou menší než hráč **B**, stačí

$$\sum_{n=k}^{\infty} \beta_n^k < \frac{v_k - s_k}{2}.$$

Tvrzení

Pokud je V je spočetná množina, pak má hráč **B** v Banachově hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 4 V k -tém tahu definuje **B** posloupnost $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ a přijme opatření
- $$\forall n \geq k : b_n < \beta_n^k.$$
- 5 Pokud $v_k \leq s_k$, pak může být $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ libovolné, protože jistě nenastane $s = v_k$.
- 6 Pokud $v_k > s_k$, pak je třeba zajistit, aby se ve zbývajících tazích nenasčítalo právě $v_k - s_k$. Protože příspěvky hráče **A** budou menší než hráč **B**, stačí

$$\sum_{n=k}^{\infty} \beta_n^k < \frac{v_k - s_k}{2}.$$

- 7 Najít takovou posloupnost $\{\beta_n^k\}_{n=k}^\infty$ je cvičeníčko.

Tvrzení

Interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Tvrzení

Interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Důkaz

- 1 Je třeba dokázat, že pro Banachovu hru, kde $V = [0, 1]$ nemá hráč **B** vítěznou strategii. Pak tvrzení plyne z předchozí věty.

Tvrzení

Interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Důkaz

- 1 Je třeba dokázat, že pro Banachovu hru, kde $V = [0, 1]$ nemá hráč **B** vítěznou strategii. Pak tvrzení plyne z předchozí věty.
- 2 To se ale dokáže snadno, protože pokud hráč **A** hraje v k -tém tahu $\left(\frac{1}{4}\right)^k$, nemůže hráč **B** vyhrát, ať hraje cokoliv, protože

$$0 < s < 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{3} < 1.$$

Limitní hra

Jak se to hraje?

1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položíme $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$.

Limitní hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položíme $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k \in (a_{k-1}, b_{k-1})$ a hráč **B** číslo $b_k \in (a_k, b_{k-1})$.

Limitní hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položíme $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k \in (a_{k-1}, b_{k-1})$ a hráč **B** číslo $b_k \in (a_k, b_{k-1})$.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < b_2 < b_1 < b_0 = 1.$$

Limitní hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položíme $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k \in (a_{k-1}, b_{k-1})$ a hráč **B** číslo $b_k \in (a_k, b_{k-1})$.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < b_2 < b_1 < b_0 = 1.$$

- 4 Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená. Položme $s := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Limitní hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položíme $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$.
- 2 V k -tém tahu volí hráč **A** číslo $a_k \in (a_{k-1}, b_{k-1})$ a hráč **B** číslo $b_k \in (a_k, b_{k-1})$.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < b_2 < b_1 < b_0 = 1.$$

- 4 Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená. Položme $s := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- 5 Hráč **A** vyhrává, právě když $s \in V$.

Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A :

Hráč B :

V

A horizontal line is drawn across the width of the slide. A portion of this line, in the center, is highlighted in yellow. This yellow segment represents the interval V.

Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0

Hráč B :



Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0

Hráč B : 1



Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0 $\frac{1}{8}$

Hráč B : 1



Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0 $\frac{1}{8}$

Hráč B : 1 $\frac{7}{8}$

V



Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$

Hráč B : 1 $\frac{7}{8}$

V



Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$

Hráč B : 1 $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{4}$

V



Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$

Hráč B : 1 $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{4}$



Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$

Hráč B : 1 $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$

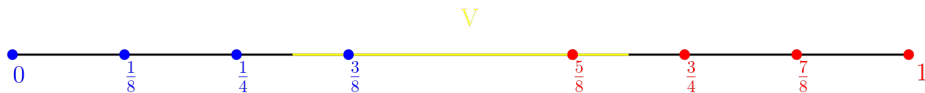


Ukázka hry

Nechť $V = [\frac{5}{16}, \frac{11}{16}]$.

Hráč A : 0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$

Hráč B : 1 $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$



Kdo vyhraje?

Zřejmě

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right) \subset V,$$

Tedy vyhraje hráč A .

Tvrzení

Pokud je V spočetná, pak má hráč **B** v limitní hře vítěznou strategii.

Tvrzení

Pokud je V spočetná, pak má hráč **B** v limitní hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Tvrzení

Pokud je V spočetná, pak má hráč **B** v limitní hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- 2 Pokud v k -tém tahu platí:

Tvrzení

Pokud je V spočetná, pak má hráč **B** v limitní hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- 2 Pokud v k -tém tahu platí:
 - $v_k \in (a_k, b_{k-1})$, volí hráč **B** číslo $b_k := v_k$. Díky tomu $v \neq v_k$.

Tvrzení

Pokud je V spočetná, pak má hráč **B** v limitní hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- 2 Pokud v k -tém tahu platí:
 - $v_k \in (a_k, b_{k-1})$, volí hráč **B** číslo $b_k := v_k$. Díky tomu $v \neq v_k$.
 - $v_k \notin (a_k, b_{k-1})$, volí hráč **B** číslo b_k v rámci pravidel libovolně, protože automaticky $v \neq v_k$.

Tvrzení

Pokud je V spočetná, pak má hráč **B** v limitní hře vítěznou strategii.

Důkaz

- 1 Seřadíme prvky množiny V do posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- 2 Pokud v k -tém tahu platí:
 - $v_k \in (a_k, b_{k-1})$, volí hráč **B** číslo $b_k := v_k$. Díky tomu $v \neq v_k$.
 - $v_k \notin (a_k, b_{k-1})$, volí hráč **B** číslo b_k v rámci pravidel libovolně, protože automaticky $v \neq v_k$.
- 3 Drží-li se hráč **B** této strategie, je $v \neq v_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Vítězem je **B**, ať už **A** hraje jakkoliv.

Tvrzení

Interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Tvrzení

Interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Důkaz

1 V limitní hře volíme $V := [0, 1]$.

Tvrzení

Interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Důkaz

- 1 V limitní hře volíme $V := [0, 1]$.
- 2 Proto $v := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in V$ a vyhraje hráč **A**, ať už se **B** snaží jakkoli.

Tvrzení

Interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Důkaz

- 1 V limitní hře volíme $V := [0, 1]$.
- 2 Proto $v := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in V$ a vyhraje hráč **A**, ať už se **B** snaží jakkoli.
- 3 Množina V musí být nespočetná, protože jinak by hráč **B** měl podle předchozí věty vítěznou strategii.

Prerekvizity

Definice (perfektní množina)

Množina je **perfektní**, pokud je rovna množině svých hromadných bodů.

Prerekvizity

Definice (perfektní množina)

Množina je **perfektní**, pokud je rovna množině svých hromadných bodů.

1 Je to tedy uzavřená množina, jejíž každý bod je hromadný.

Prerekvizity

Definice (perfektní množina)

Množina je **perfektní**, pokud je rovna množině svých hromadných bodů.

- 1 Je to tedy uzavřená množina, jejíž každý bod je hromadný.
- 2 Nechť $M \subset X$. **Bod x má vlastnost P :** „Libovolně blízko x lze nalézt bod M , který je různý od x .“ Pak M je perfektní, právě když obsahuje právě body s vlastností P .

Prerekvizity

Definice (perfektní množina)

Množina je **perfektní**, pokud je rovna množině svých hromadných bodů.

- 1 Je to tedy uzavřená množina, jejíž každý bod je hromadný.
- 2 Nechť $M \subset X$. **Bod x má vlastnost P :** „Libovolně blízko x lze nalézt bod M , který je různý od x .“ Pak M je perfektní, právě když obsahuje právě body s vlastností P .
- 3 O příslušnosti bodu do množiny M lze rozhodnout ze znalosti jeho libovolného prstencového okolí.

Prerekvizity

Definice (perfektní množina)

Množina je **perfektní**, pokud je rovna množině svých hromadných bodů.

- 1 Je to tedy uzavřená množina, jejíž každý bod je hromadný.
- 2 Nechť $M \subset X$. **Bod x má vlastnost P :** „Libovolně blízko x lze nalézt bod M , který je různý od x .“ Pak M je perfektní, právě když obsahuje právě body s vlastností P .
- 3 O příslušnosti bodu do množiny M lze rozhodnout ze znalosti jeho libovolného prstencového okolí.
- 4 Jednoduchým příkladem perfektní množiny je $[0, 1]$.

Prerekvizity

Definice (perfektní množina)

Množina je **perfektní**, pokud je rovna množině svých hromadných bodů.

- 1 Je to tedy uzavřená množina, jejíž každý bod je hromadný.
- 2 Nechť $M \subset X$. **Bod x má vlastnost P :** „Libovolně blízko x lze nalézt bod M , který je různý od x .“ Pak M je perfektní, právě když obsahuje právě body s vlastností P .
- 3 O příslušnosti bodu do množiny M lze rozhodnout ze znalosti jeho libovolného prstencového okolí.
- 4 Jednoduchým příkladem perfektní množiny je $[0, 1]$.
- 5 Složitějším příkladem perfektní množiny je Cantorova množina.

Tvrzení

Pokud je V perfektní množina, pak má hráč A v limitní hře vítěznou strategii.

Tvrzení

Pokud je V perfektní množina, pak má hráč **A** v limitní hře vítěznou strategii.

Důsledek

Každá perfektní množina $V \subset [0, 1]$ je nespočetná.

Tvrzení

Pokud je V perfektní množina, pak má hráč **A** v limitní hře vítěznou strategii.

Důsledek

Každá perfektní množina $V \subset [0, 1]$ je nespočetná.

Důkaz

Plyne ihned z předchozích dvou vět.

Banachova-Mazurova hra

Jak se to hraje?

1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položme $I_0 := [0, 1]$.

Banachova-Mazurova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položme $I_0 := [0, 1]$.
- 2 Hráči **A** a **B** střídavě volí do uzavřené podintervalu I_0 tak, že každý další je podmnožinou předchozího.

Banachova-Mazurova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položme $I_0 := [0, 1]$.
- 2 Hráči **A** a **B** střídavě volí do uzavřené podintervalu I_0 tak, že každý další je podmnožinou předchozího.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ uzavřených intervalů, kde $I_n \subset I_{n-1}$, pro $n \in \mathbb{N}$.

Banachova-Mazurova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položme $I_0 := [0, 1]$.
- 2 Hráči **A** a **B** střídavě volí do uzavřené podintervalu I_0 tak, že každý další je podmnožinou předchozího.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ uzavřených intervalů, kde $I_n \subset I_{n-1}$, pro $n \in \mathbb{N}$.
- 4 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$[0, 1] =: I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

Banachova-Mazurova hra

Jak se to hraje?

- 1 Je dána množina $V \subset [0, 1]$. Položme $I_0 := [0, 1]$.
- 2 Hráči **A** a **B** střídavě volí do uzavřené podintervalu I_0 tak, že každý další je podmnožinou předchozího.
- 3 Běh hry vytvoří posloupnost $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ uzavřených intervalů, kde $I_n \subset I_{n-1}$, pro $n \in \mathbb{N}$.
- 4 Běh hry vytvoří posloupnost:

$$[0, 1] =: I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

- 5 Hráč **A** vyhrává, právě když $V \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

Prerekvizity

Definice (množina první kategorie)

- 1 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **otevřená**, pokud s každým bodem $x \in M$ v ní leží i otevřený interval $x \in (\alpha, \beta) \subset M$.

Definice (množina první kategorie)

- 1 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **otevřená**, pokud s každým bodem $x \in M$ v ní leží i otevřený interval $x \in (\alpha, \beta) \subset M$.
- 2 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **uzavřená**, pokud její doplněk $\mathbb{R} \setminus M$ je otevřený.

Prerekvizity

Definice (množina první kategorie)

- 1 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **otevřená**, pokud s každým bodem $x \in M$ v ní leží i otevřený interval $x \in (\alpha, \beta) \subset M$.
- 2 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **uzavřená**, pokud její doplněk $\mathbb{R} \setminus M$ je otevřený.
- 3 Uzavřená množina $M \subset \mathbb{R}$ je **řidká**, pokud neobsahuje žádný otevřený interval.

Prerekvizity

Definice (množina první kategorie)

- 1 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **otevřená**, pokud s každým bodem $x \in M$ v ní leží i otevřený interval $x \in (\alpha, \beta) \subset M$.
- 2 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **uzavřená**, pokud její doplněk $\mathbb{R} \setminus M$ je otevřený.
- 3 Uzavřená množina $M \subset \mathbb{R}$ je **řádká**, pokud neobsahuje žádný otevřený interval.
- 4 Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **první kategorie**, pokud je možné ji pokrýt spočetně mnoha uzavřenými řádkými množinami.

Prerekvizity

- 1 Otevřené intervaly jsou otevřenými množinami a uzavřené intervaly jsou uzavřenými množinami.

Prerekvizity

- 1 Otevřené intervaly jsou otevřenými množinami a uzavřené intervaly jsou uzavřenými množinami.
- 2 Každá spočetná množina, například $\mathbb{Q}$, je množina první kategorie.

Prerekvizity

- 1 Otevřené intervaly jsou otevřenými množinami a uzavřené intervaly jsou uzavřenými množinami.
- 2 Každá spočetná množina, například $\mathbb{Q}$, je množina první kategorie.
- 3 Žádný (nedegenerovaný) interval není množinou první kategorie.

Prerekvizity

- 1 Otevřené intervaly jsou otevřenými množinami a uzavřené intervaly jsou uzavřenými množinami.
- 2 Každá spočetná množina, například $\mathbb{Q}$, je množina první kategorie.
- 3 Žádný (nedegenerovaný) interval není množinou první kategorie.
- 4 Cantorova množina je nespočetná, ale přesto první kategorie!

Co víme o Banachově-Mazurově hře?

Tvrzení

Hráč **B** má vítěznou strategii, právě když je V první kategorie.

Co víme o Banachově-Mazurově hře?

Tvrzení

Hráč **B** má vítěznou strategii, právě když je V první kategorie.

Tvrzení

Hráč **A** má vítěznou strategii, právě když existuje uzavřený interval I , že $I \setminus V$ je první kategorie.

Co víme o Banachově-Mazurově hře?

Tvrzení

Hráč **B** má vítěznou strategii, právě když je V první kategorie.

Tvrzení

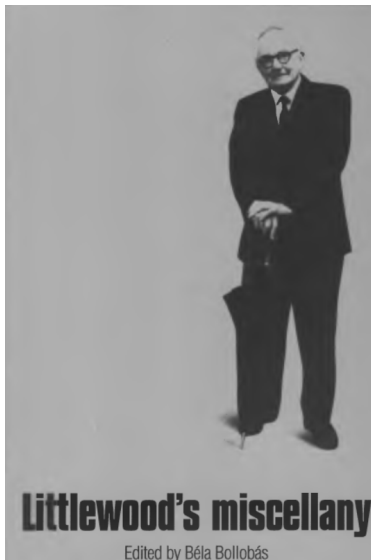
Hráč **A** má vítěznou strategii, právě když existuje uzavřený interval I , že $I \setminus V$ je první kategorie.

Tramvaják

Jak pomocí Banachovy-Mazurovy hry ukázat, že Cantorova množina je první kategorie?

Lev a muž

John E. Littlewood



John E. Littlewood

John Edensor Littlewood (1885–1977)

- *"The mathematician Hardy-Littlewood was the best in the world, with Littlewood the more original genius and Hardy the better journalist."*

Edmund Landau

- *"Littlewood, on Hardy's own estimate, is the finest mathematician he has ever known. He was the man most likely to storm and smash a really deep and formidable problem; there was no one else who could command such a combination of insight, technique and power."*

Sir Henry Dale

John E. Littlewood

V roce 1953 vydal John E. Littlewood knihu esejů:

A Mathematician's Miscellany.

Jedním z esejů byl *Lion and man*, který zpopularizoval problém, jehož autorem byl Richard Rado.

Lev a muž (Lev a křesťan)

Jak se to hraje?

Lev a muž jsou spolu v kruhové aréně. Lev se snaží ulovit muže. Oba mají stejnou maximální rychlost. Uloví lev muže v konečném čase?

Lev a muž (Lev a křesťan)

Jak se to hraje?

Lev a muž jsou spolu v kruhové aréně. Lev se snaží ulovit muže. Oba mají stejnou maximální rychlost. Uloví lev muže v konečném čase?

Doporučení

Littlewood v knize navrhuje, že každý by si měl od dalšího čtení na 24 hodin odpočinout a přemýšlet, jinak přijde o potěšení z řešení problému.

Lev a muž (Lev a křesťan)

Jak se to hraje?

Lev a muž jsou spolu v kruhové aréně. Lev se snaží ulovit muže. Oba mají stejnou maximální rychlost. Uloví lev muže v konečném čase?

A. S. Besicovitch

Muž dokáže unikat tak, že ho lev nikdy nedožene, ať se snaží, jak se snaží.

Předpoklady a dohody

- 1 Uvažujme arénu tvaru kruhu se středem O a poloměrem 1.

Předpoklady a dohody

- 1 Uvažujme arénu tvaru kruhu se středem O a poloměrem 1.
- 2 Označme jako M_n pozici muže a L_n pozici lva v časovém okamžiku t_n .

Předpoklady a dohody

- 1 Uvažujme arénu tvaru kruhu se středem O a poloměrem 1.
- 2 Označme jako M_n pozici muže a L_n pozici lva v časovém okamžiku t_n .
- 3 Nechť je vzdálenost muže od středu arény v čase $t_0 = 0$ rovna $1 - \varepsilon$, tj. $|M_0 O| = 1 - \varepsilon$.

Předpoklady a dohody

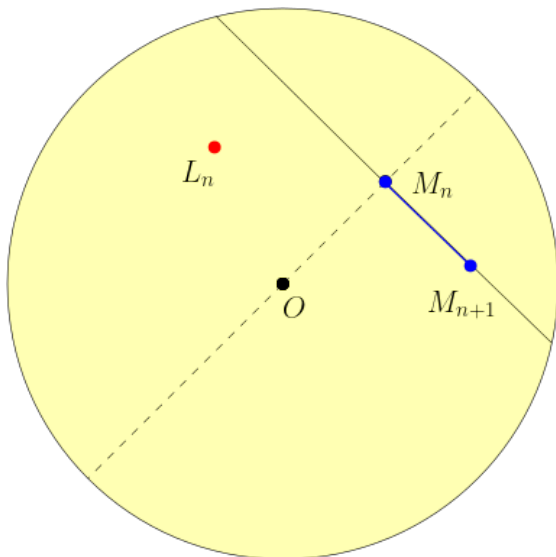
- 1 Uvažujme arénu tvaru kruhu se středem O a poloměrem 1.
- 2 Označme jako M_n pozici muže a L_n pozici lva v časovém okamžiku t_n .
- 3 Nechť je vzdálenost muže od středu arény v čase $t_0 = 0$ rovna $1 - \varepsilon$, tj. $|M_0 O| = 1 - \varepsilon$.
- 4 Předpokládáme, že $M_0 \neq L_0$.

- 1 Matematickou indukcí budeme konstruovat posloupnost bodů $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$. Muž se při úprku bude pohybovat po lomené čáře dané těmito body.

- 1 Matematickou indukcí budeme konstruovat posloupnost bodů $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$. Muž se při úprku bude pohybovat po lomené čáře dané těmito body.
- 2 Předpokládejme, že M_n je známo, stejně tak poloha lva L_n . Zkontruujeme bod M_{n+1} tak, aby platilo:

- 1 Matematickou indukcí budeme konstruovat posloupnost bodů $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$. Muž se při úprku bude pohybovat po lomené čáře dané těmito body.
- 2 Předpokládejme, že M_n je známo, stejně tak poloha lva L_n . Zkontruujeme bod M_{n+1} tak, aby platilo:
 - Přímka M_nM_{n+1} je kolmá na M_nO .

- 1 Matematickou indukcí budeme konstruovat posloupnost bodů $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$. Muž se při úprku bude pohybovat po lomené čáře dané těmito body.
- 2 Předpokládejme, že M_n je známo, stejně tak poloha lva L_n . Zkontruujeme bod M_{n+1} tak, aby platilo:
 - Přímka $M_n M_{n+1}$ je kolmá na $M_n O$.
 - Body M_{n+1} a L_n leží v opačných polorovinách určených přímkou $M_n O$.



- 1 Matematickou indukcí budeme konstruovat posloupnost bodů $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$. Muž se při úprku bude pohybovat po lomené čáře dané těmito body.
- 2 Předpokládejme, že M_n je známo, stejně tak poloha lva L_n . Zkontruujeme bod M_{n+1} tak, aby platilo:
 - Přímka $M_n M_{n+1}$ je kolmá na $M_n O$.
 - Body M_{n+1} a L_n leží v opačných polorovinách určených přímkou $M_n O$.
- 3 Při pohybu z bodu M_n do bodu M_{n+1} nemůže lev muže dohnat (trojúhelníková nerovnost).

- 4 Ve zbytku konstrukce se budeme zabývat vhodnou volbou vzdálenosti $l_n := |M_n M_{n+1}|$, aby byl útěk muže úspěšný.

- 4 Ve zbytku konstrukce se budeme zabývat vhodnou volbou vzdálenosti $l_n := |M_n M_{n+1}|$, aby byl útěk muže úspěšný.
- 5 Posloupnost $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ je třeba volit s ohledem na dvě protichůdné okolnosti:

- 4 Ve zbytku konstrukce se budeme zabývat vhodnou volbou vzdálenosti $l_n := |M_n M_{n+1}|$, aby byl útěk muže úspěšný.
- 5 Posloupnost $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ je třeba volit s ohledem na dvě protichůdné okolnosti:
- 6 **Muž nesmí být uloven.** Tj. l_n musí být „velké“, aby uběhnutá dráha byla nekonečná:

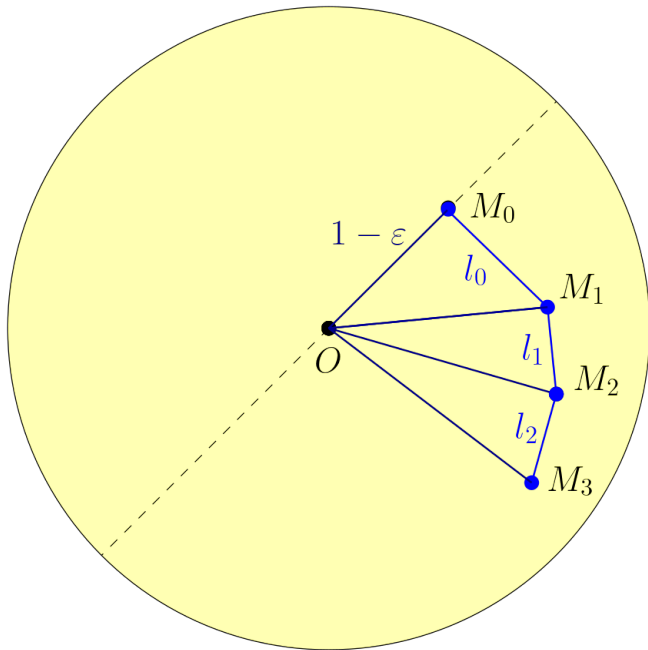
$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \infty.$$

- 4 Ve zbytku konstrukce se budeme zabývat vhodnou volbou vzdálenosti $l_n := |M_n M_{n+1}|$, aby byl útěk muže úspěšný.
- 5 Posloupnost $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ je třeba volit s ohledem na dvě protichůdné okolnosti:
- 6 **Muž nesmí být uloven.** Tj. l_n musí být „velké“, aby uběhnutá dráha byla nekonečná:

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \infty.$$

- 7 **Muž nesmí utéct z arény.** Tj. l_n musí být „malé“. Vzdálenost bodu M_n od středu arény musí být menší než 1. Tedy užitím Pythagorovy věty:

$$(1 - \varepsilon)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} l_i^2 < 1.$$



8 Najdeme posloupnost kladných čísel $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$, aby

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \infty,$$

$$(1 - \varepsilon)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} l_n^2 \leq (1 - \varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} l_n^2 < 1.$$

neboli:

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} l_n^2 < \varepsilon.$$

8 Najdeme posloupnost kladných čísel $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$, aby

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \infty,$$
$$(1 - \varepsilon)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} l_n^2 \leq (1 - \varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} l_n^2 < 1.$$

neboli:

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} l_n^2 < \varepsilon.$$

9 Stačí pro vhodné $c \in \mathbb{R}$ volit $l_{n-1} := \frac{c}{n}$. Pak totiž

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \approx c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n^2 \approx c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Děkuji za pozornost!