# Proč jsou polynomy husté?

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Ostrava, 4.4. 2022

(Seminář OSMA + Konference českých matematiků)

# Použitá označení

- $C(\langle a, b\rangle)$ ... prostor funkcí spojitých na $\langle a, b\rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) opatřený normou $\|f\| = \max\{|f(x)| : \; x \in \langle a, b\rangle\}$

# Použitá označení

- $C(\langle a, b \rangle)$ ... prostor funkcí spojitých na $\langle a, b \rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) opatřený normou $\|f\| = \max\{|f(x)| : \ x \in \langle a, b \rangle\}$
- $P(\langle a, b \rangle)$ ... podprostor všech polynomů (na intervalu $\langle a, b \rangle$)

# Použitá označení

- $C(\langle a,b\rangle)$ ... prostor funkcí spojitých na $\langle a,b\rangle$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) opatřený normou $\|f\| = \max\{|f(x)| : \ x\in\langle a,b\rangle\}$
- $P(\langle a,b\rangle)$ ... podprostor všech polynomů (na intervalu $\langle a,b\rangle$)
- $\mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ ... prostor všech lineárních (ne nutně spojitých) operátorů z prostoru $C(\langle a,b\rangle)$ do sebe

# Použitá označení

- $C(\langle a, b\rangle)$ ... prostor funkcí spojitých na $\langle a, b\rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) opatřený normou $\|f\| = \max\{|f(x)| : \ x \in \langle a, b\rangle\}$
- $P(\langle a, b\rangle)$ ... podprostor všech polynomů (na intervalu $\langle a, b\rangle$)
- $\mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ ... prostor všech lineárních (ne nutně spojitých) operátorů z prostoru $C(\langle a, b\rangle)$ do sebe

## Definice

*Řekneme, že operátor $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je nezáporný, pokud každou nezápornou funkci zobrazuje na nezápornou funkci, tzn.*

$$(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)) : \ f \geq 0 \implies L(f) \geq 0.$$

# Použitá označení

- $C(\langle a,b\rangle)$ ... prostor funkcí spojitých na $\langle a,b\rangle$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$) opatřený normou $\|f\| = \max\{|f(x)| : \ x \in \langle a,b\rangle\}$
- $P(\langle a,b\rangle)$ ... podprostor všech polynomů (na intervalu $\langle a,b\rangle$)
- $\mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ ... prostor všech lineárních (ne nutně spojitých) operátorů z prostoru $C(\langle a,b\rangle)$ do sebe

## Definice

*Řekneme, že operátor $L \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ je nezáporný, pokud každou nezápornou funkci zobrazuje na nezápornou funkci, tzn.*

$$(\forall f \in C(\langle a,b\rangle)) : \ f \geq 0 \implies L(f) \geq 0.$$

Nerovnost $f \geq 0$ přitom znamená, že $(\forall x \in \langle a,b\rangle) : \ f(x) \geq 0$.
Podobně chápeme i nerovnost $L(f) \geq 0$, popřípadě další vztahy jako $f = g$, $f \leq g$, apod.

## Věta (Weierstrassova, 1885)

*Pro každou funkci* $f \in C(\langle a, b\rangle)$ *a každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existuje polynom* $p \in P(\langle a, b\rangle)$ *takový, že*

$$\|p - f\| < \varepsilon,$$

## Věta (Weierstrassova, 1885)

*Pro každou funkci* $f \in C(\langle a, b\rangle)$ *a každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existuje polynom* $p \in P(\langle a, b\rangle)$ *takový, že*

$$\|p - f\| < \varepsilon,$$

*tzn.*

$$(\forall x \in \langle a, b\rangle): \ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

## Věta (Weierstrassova, 1885)

*Pro každou funkci* $f \in C(\langle a, b\rangle)$ *a každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existuje polynom* $p \in P(\langle a, b\rangle)$ *takový, že*

$$\|p - f\| < \varepsilon,$$

*tzn.*

$$(\forall x \in \langle a, b\rangle) : \ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Později uvidíme, že Weierstrassova věta je důsledkem následující věty.

## Věta (Korovkinova – o třech funkcích, 1953)

## Věta (Weierstrassova, 1885)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje polynom $p \in P(\langle a, b\rangle)$ takový, že*

$$\|p - f\| < \varepsilon,$$

*tzn.*

$$(\forall x \in \langle a, b\rangle): \ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Později uvidíme, že Weierstrassova věta je důsledkem následující věty.

## Věta (Korovkinova – o třech funkcích, 1953)

*Nechť $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je posloupnost* **nezáporných** *operátorů.*

## Věta (Weierstrassova, 1885)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje polynom $p \in P(\langle a, b\rangle)$ takový, že*

$$\|p - f\| < \varepsilon,$$

*tzn.*

$$(\forall x \in \langle a, b\rangle): \ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Později uvidíme, že Weierstrassova věta je důsledkem následující věty.

## Věta (Korovkinova – o třech funkcích, 1953)

*Nechť $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je posloupnost* **nezáporných** *operátorů.*

*Na intervalu $\langle a, b\rangle$ uvažujme tři funkce*

$$f_0(x) \stackrel{def.}{=} 1, \quad f_1(x) \stackrel{def.}{=} x \quad a \quad f_2(x) \stackrel{def.}{=} x^2.$$

## Věta (Weierstrassova, 1885)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje polynom $p \in P(\langle a, b\rangle)$ takový, že*

$$\|p - f\| < \varepsilon,$$

*tzn.*

$$(\forall x \in \langle a, b\rangle) : \ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Později uvidíme, že Weierstrassova věta je důsledkem následující věty.

## Věta (Korovkinova – o třech funkcích, 1953)

*Nechť $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je posloupnost* **nezáporných** *operátorů.*

*Na intervalu $\langle a, b\rangle$ uvažujme tři funkce*

$$f_0(x) \stackrel{def.}{=} 1, \quad f_1(x) \stackrel{def.}{=} x \quad a \quad f_2(x) \stackrel{def.}{=} x^2.$$

*Platí-li*

$$L_n(f_0) \rightrightarrows f_0, \quad L_n(f_1) \rightrightarrows f_1 \quad a \quad L_n(f_2) \rightrightarrows f_2 \quad na \ \langle a, b\rangle,$$

## Věta (Weierstrassova, 1885)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje polynom $p \in P(\langle a, b\rangle)$ takový, že*

$$\|p - f\| < \varepsilon,$$

*tzn.*

$$(\forall x \in \langle a, b\rangle) : \ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Později uvidíme, že Weierstrassova věta je důsledkem následující věty.

## Věta (Korovkinova – o třech funkcích, 1953)

*Nechť $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je posloupnost* **nezáporných** *operátorů.*

*Na intervalu $\langle a, b\rangle$ uvažujme tři funkce*

$$f_0(x) \stackrel{def.}{=} 1, \quad f_1(x) \stackrel{def.}{=} x \quad a \quad f_2(x) \stackrel{def.}{=} x^2.$$

*Platí-li*

$$L_n(f_0) \rightrightarrows f_0, \quad L_n(f_1) \rightrightarrows f_1 \quad a \quad L_n(f_2) \rightrightarrows f_2 \quad na \ \langle a, b\rangle,$$

*pak*

$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad na \ \langle a, b\rangle$$

**pro každou funkci** $f \in C(\langle a, b\rangle)$.

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; f \leq g \implies L(f) \leq L(g)$.

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; f \leq g \implies L(f) \leq L(g)$.

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g)$.
*(Volba* $g = |f|$ *pak dává* $|L(f)| \leq L(|f|)$*.)*

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$
*(Volba* $g = |f|$ *pak dává* $|L(f)| \leq L(|f|)$*.)*

(iii) *L je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)) : \ \|L(f)\| \leq k\|f\|.$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \; f \le g \implies L(f) \le L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \; |f| \le g \implies |L(f)| \le L(g).$
*(Volba* $g = |f|$ *pak dává* $|L(f)| \le L(|f|)$*.)*

(iii) *L je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)): \; \|L(f)\| \le k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \le g$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)):\ f \leq g \implies L(f) \leq L(g)$.

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)):\ |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g)$.
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \leq L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)):\ \|L(f)\| \leq k\|f\|$.

## Důkaz.

(i) $f \leq g \implies g - f \geq 0$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \leq L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)): \ \|L(f)\| \leq k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g-f)}_{L(g)-L(f)} \geq 0$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$
*(Volba* $g = |f|$ *pak dává* $|L(f)| \leq L(|f|)$*.)*

(iii) *L je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)): \ \|L(f)\| \leq k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g - f)}_{L(g)-L(f)} \geq 0 \implies L(f) \leq L(g).$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$
*(Volba* $g = |f|$ *pak dává* $|L(f)| \leq L(|f|)$*.)*

(iii) *L je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)) : \ \|L(f)\| \leq k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g-f)}_{L(g)-L(f)} \geq 0 \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $|f| \leq g$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *L je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ f \le g \implies L(f) \le L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ |f| \le g \implies |L(f)| \le L(g).$
*(Volba* $g = |f|$ *pak dává* $|L(f)| \le L(|f|)$*.)*

(iii) *L je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)): \ \|L(f)\| \le k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \le g \implies g - f \ge 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g-f)}_{L(g)-L(f)} \ge 0 \implies L(f) \le L(g).$

(ii) $|f| \le g \implies -g \le f \le g$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ f \le g \implies L(f) \le L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ |f| \le g \implies |L(f)| \le L(g).$
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \le L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)) : \ \|L(f)\| \le k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $$f \le g \implies g - f \ge 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g-f)}_{L(g)-L(f)} \ge 0 \implies L(f) \le L(g).$$

(ii) $$|f| \le g \implies -g \le f \le g \overset{\text{(i)}}{\implies} -L(g) \le L(f) \le L(g)$$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \leq L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)) : \; \|L(f)\| \leq k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g-f)}_{L(g)-L(f)} \geq 0 \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $|f| \leq g \implies -g \leq f \leq g \overset{\text{(i)}}{\implies} -L(g) \leq L(f) \leq L(g) \implies |L(f)| \leq L(g).$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)):\ f \le g \implies L(f) \le L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)):\ |f| \le g \implies |L(f)| \le L(g).$
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \le L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)):\ \|L(f)\| \le k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \le g \implies g - f \ge 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\Longrightarrow} \underbrace{L(g-f)}_{L(g)-L(f)} \ge 0 \implies L(f) \le L(g).$

(ii) $|f| \le g \implies -g \le f \le g \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} -L(g) \le L(f) \le L(g) \implies |L(f)| \le L(g).$

(iii) $|f| \le \|f\|$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť* $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ *je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)): \ |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \leq L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)): \ \|L(f)\| \leq k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g-f)}_{L(g)-L(f)} \geq 0 \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $|f| \leq g \implies -g \leq f \leq g \overset{\text{(i)}}{\implies} -L(g) \leq L(f) \leq L(g) \implies |L(f)| \leq L(g).$

(iii) $|f| \leq \|f\| \overset{\text{(ii)}}{\implies} |L(f)| \leq L(\|f\|)$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; f \leq g \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \; |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g).$
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \leq L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)) : \; \|L(f)\| \leq k\|f\|.$

## Důkaz.

(i) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\Longrightarrow} \underbrace{L(g - f)}_{L(g)-L(f)} \geq 0 \implies L(f) \leq L(g).$

(ii) $|f| \leq g \implies -g \leq f \leq g \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} -L(g) \leq L(f) \leq L(g) \implies |L(f)| \leq L(g).$

(iii) $|f| \leq \|f\| \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} |L(f)| \leq L(\|f\|) = \|f\| \cdot L(1)$

## Lemma (vlastnosti nezáporného operátoru)

*Nechť $L \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ je nezáporný operátor. Pak*

(i) *$L$ je neklesající, tzn.*
$(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ f \leq g \implies L(f) \leq L(g)$.

(ii) $(\forall f, g \in C(\langle a, b\rangle)) : \ |f| \leq g \implies |L(f)| \leq L(g)$.
*(Volba $g = |f|$ pak dává $|L(f)| \leq L(|f|)$.)*

(iii) *$L$ je omezený (spojitý), tzn.*
$(\exists k \in \mathbb{R}_0^+)(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)) : \ \|L(f)\| \leq k\|f\|$.

## Důkaz.

(i) $$f \leq g \implies g - f \geq 0 \overset{\text{nezápornost } L}{\implies} \underbrace{L(g - f)}_{L(g)-L(f)} \geq 0 \implies L(f) \leq L(g).$$

(ii) $$|f| \leq g \implies -g \leq f \leq g \overset{\text{(i)}}{\implies} -L(g) \leq L(f) \leq L(g) \implies |L(f)| \leq L(g).$$

(iii) $$|f| \leq \|f\| \overset{\text{(ii)}}{\implies} |L(f)| \leq L(\|f\|) = \|f\| \cdot L(1) \implies \|L(f)\| \leq \|f\| \cdot \underbrace{\|L(1)\|}_{\overset{\text{ozn.}}{=} k}.$$

□

## Lemma

*Nechť* $f \in C(\langle a, b\rangle)$. *Pak pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *existuje* $K \in \mathbb{R}^+$ *(závislé na* $\alpha$*) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y-x)^2.$$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno.

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b \rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b \rangle) : \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b \rangle \times \langle a, b \rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle): \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

## Lemma

*Nechť* $f \in C(\langle a, b\rangle)$. *Pak pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *existuje* $K \in \mathbb{R}^+$ *(závislé na* $\alpha$*) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle): \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y-x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b\rangle): \ |f(y) - f(x)| < \alpha$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y-x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \neq \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y-x)^2 : \ (x, y) \in M_\alpha\right\}$

## Lemma

*Nechť* $f \in C(\langle a, b \rangle)$. *Pak pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *existuje* $K \in \mathbb{R}^+$ *(závislé na* $\alpha$*) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b \rangle): \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y-x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b \rangle \times \langle a, b \rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b \rangle): \ |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \neq \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y-x)^2 : \ (x, y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$.

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a,b\rangle): \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y-x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle : \ |f(y)-f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a,b\rangle): \ |f(y)-f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \neq \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y-x)^2 : \ (x,y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \geq \frac{2\|f\|}{m}$

## Lemma

*Nechť* $f \in C(\langle a, b\rangle)$. *Pak pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *existuje* $K \in \mathbb{R}^+$ *(závislé na* $\alpha$*) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \; |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \; |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \; |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \neq \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y - x)^2 : \; (x, y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \geq \frac{2\|f\|}{m}$, neboť

$$|f(y) - f(x)| \leq \begin{cases} \alpha & \text{pro } (x, y) \in \left(\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle\right) \setminus M_\alpha, \\ & \end{cases}$$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle): \ |f(y) - f(x)| \le \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \ge \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b\rangle): \ |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \ne \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y - x)^2 : \ (x, y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \ge \frac{2\|f\|}{m}$, neboť

$$|f(y) - f(x)| \le \begin{cases} \alpha \le \alpha + K(y - x)^2 & \text{pro } (x, y) \in \left(\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle\right) \setminus M_\alpha, \\ & \end{cases}$$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \neq \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y - x)^2 : \ (x, y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \geq \frac{2\|f\|}{m}$, neboť

$$|f(y) - f(x)| \leq \begin{cases} \alpha \leq \alpha + K(y - x)^2 & \text{pro } (x, y) \in \big(\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle\big) \setminus M_\alpha, \\ |f(y)| + |f(x)| & \\ & \text{pro } (x, y) \in M_\alpha. \end{cases}$$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a,b\rangle): \ |f(y)-f(x)| \leq \alpha + K(y-x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle : \ |f(y)-f(x)| \geq \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a,b\rangle): \ |f(y)-f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \neq \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y-x)^2 : \ (x,y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \geq \frac{2\|f\|}{m}$, neboť

$$|f(y)-f(x)| \leq \begin{cases} \alpha \leq \alpha + K(y-x)^2 & \text{pro } (x,y) \in (\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle) \setminus M_\alpha, \\ |f(y)| + |f(x)| \leq 2\|f\| & \\ & \text{pro } (x,y) \in M_\alpha. \end{cases}$$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x,y \in \langle a,b\rangle):\ |f(y)-f(x)| \le \alpha + K(y-x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle:\ |f(y)-f(x)| \ge \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x,y \in \langle a,b\rangle):\ |f(y)-f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \ne \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y-x)^2:\ (x,y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \ge \frac{2\|f\|}{m}$, neboť

$$|f(y)-f(x)| \le \begin{cases} \alpha \le \alpha + K(y-x)^2 & \text{pro } (x,y) \in \left(\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle\right) \setminus M_\alpha, \\ |f(y)|+|f(x)| \le 2\|f\| \le Km & \\ & \text{pro } (x,y) \in M_\alpha. \end{cases}$$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a,b\rangle): \ |f(y) - f(x)| \le \alpha + K(y-x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \ge \alpha\},$$

která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a,b\rangle): \ |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \ne \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y-x)^2 : \ (x,y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \ge \frac{2\|f\|}{m}$, neboť

$$|f(y) - f(x)| \le \begin{cases} \alpha \le \alpha + K(y-x)^2 \quad \text{pro } (x,y) \in \big(\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle\big) \setminus M_\alpha, \\ |f(y)| + |f(x)| \le 2\|f\| \le Km \le K(y-x)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pro } (x,y) \in M_\alpha. \end{cases}$$

## Lemma

*Nechť $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2.$$

## Důkaz.

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je dáno. Uvažujme množinu

$$M_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle : \ |f(y) - f(x)| \geq \alpha\},$$

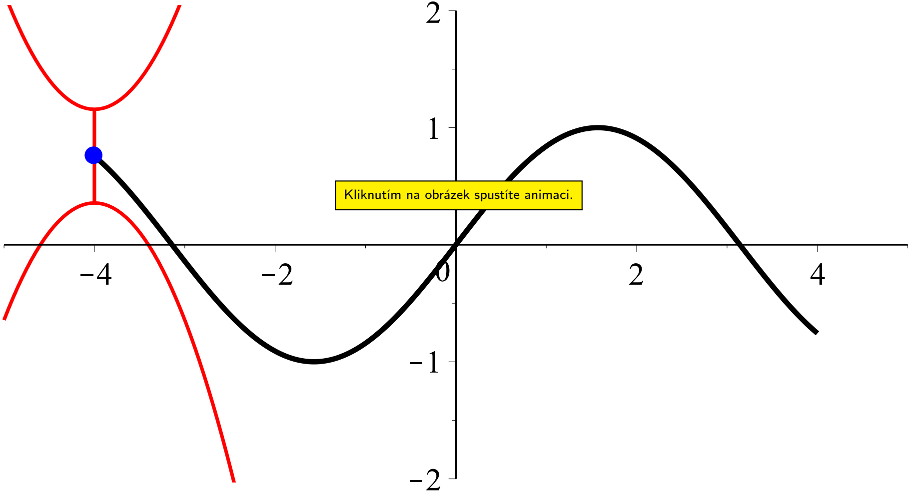
která je jistě kompaktní (omezenost je jasná, uzavřenost plyne ze spojitosti $f$).

- Jestliže $M_\alpha = \emptyset$, pak $(\forall x, y \in \langle a, b\rangle) : \ |f(y) - f(x)| < \alpha$ a $K \in \mathbb{R}^+$ lze zvolit libovolně.
- Jestliže $M_\alpha \neq \emptyset$, položíme $m = \min\left\{(y - x)^2 : \ (x, y) \in M_\alpha\right\} \in \mathbb{R}^+$. Pak ale stačí zvolit $K \in \mathbb{R}^+$ tak, aby platilo $K \geq \frac{2\|f\|}{m}$, neboť

$$|f(y) - f(x)| \leq \begin{cases} \alpha \leq \alpha + K(y - x)^2 \quad \text{pro } (x, y) \in \big(\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle\big) \setminus M_\alpha, \\ |f(y)| + |f(x)| \leq 2\|f\| \leq Km \leq K(y - x)^2 < \alpha + K(y - x)^2 \\ \qquad \text{pro } (x, y) \in M_\alpha. \end{cases}$$

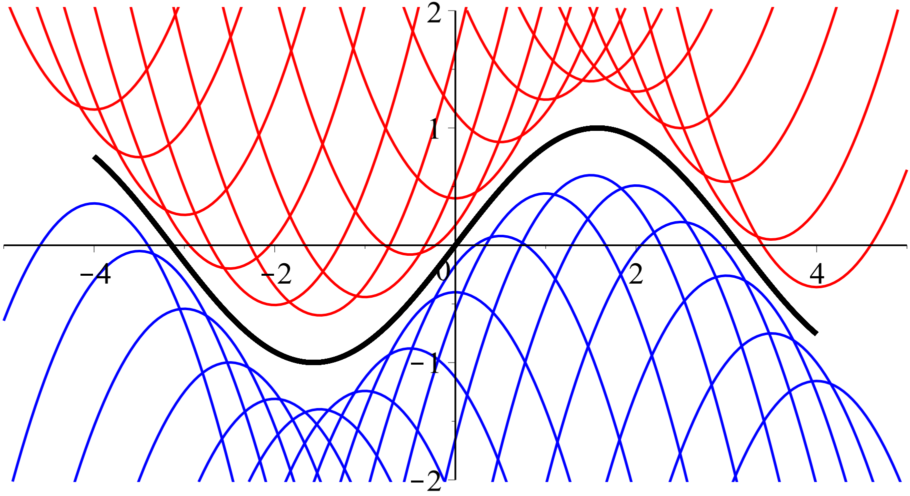
□

# Geometrický význam předchozího lemmatu

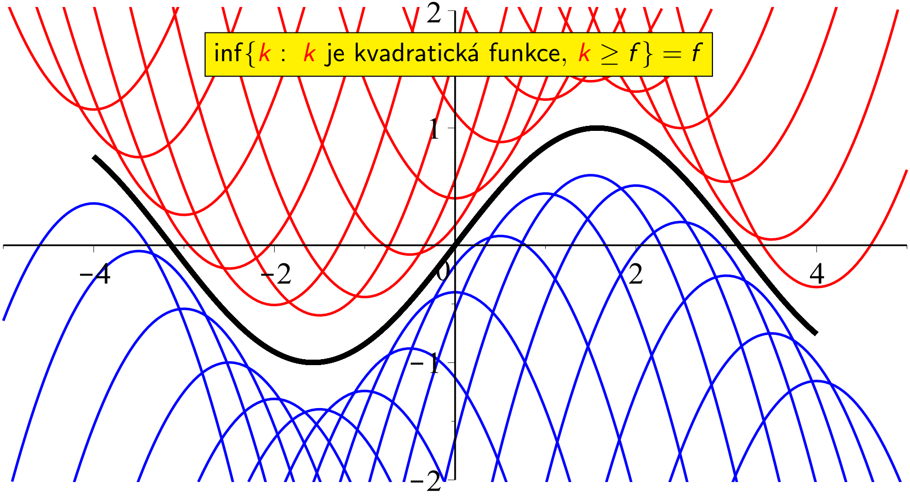



V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

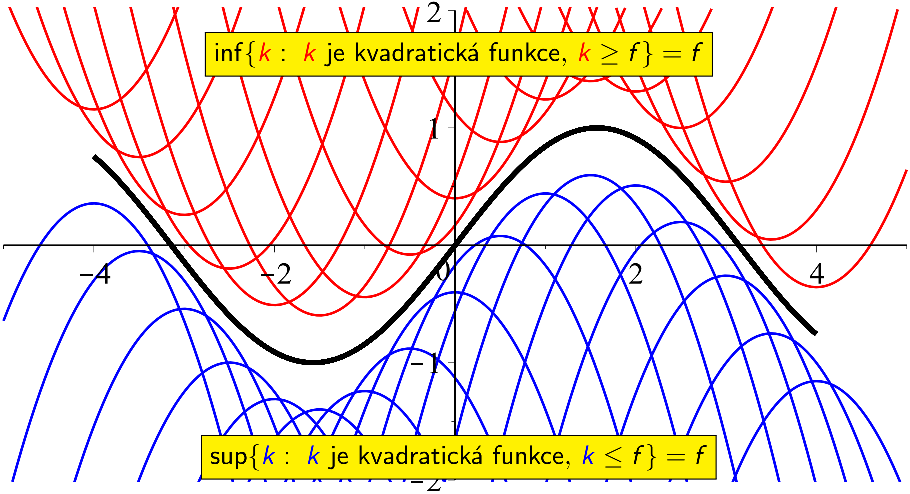
# Geometrický význam předchozího lemmatu



# Geometrický význam předchozího lemmatu



# Geometrický význam předchozího lemmatu



# Důkaz Korovkinovy věty.

Nechť jsou splněny předpoklady Korovkinovy věty a nechť je dána funkce $f \in C(\langle a, b\rangle)$ ($f$ není identicky nulová) a číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

## Důkaz Korovkinovy věty.

Nechť jsou splněny předpoklady Korovkinovy věty a nechť je dána funkce $f \in C(\langle a, b\rangle)$ ($f$ není identicky nulová) a číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Budeme chtít ukázat, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0)\,\underbrace{(\forall x \in \langle a, b\rangle):\ |L_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon.}_{\|L_n(f)-f\|<\varepsilon}$$

# Důkaz Korovkinovy věty.

Nechť jsou splněny předpoklady Korovkinovy věty a nechť je dána funkce $f \in C(\langle a, b\rangle)$ ($f$ není identicky nulová) a číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Budeme chtít ukázat, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0)\underbrace{(\forall x \in \langle a, b\rangle) :\ |L_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon.}_{\|L_n(f)-f\|<\varepsilon}$$

K číslu $\alpha \overset{\text{def.}}{=} \frac{\varepsilon}{4}$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \langle a, b\rangle$ platí nerovnost

$$|f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2. \tag{$\star$}$$

## Důkaz Korovkinovy věty.

Nechť jsou splněny předpoklady Korovkinovy věty a nechť je dána funkce $f \in C(\langle a, b\rangle)$ ($f$ není identicky nulová) a číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Budeme chtít ukázat, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0)\underbrace{(\forall x \in \langle a, b\rangle):\ |L_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon.}_{\|L_n(f)-f\|<\varepsilon}$$

K číslu $\alpha \overset{\text{def.}}{=} \frac{\varepsilon}{4}$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \langle a, b\rangle$ platí nerovnost

$$|f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2. \tag{$\star$}$$

Dívejme se nyní na nerovnost ($\star$) jako na nerovnost v proměnné $y$ (tzn. $x \in \langle a, b\rangle$ je zafixováno).

# Důkaz Korovkinovy věty.

Nechť jsou splněny předpoklady Korovkinovy věty a nechť je dána funkce $f \in C(\langle a, b\rangle)$ ($f$ není identicky nulová) a číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Budeme chtít ukázat, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0)\underbrace{(\forall x \in \langle a, b\rangle):\ |L_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon.}_{\|L_n(f)-f\|<\varepsilon}$$

K číslu $\alpha \overset{\text{def.}}{=} \frac{\varepsilon}{4}$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \langle a, b\rangle$ platí nerovnost

$$|f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2. \qquad (\star)$$

Dívejme se nyní na nerovnost $(\star)$ jako na nerovnost v proměnné $y$ (tzn. $x \in \langle a, b\rangle$ je zafixováno). Tuto nerovnost lze přepsat do tvaru

$$|f(y) - f(x)f_0(y)| \leq \alpha f_0(y) + K\left(f_2(y) - 2x\, f_1(y) + x^2 f_0(y)\right).$$

# Důkaz Korovkinovy věty.

Nechť jsou splněny předpoklady Korovkinovy věty a nechť je dána funkce $f \in C(\langle a, b\rangle)$ ($f$ není identicky nulová) a číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Budeme chtít ukázat, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0)\underbrace{(\forall x \in \langle a, b\rangle):\ |L_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon.}_{\|L_n(f)-f\|<\varepsilon}$$

K číslu $\alpha \overset{\text{def.}}{=} \frac{\varepsilon}{4}$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x, y \in \langle a, b\rangle$ platí nerovnost

$$|f(y) - f(x)| \leq \alpha + K(y - x)^2. \qquad (\star)$$

Dívejme se nyní na nerovnost $(\star)$ jako na nerovnost v proměnné $y$ (tzn. $x \in \langle a, b\rangle$ je zafixováno). Tuto nerovnost lze přepsat do tvaru

$$|f(y) - f(x)f_0(y)| \leq \alpha f_0(y) + K\left(f_2(y) - 2x\, f_1(y) + x^2 f_0(y)\right).$$

Po následné aplikaci operátoru $L_n$ obdržíme (pro všechna $y \in \langle a, b\rangle$)

$$|L_n(f)(y) - f(x)L_n(f_0)(y)| \leq$$
$$\leq \alpha L_n(f_0)(y) + K\Big(L_n(f_2)(y) - 2x\, L_n(f_1)(y) + x^2 L_n(f_0)(y)\Big).$$

# Důkaz Korovkinovy věty.

Platí-li poslední nerovnost pro každé $y \in \langle a, b \rangle$, platí i pro $y = x$.

# Důkaz Korovkinovy věty.

Platí-li poslední nerovnost pro každé $y \in \langle a, b \rangle$, platí i pro $y = x$.

I když číslo $x \in \langle a, b \rangle$ bylo dříve zafixováno, bylo zvoleno libovolně. To znamená, že pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí nerovnost

$$|L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x)| \leq$$

$$\leq \alpha \underbrace{L_n(f_0)(x)}_{\rightrightarrows f_0(x)=1} + K \overbrace{\left( \underbrace{L_n(f_2)(x)}_{\rightrightarrows f_2(x)=x^2} - 2x \underbrace{L_n(f_1)(x)}_{\rightrightarrows f_1(x)=x} + x^2 \underbrace{L_n(f_0)(x)}_{\rightrightarrows f_0(x)=1} \right)}^{\rightrightarrows 0}.$$

# Důkaz Korovkinovy věty.

Platí-li poslední nerovnost pro každé $y \in \langle a, b \rangle$, platí i pro $y = x$.

I když číslo $x \in \langle a, b \rangle$ bylo dříve zafixováno, bylo zvoleno libovolně. To znamená, že pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí nerovnost

$$|L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x)| \leq$$

$$\leq \alpha \underbrace{L_n(f_0)(x)}_{\rightrightarrows f_0(x)=1} + K \overbrace{\Big( \underbrace{L_n(f_2)(x)}_{\rightrightarrows f_2(x)=x^2} - 2x \underbrace{L_n(f_1)(x)}_{\rightrightarrows f_1(x)=x} + x^2 \underbrace{L_n(f_0)(x)}_{\rightrightarrows f_0(x)=1} \Big)}^{\rightrightarrows 0}.$$

Snadno se vidí, že existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$L_n(f_0)(x) < 2, \qquad |L_n(f_0)(x) - 1| < \frac{\alpha}{\|f\|},$$

$$\Big( L_n(f_2)(x) - 2x\, L_n(f_1)(x) + x^2 L_n(f_0)(x) \Big) < \frac{\alpha}{K},$$

# Důkaz Korovkinovy věty.

Platí-li poslední nerovnost pro každé $y \in \langle a, b\rangle$, platí i pro $y = x$.

I když číslo $x \in \langle a, b\rangle$ bylo dříve zafixováno, bylo zvoleno libovolně. To znamená, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí nerovnost

$$|L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x)| \leq$$

$$\leq \alpha \underbrace{L_n(f_0)(x)}_{\rightrightarrows f_0(x)=1} + K \overbrace{\Big( \underbrace{L_n(f_2)(x)}_{\rightrightarrows f_2(x)=x^2} - 2x \underbrace{L_n(f_1)(x)}_{\rightrightarrows f_1(x)=x} + x^2 \underbrace{L_n(f_0)(x)}_{\rightrightarrows f_0(x)=1} \Big)}^{\rightrightarrows 0}.$$

Snadno se vidí, že existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$L_n(f_0)(x) < 2, \qquad |L_n(f_0)(x) - 1| < \frac{\alpha}{\|f\|},$$

$$\Big(L_n(f_2)(x) - 2x\, L_n(f_1)(x) + x^2 L_n(f_0)(x)\Big) < \frac{\alpha}{K},$$

odkud máme (pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$) nerovnost

$$|L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x)| < 2\alpha + K\frac{\alpha}{K} = 3\alpha.$$

## Důkaz Korovkinovy věty – dokončení.

## Důkaz Korovkinovy věty – dokončení.

Nyní již je to snadné, neboť (pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$) platí

$$|L_n(f)(x) - f(x)| =$$

$\square$

## Důkaz Korovkinovy věty – dokončení.

Nyní již je to snadné, neboť (pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$) platí

$$|L_n(f)(x) - f(x)| = |L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x) + f(x)L_n(f_0)(x) - f(x)|$$

$\square$

## Důkaz Korovkinovy věty – dokončení.

Nyní již je to snadné, neboť (pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$) platí

$$|L_n(f)(x) - f(x)| = |L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x) + f(x)L_n(f_0)(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x)|}_{<3\alpha} + \underbrace{|f(x)|}_{\leq\|f\|} \cdot \underbrace{|L_n(f_0)(x) - 1|}_{<\frac{\alpha}{\|f\|}}$$

$\square$

## Důkaz Korovkinovy věty – dokončení.

Nyní již je to snadné, neboť (pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$) platí

$$|L_n(f)(x) - f(x)| = |L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x) + f(x)L_n(f_0)(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x)|}_{<3\alpha} + \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|} \cdot \underbrace{|L_n(f_0)(x) - 1|}_{<\frac{\alpha}{\|f\|}} < 4\alpha$$

$\square$

## Důkaz Korovkinovy věty – dokončení.

Nyní již je to snadné, neboť (pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$) platí

$$|L_n(f)(x) - f(x)| = |L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x) + f(x)L_n(f_0)(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|L_n(f)(x) - f(x)L_n(f_0)(x)|}_{<3\alpha} + \underbrace{|f(x)|}_{\leq\|f\|} \cdot \underbrace{|L_n(f_0)(x) - 1|}_{<\frac{\alpha}{\|f\|}} < 4\alpha = \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat. □

# Důkaz Weierstrassovy věty

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$.

# Důkaz Weierstrassovy věty

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$.

Definujme posloupnost $(B_n) \subset \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$ předpisem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} \beta_k^n(x)}.$$

# Důkaz Weierstrassovy věty

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$.

Definujme posloupnost $(B_n) \subset \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$ předpisem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} \beta_k^n(x)} .$$

Je zřejmé, že pro každou funkci $f \in C(\langle 0, 1\rangle)$ je posloupnost $(B_n(f))$ posloupností polynomů (tzv. Bernsteinovy polynomy).

# Důkaz Weierstrassovy věty

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$.

Definujme posloupnost $(B_n) \subset \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$ předpisem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} \beta_k^n(x)} .$$

Je zřejmé, že pro každou funkci $f \in C(\langle 0, 1\rangle)$ je posloupnost $(B_n(f))$ posloupností polynomů (tzv. Bernsteinovy polynomy).

Promyslete si, že každý z operátorů $B_n$ je lineární a nezáporný.

# Důkaz Weierstrassovy věty

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$.

Definujme posloupnost $(B_n) \subset \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$ předpisem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} \beta_k^n(x)}.$$

Je zřejmé, že pro každou funkci $f \in C(\langle 0, 1\rangle)$ je posloupnost $(B_n(f))$ posloupností polynomů (tzv. Bernsteinovy polynomy).

Promyslete si, že každý z operátorů $B_n$ je lineární a nezáporný.

Ověříme-li, že na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$B_n(f_0) \rightrightarrows f_0, \quad B_n(f_1) \rightrightarrows f_1 \quad \text{a} \quad B_n(f_2) \rightrightarrows f_2,$$

# Důkaz Weierstrassovy věty

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$.

Definujme posloupnost $(B_n) \subset \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$ předpisem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} \beta_k^n(x)}.$$

Je zřejmé, že pro každou funkci $f \in C(\langle 0, 1\rangle)$ je posloupnost $(B_n(f))$ posloupností polynomů (tzv. Bernsteinovy polynomy).

Promyslete si, že každý z operátorů $B_n$ je lineární a nezáporný.

Ověříme-li, že na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$B_n(f_0) \rightrightarrows f_0, \quad B_n(f_1) \rightrightarrows f_1 \quad \text{a} \quad B_n(f_2) \rightrightarrows f_2,$$

dostaneme (z Korovkinovy věty), že $B_n(f) \rightrightarrows f$ pro každou funkci $f \in C(\langle 0, 1\rangle)$.

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\frac{k}{n}\right)}_{=1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\frac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \left[x + (1-x)\right]^n = 1$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \left[x + (1-x)\right]^n = 1 = f_0(x)$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \big[x + (1-x)\big]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \left[x + (1-x)\right]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \left[x + (1-x)\right]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k}$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \big[x+(1-x)\big]^n = 1 = f_0(x) \quad\Longrightarrow\quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \left[x+(1-x)\right]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k}$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \left[x+(1-x)\right]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k} =$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \big[x + (1-x)\big]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k} =$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = x\big[x+(1-x)\big]^{n-1} = x$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \left[x + (1-x)\right]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k} =$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = x\left[x + (1-x)\right]^{n-1} = x = f_1(x)$$

# Bernsteinovy polynomy: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \big[x+(1-x)\big]^n = 1 = f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad B_n(f_0) \rightrightarrows f_0.$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k}{n}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k} =$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = x\big[x+(1-x)\big]^{n-1} = x = f_1(x)$$

$$\Longrightarrow \quad B_n(f_1) \rightrightarrows f_1.$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\frac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\frac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\frac{x}{n} \ \ (\text{viz výpočet } B_n(f_1)(x))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} S}.$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\frac{x}{n} \text{ (viz výpočet } B_n(f_1)(x))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} S}.$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\frac{x}{n} \ \ \text{(viz výpočet } B_n(f_1)(x))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} S}.$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\frac{x}{n}\ \text{(viz výpočet } B_n(f_1)(x))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} S}.$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\frac{x}{n} \ \text{(viz výpočet } B_n(f_1)(x))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} S}.$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k}$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\frac{x}{n} \ \text{(viz výpočet } B_n(f_1)(x))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} S}.$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k}$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\tfrac{k}{n}\right)}_{=\frac{k^2}{n^2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\frac{x}{n}\ \ \text{(viz výpočet } B_n(f_1)(x))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{ozn.}}{=} S}.$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} = \frac{n-1}{n} x^2 \big[x + (1-x)\big]^{n-2} = \frac{n-1}{n} x^2.$$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2$$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x - x^2}{n},$$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x - x^2}{n},$$

odkud (pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$)

$$|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| = \left| \frac{x - x^2}{n} \right|$$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x-x^2}{n},$$

odkud (pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$)

$$|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| = \left| \frac{x-x^2}{n} \right| \leq \frac{1}{4n}$$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x - x^2}{n},$$

odkud (pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$)

$$|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| = \left| \frac{x - x^2}{n} \right| \le \frac{1}{4n} \to 0,$$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x-x^2}{n},$$

odkud (pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$)

$$|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| = \left|\frac{x-x^2}{n}\right| \leq \frac{1}{4n} \to 0,$$

což ale znamená, že $B_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x-x^2}{n},$$

odkud (pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$)

$$|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| = \left|\frac{x-x^2}{n}\right| \leq \frac{1}{4n} \to 0,$$

což ale znamená, že $B_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Z Korovkinovy věty tedy plyne, že

$$(\forall f \in C(\langle 0,1\rangle)): \; B_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } \langle 0,1\rangle.$$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x-x^2}{n},$$

odkud (pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$)

$$|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| = \left|\frac{x-x^2}{n}\right| \leq \frac{1}{4n} \to 0,$$

což ale znamená, že $B_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Z Korovkinovy věty tedy plyne, že

$$(\forall f \in C(\langle 0,1\rangle)) : \; B_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } \langle 0,1\rangle.$$

To znamená, že ke každé funkci $f$ spojité na intervalu $\langle 0,1\rangle$ existuje posloupnost polynomů, která (na $\langle 0,1\rangle$) stejnoměrně konverguje k funkci $f$

Celkem dostáváme

$$B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = x^2 + \frac{x-x^2}{n},$$

odkud (pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$)

$$|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| = \left|\frac{x-x^2}{n}\right| \leq \frac{1}{4n} \to 0,$$

což ale znamená, že $B_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Z Korovkinovy věty tedy plyne, že

$$(\forall f \in C(\langle 0, 1\rangle)) : \ B_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } \langle 0, 1\rangle.$$

To znamená, že ke každé funkci $f$ spojité na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje posloupnost polynomů, která (na $\langle 0, 1\rangle$) stejnoměrně konverguje k funkci $f$, což je ekvivalentní s tvrzením Weierstrassovy věty.

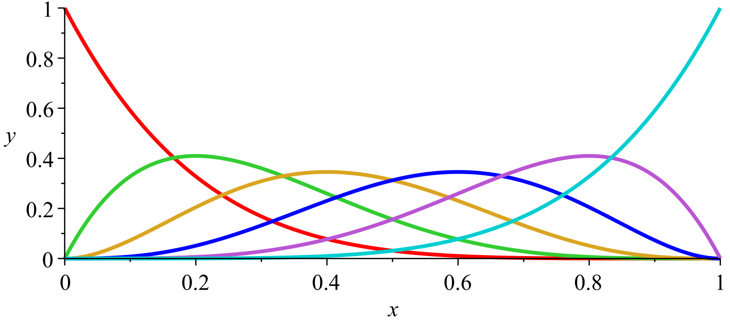
# Bernsteinovy bázové polynomy: $\beta_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

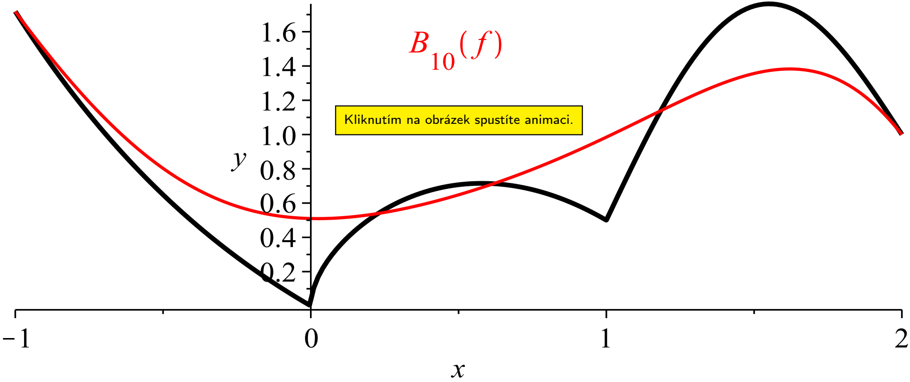
## Ilustrace pro $n = 5$:

Na obrázku níže jsou znázorněny polynomy

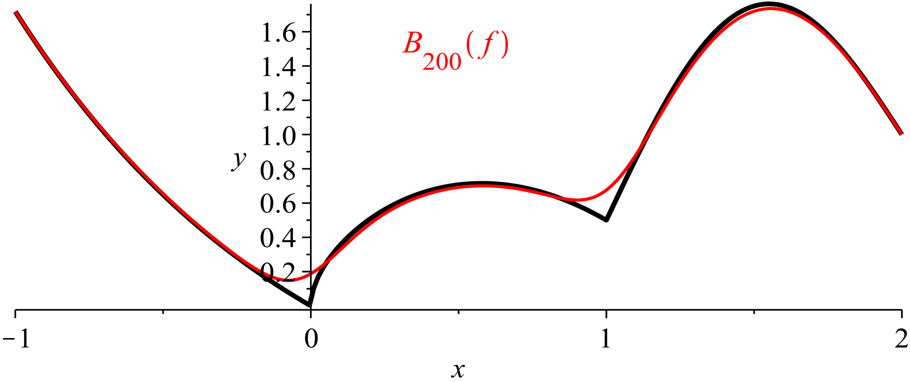
$$\beta_0^5(x) = (1-x)^5, \quad \beta_1^5(x) = 5x(1-x)^4, \quad \beta_2^5(x) = 10x^2(1-x)^3,$$

$$\beta_3^5(x) = 10x^3(1-x)^2, \quad \beta_4^5(x) = 5x^4(1-x) \quad \text{a} \quad \beta_5^5(x) = x^5.$$






V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.


1.6
1.4
1.2
1.0
y
0.8
0.6
0.4
0.2
$B_{200}(f)$
−1
0
1
2
x

## Věta (jiný důsledek Korovkinovy věty)

*Pro každou funkci* $f \in C(\langle a, b\rangle)$ *a každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existuje po částech lineární funkce* $\varphi \in C(\langle a, b\rangle)$ *taková, že* $\|\varphi - f\| < \varepsilon$*.*

## Věta (jiný důsledek Korovkinovy věty)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje po částech lineární funkce $\varphi \in C(\langle a, b\rangle)$ taková, že $\|\varphi - f\| < \varepsilon$.*

## Důkaz.

Podobně jako v důkazu Weierstrassovy věty definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\varphi_k^n(x),$$

## Věta (jiný důsledek Korovkinovy věty)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b \rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje po částech lineární funkce $\varphi \in C(\langle a, b \rangle)$ taková, že $\|\varphi - f\| < \varepsilon$.*

## Důkaz.

Podobně jako v důkazu Weierstrassovy věty definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b \rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n) \varphi_k^n(x),$$

kde $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n$ je ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a $\varphi_k^n \in C(\langle a, b \rangle)$ je funkce, která je na každém z intervalů $\langle x_{i-1}^n, x_i^n \rangle$, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$, lineární a platí pro ni

$$\varphi_k^n(x_i^n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

## Věta (jiný důsledek Korovkinovy věty)

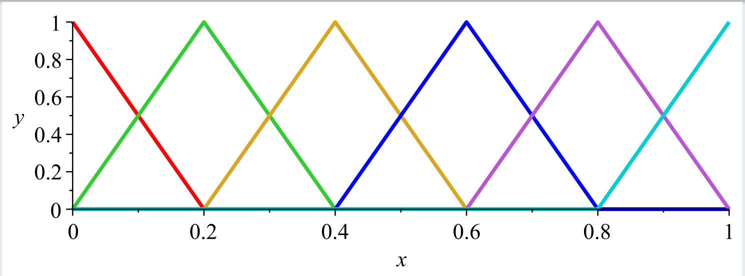
*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje po částech lineární funkce $\varphi \in C(\langle a, b\rangle)$ taková, že $\|\varphi - f\| < \varepsilon$.*

## Důkaz.

Podobně jako v důkazu Weierstrassovy věty definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\varphi_k^n(x),$$

Ilustrace bázových funkcí $\varphi_k^n$ pro $n = 5$:



## Věta (jiný důsledek Korovkinovy věty)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje po částech lineární funkce $\varphi \in C(\langle a, b\rangle)$ taková, že $\|\varphi - f\| < \varepsilon$.*

## Důkaz.

Podobně jako v důkazu Weierstrassovy věty definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\varphi_k^n(x),$$

kde $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n$ je ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\varphi_k^n \in C(\langle a, b\rangle)$ je funkce, která je na každém z intervalů $\langle x_{i-1}^n, x_i^n\rangle$, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$, lineární a platí pro ni

$$\varphi_k^n(x_i^n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

## Věta (jiný důsledek Korovkinovy věty)

*Pro každou funkci $f \in C(\langle a, b\rangle)$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje po částech lineární funkce $\varphi \in C(\langle a, b\rangle)$ taková, že $\|\varphi - f\| < \varepsilon$.*

## Důkaz.

Podobně jako v důkazu Weierstrassovy věty definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\varphi_k^n(x),$$

kde $x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n$ je ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\varphi_k^n \in C(\langle a, b\rangle)$ je funkce, která je na každém z intervalů $\langle x_{i-1}^n, x_i^n\rangle$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, lineární a platí pro ni

$$\varphi_k^n(x_i^n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

Je jasné, že každý z operátorů $L_n$ je lineární a nezáporný.

## Věta (jiný důsledek Korovkinovy věty)

*Pro každou funkci* $f \in C(\langle a, b\rangle)$ *a každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existuje po částech lineární funkce* $\varphi \in C(\langle a, b\rangle)$ *taková, že* $\|\varphi - f\| < \varepsilon$*.*

## Důkaz.

Podobně jako v důkazu Weierstrassovy věty definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\varphi_k^n(x),$$

kde $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n$ je ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\varphi_k^n \in C(\langle a, b\rangle)$ je funkce, která je na každém z intervalů $\langle x_{i-1}^n, x_i^n\rangle$, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$, lineární a platí pro ni

$$\varphi_k^n(x_i^n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

Je jasné, že každý z operátorů $L_n$ je lineární a nezáporný.

Dále je zřejmé, že (pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \langle a, b\rangle$) platí

$$L_n(f_0)(x) = f_0(x), \quad L_n(f_1)(x) = f_1(x).$$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b \rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x)$$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x)$$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(x - x_{k-1}^n) + (x_k^n - x)}{2}\right)^2$$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(x - x_{k-1}^n) + (x_k^n - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x_k^n - x_{k-1}^n)^2}{4}$$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(x - x_{k-1}^n) + (x_k^n - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x_k^n - x_{k-1}^n)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4n^2}.$$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(x - x_{k-1}^n) + (x_k^n - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x_k^n - x_{k-1}^n)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4n^2}.$$

Proto $\max\limits_{x \in \langle a, b\rangle} |L_n(f_2)(x) - f_2(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2}$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x) \overset{AG}{\leq} \left(\frac{(x - x_{k-1}^n) + (x_k^n - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x_k^n - x_{k-1}^n)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4n^2}.$$

Proto $\max\limits_{x \in \langle a, b\rangle} |L_n(f_2)(x) - f_2(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2} \to 0$

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(x - x_{k-1}^n) + (x_k^n - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x_k^n - x_{k-1}^n)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4n^2}.$$

Proto $\max\limits_{x \in \langle a, b\rangle} |L_n(f_2)(x) - f_2(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

## Důkaz.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy triviálně platí $L_n(f_0) \rightrightarrows f_0$ a $L_n(f_1) \rightrightarrows f_1$.

Zbývá dokázat $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Není těžké si rozmyslet, že na každém z intervalů $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, kde $k \in \{1, \ldots, n\}$, platí

$$|L_n(f_2)(x) - f_2(x)| = f_2(x_{k-1}^n) + \frac{f_2(x_k^n) - f_2(x_{k-1}^n)}{x_k^n - x_{k-1}^n}(x - x_{k-1}^n) - f_2(x) =$$

$$= -x^2 + x(x_k^n + x_{k-1}^n) - x_k^n x_{k-1}^n = (x - x_{k-1}^n)(x_k^n - x) \overset{\mathrm{AG}}{\leq} \left(\frac{(x - x_{k-1}^n) + (x_k^n - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x_k^n - x_{k-1}^n)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4n^2}.$$

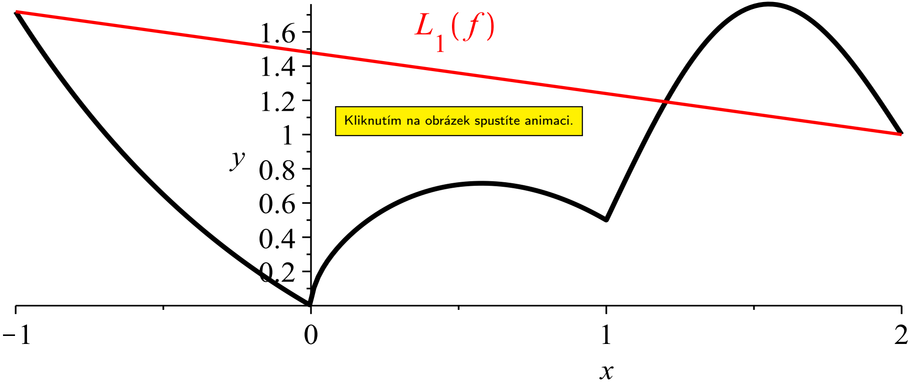
Proto $\max\limits_{x \in \langle a, b\rangle} |L_n(f_2)(x) - f_2(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ na $\langle a, b\rangle$.

Korovkinova věta nám pak dává

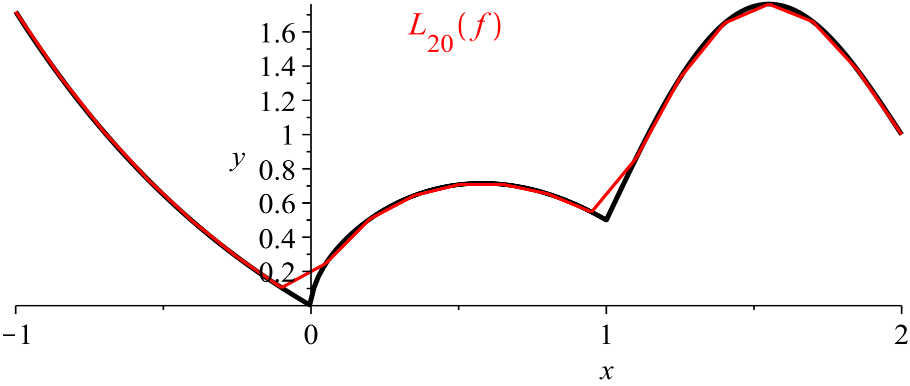
$$(\forall f \in C(\langle a, b\rangle)):\ L_n(f) \rightrightarrows f,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

# Aproximace spojité funkce po částech lineárními (spojitými) funkcemi




V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.


$L_{20}(f)$
1.6
1.4
1.2
1
y
0.8
0.6
0.4
0.2
−1
0
1
2
x

Definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\omega_k^n(x),$$

Definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\omega_k^n(x),$$

kde $x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n$ je ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\omega_k^n$ je polynom stupně $n$ splňující (pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$)

$$\omega_k^n(x_i^n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

Definujme posloupnost $(L_n) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ předpisem

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n)\omega_k^n(x),$$

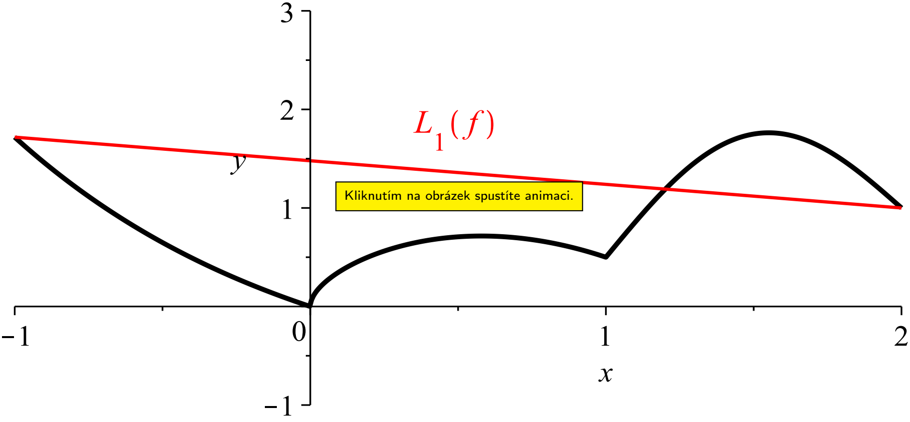
kde $x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n$ je ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\omega_k^n$ je polynom stupně $n$ splňující (pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$)

$$\omega_k^n(x_i^n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

Není těžké si uvědomit, že

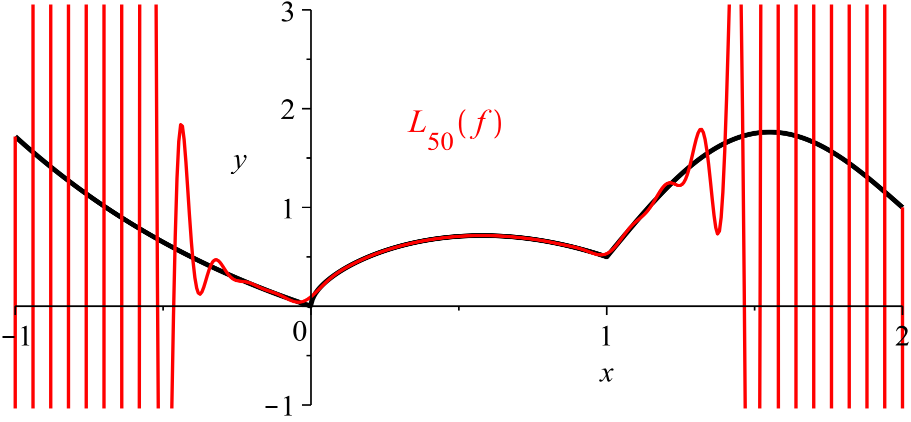
$$\omega_k^n(x) = \frac{(x - x_0^n)\dots\color{red}{(x - x_k^n)}\color{black}\dots(x - x_n^n)}{(x_k^n - x_0^n)\dots\color{red}{(x_k^n - x_k^n)}\color{black}\dots(x_k^n - x_n^n)}.$$

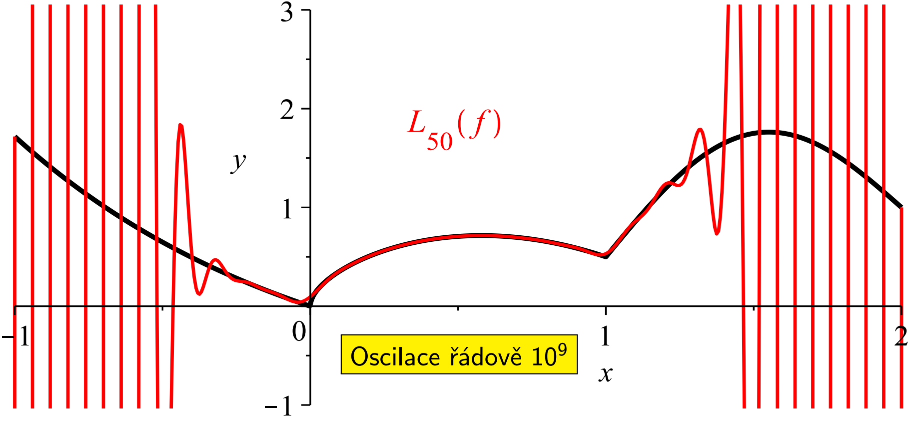
# Aproximace spojité funkce Lagrangeovými interpolačními polynomy



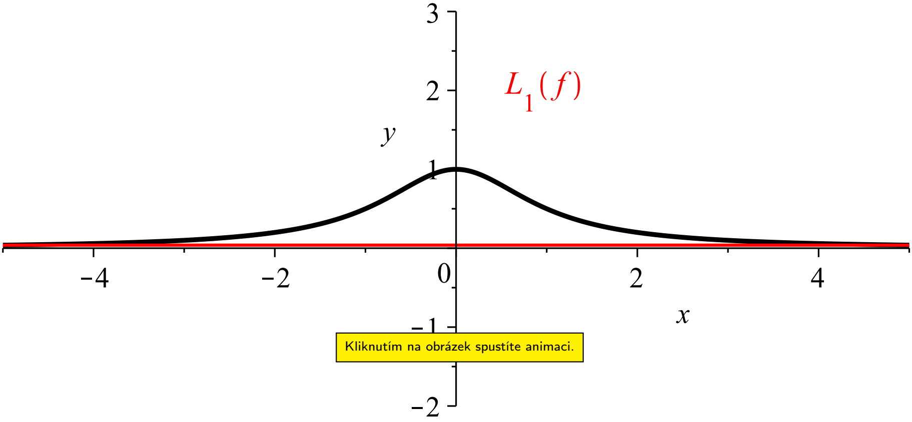

Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.


3
2
1
−1
$L_{50}(f)$
y
−1
0
1
2
x


3
2
1
−1
0
1
2
y
x
$L_{50}(f)$
Oscilace řádově $10^9$

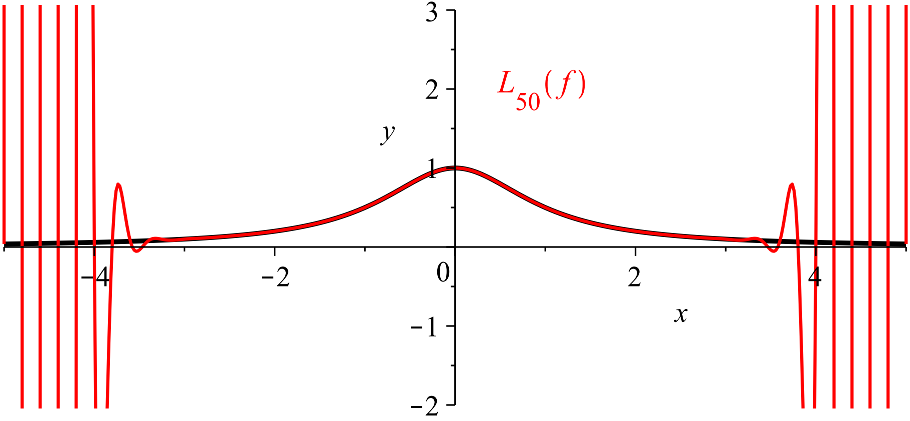
# Aproximace spojité funkce Lagrangeovými interpolačními polynomy

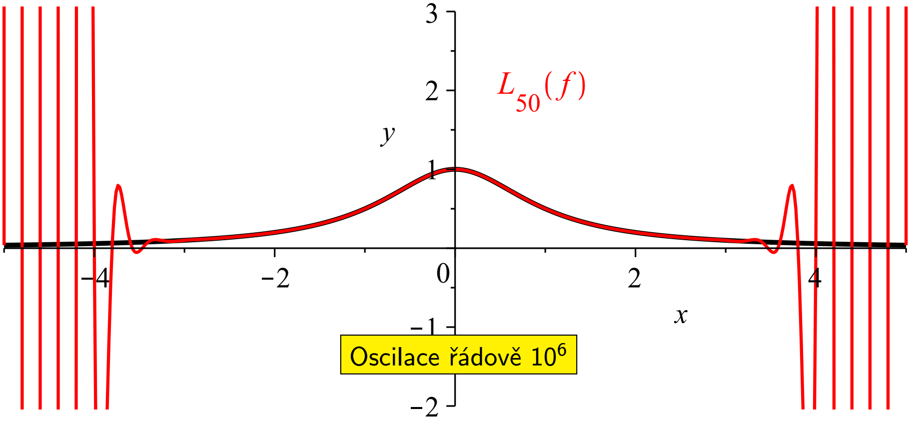



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

# Aproximace spojité funkce Lagrangeovými interpolačními polynomy




3
2
1
−1
−2
y
x
−4
−2
0
2
4
$L_{50}(f)$
Oscilace řádově $10^6$

# Jiná verze Korovkinovy věty

# Jiná verze Korovkinovy věty

## Věta

*Nechť* $(L_n)$ *je posloupnost* **nezáporných** *lineárních operátorů z prostoru*

$$C_{per}(\langle -\pi, \pi \rangle) \stackrel{def.}{=} \{f \in C(\langle -\pi, \pi \rangle) : \; f(-\pi) = f(\pi)\}$$

*do sebe.*

# Jiná verze Korovkinovy věty

## Věta

*Nechť* $(L_n)$ *je posloupnost* **nezáporných** *lineárních operátorů z prostoru*

$$C_{per}(\langle -\pi, \pi \rangle) \overset{def.}{=} \{ f \in C(\langle -\pi, \pi \rangle) : \; f(-\pi) = f(\pi) \}$$

*do sebe.*

*Platí-li*

$$L_n(f_0) \rightrightarrows f_0, \quad L_n(f_1) \rightrightarrows f_1 \quad a \quad L_n(f_2) \rightrightarrows f_2 \quad na \; \langle -\pi, \pi \rangle,$$

# Jiná verze Korovkinovy věty

## Věta

*Nechť* $(L_n)$ *je posloupnost* **nezáporných** *lineárních operátorů z prostoru*

$$C_{per}(\langle -\pi, \pi \rangle) \stackrel{def.}{=} \{f \in C(\langle -\pi, \pi \rangle) : \ f(-\pi) = f(\pi)\}$$

*do sebe.*

*Platí-li*

$$L_n(f_0) \rightrightarrows f_0, \quad L_n(f_1) \rightrightarrows f_1 \quad a \quad L_n(f_2) \rightrightarrows f_2 \quad na\ \langle -\pi, \pi \rangle,$$

*kde*

$$f_0(x) \stackrel{def.}{=} 1, \quad f_1(x) \stackrel{def.}{=} \cos x \quad a \quad f_2(x) \stackrel{def.}{=} \sin x,$$

# Jiná verze Korovkinovy věty

## Věta

*Nechť* $(L_n)$ *je posloupnost* **nezáporných** *lineárních operátorů z prostoru*

$$C_{per}(\langle -\pi, \pi\rangle) \overset{def.}{=} \{f \in C(\langle -\pi, \pi\rangle) : \; f(-\pi) = f(\pi)\}$$

*do sebe.*

*Platí-li*

$$L_n(f_0) \rightrightarrows f_0, \quad L_n(f_1) \rightrightarrows f_1 \quad a \quad L_n(f_2) \rightrightarrows f_2 \quad na \; \langle -\pi, \pi\rangle,$$

*kde*

$$f_0(x) \overset{def.}{=} 1, \quad f_1(x) \overset{def.}{=} \cos x \quad a \quad f_2(x) \overset{def.}{=} \sin x,$$

*pak*

$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad na \; \langle -\pi, \pi\rangle$$

**pro každou funkci** $f \in C_{per}(\langle -\pi, \pi\rangle)$.

Toto tvrzení bychom dokázali velmi podobně jako klasickou verzi Korovkinovy věty. Potřebovali bychom k tomu ale následující lemma.

Toto tvrzení bychom dokázali velmi podobně jako klasickou verzi Korovkinovy věty. Potřebovali bychom k tomu ale následující lemma.

## Lemma

*Nechť $f \in C_{per}(\langle -\pi, \pi \rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle -\pi, \pi \rangle): \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K\big(1 - \cos(y - x)\big).$$

Toto tvrzení bychom dokázali velmi podobně jako klasickou verzi Korovkinovy věty. Potřebovali bychom k tomu ale následující lemma.

## Lemma

*Nechť* $f \in C_{per}(\langle -\pi, \pi \rangle)$. *Pak pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *existuje* $K \in \mathbb{R}^+$ *(závislé na* $\alpha$*) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle -\pi, \pi \rangle): \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K\big(1 - \cos(y - x)\big).$$

Z poslední verze Korovkinovy věty bychom dostali následující tvrzení.

Toto tvrzení bychom dokázali velmi podobně jako klasickou verzi Korovkinovy věty. Potřebovali bychom k tomu ale následující lemma.

## Lemma

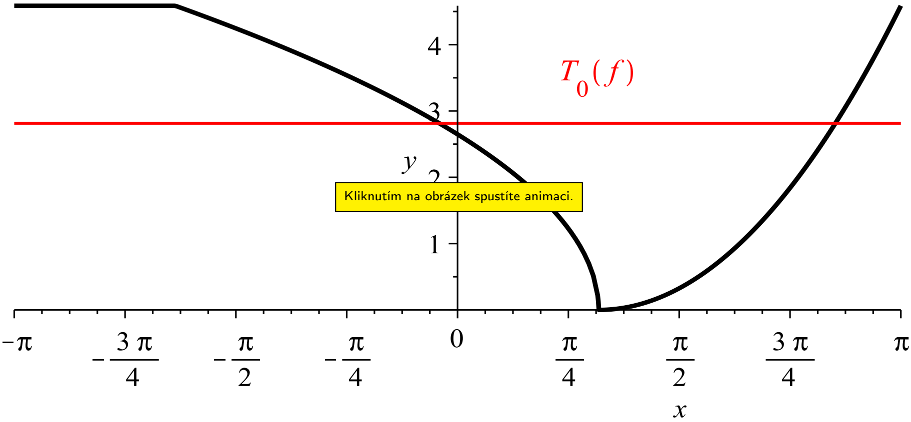
*Nechť $f \in C_{per}(\langle -\pi, \pi \rangle)$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}^+$ (závislé na $\alpha$) takové, že*

$$(\forall x, y \in \langle -\pi, \pi \rangle): \ |f(y) - f(x)| \leq \alpha + K\big(1 - \cos(y - x)\big).$$

Z poslední verze Korovkinovy věty bychom dostali následující tvrzení.

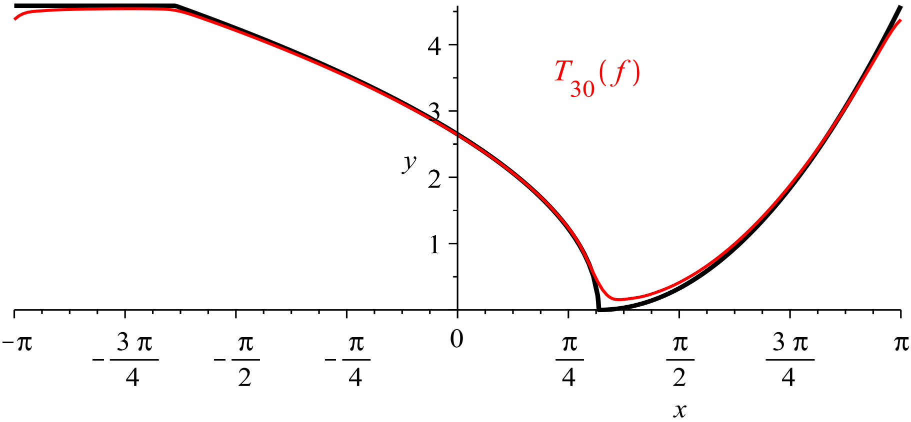
## Věta

*Ke každé funkci $f \in C_{per}(\langle -\pi, \pi \rangle)$ existuje posloupnost $(T_n(f))$ trigonometrických polynomů, která (na $\langle -\pi, \pi \rangle$) stejnoměrně konverguje k funkci $f$.*




V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

# Aproximace spojité periodické funkce trigonometrickými polynomy



# Literatura

Jiří Veselý: Weierstrassova věta o aproximaci.
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 3, 181–190
(dostupné na `http://dml.cz/dmlcz/141131`)

# Děkuji za pozornost.