OSMA

OBČASNÝ SEMINÁŘ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

PETR VODSTRČIL

15. 11. 2022

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

CO JSOU TO REÁLNÁ ČÍSLA?

[Jako nástroj ke konstrukci reálných čísel nám budou sloužit tzv. Dedekindovy řezy.]

Předpokládejme, že máme k dispozici strukturu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ [racionální čísla] splňující následující axiomy:

A1 $(\forall a, b \in \mathbb{Q}): \quad a+b = b+a$

A2 $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}): \quad a+(b+c) = (a+b)+c$

A3 $(\exists 0 \in \mathbb{Q})(\forall a \in \mathbb{Q}): \quad a+0 = a$

A4 $(\forall a \in \mathbb{Q})(\exists (-a) \in \mathbb{Q}): \quad a+(-a) = 0$

A5 $(\forall a, b \in \mathbb{Q}): \quad a \cdot b = b \cdot a$

A6 $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}): \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

A7 $(\exists 1 \in \mathbb{Q})(\forall a \in \mathbb{Q}): \quad a \cdot 1 = a \quad [1 \neq 0]$

A8 $(\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(\exists a^{-1} \in \mathbb{Q}): \quad a \cdot a^{-1} = 1$

A9 $(\forall a,b,c \in \mathbb{Q}): \quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

A10 Pro každé $a,b \in \mathbb{Q}$ nastává právě jeden z případů

$$a<b, \quad a=b, \quad b<a.$$

A11 $(\forall a,b,c \in \mathbb{Q}): \quad (a<b \wedge b<c) \Rightarrow a<c$

A12 $(\forall a,b,c \in \mathbb{Q}):$

$$a<b \Rightarrow a+c < b+c$$
$$(a<b \wedge c>0) \Rightarrow a\cdot c < b\cdot c$$

Cílem nyní bude definovat strukturu $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ [reálná čísla] splňující kromě všech výše uvedených axiomů (ve kterých množinu $\mathbb{Q}$ nahradíme množinou $\mathbb{R}$) i axiom

A13 Každá neprázdná shora omezená množina $M\subset\mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ supremum.

A13' Každá neprázdná zdola omezená množina $M\subset\mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ infimum.

CVIČENÍ

Pokud jsou A1 – A12 splněny, jsou A13 a A13' ekvivalentní.

DEFINICE ŘEZU

Dvojici množin (A, B) $(A, B \subset \mathbb{Q})$ nazveme řezem, platí-li:

- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
- $A \cup B = \mathbb{Q}$
- $(\forall a \in A)(\forall b \in B) : a < b$

A – dolní skupina řezu
B – horní skupina řezu

VĚTA

Množina $B \subset \mathbb{Q}$ je horní skupinou nějakého řezu, právě když platí podmínky:

1) $B \neq \emptyset$, $B \neq \mathbb{Q}$
2) Je-li $b \in B$, $b' > b$, $[b' \in \mathbb{Q}]$ pak $b' \in B$.

DŮKAZ

je jednoduchým cvičením.

PŘÍKLADY ŘEZŮ

a) $\alpha = (A, B)$, kde $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$. [jasné]

b) $\alpha = (A, B)$, kde $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\}$,

$$A = \mathbb{Q} \setminus B.$$

[Ověřte, že se jedná o řez.]

Uvažujme nyní libovolný řez $\alpha = (A, B)$.

Zřejmě nastane právě 1 ze 4 možností:

1) max A existuje, min B neexistuje.
2) max A neexistuje, min B existuje.
3) max A ani min B neexistují.
4) max A i min B existují.

CVIČENÍ

Dokažte, že neexistují řezy typu 4).

Řezy typu 2) budeme od této chvíle ze svých úvah vylučovat a uvažovat budeme pouze řezy typu 1) a 3), tj. takové řezy, jejichž horní skupina nemá nejmenší prvek.

DEFINICE

Řez, který je typu 1) nebo 3), nazveme reálným číslem.

POZNÁMKA

Řez $\alpha = (A, B)$, kde $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$

je řezem typu 1).

POZNÁMKA

Pro každé $q \in \mathbb{Q}$ lze přirozeně definovat řez $q^* = (A, B)$, kde $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq q\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > q\}$.
[q^* je typu 1)]

TVRZENÍ

Řez $\alpha = (A, B)$, kde $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\}$,
$A = \mathbb{Q} \setminus B$

je řezem typu 3).

DŮKAZ

Je třeba ukázat, že $\min B$ ani $\max A$ neexistují.
Dokažme pouze první tvrzení. Druhé se dokáže podobně (uvědomíme-li si, že $(\forall x \in \mathbb{Q}) : x^2 \neq 2$).

[Nechť $x > 0 \wedge x^2 > 2$. Hledejme vhodné y tak, aby $0 < y < x$ a $y^2 > 2$.]

y hledejme ve tvaru $y = x - h$, kde $0 < h < x$.

$$y^2 = (x-h)^2 = x^2 - 2xh + h^2 > x^2 - 2xh > 2.$$

lze zařídit

$$\left[h < \frac{x^2 - 2}{2x} \quad (< x) \right]$$

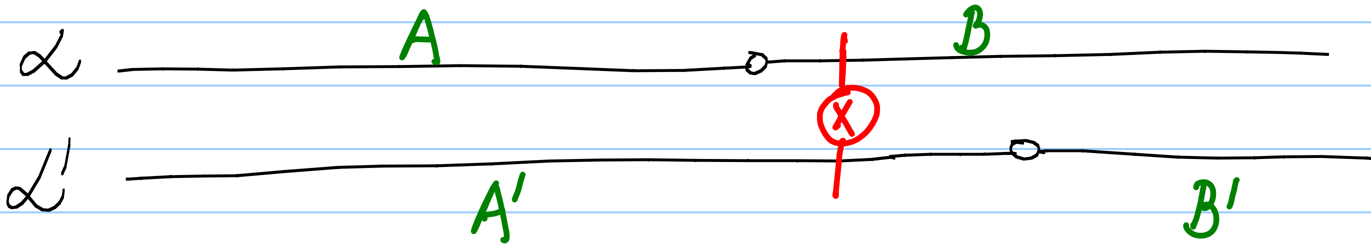
$\square$

USPOŘÁDÁNÍ ŘEZŮ

[uvažujeme pouze řezy typu 1) a 3)]

Nechť $\alpha = (A, B)$ a $\alpha' = (A', B')$.

Existuje-li $x \in \mathbb{Q}$ takové, že $x \in A' \wedge x \in B$, říkáme, že $\alpha < \alpha'$.



CVIČENÍ

Dokažte, že pro řezy platí axiomy A10 a A11.

SČÍTÁNÍ ŘEZŮ

[uvažujeme pouze řezy typu 1) a 3)]

Nechť $\alpha = (A, B)$ a $\alpha' = (A', B')$.

Pak definujeme

$$\alpha + \alpha' \overset{def.}{=} \Big(\mathbb{Q} \setminus (B + B'),\ \underbrace{B + B'}_{= \{b + b' \,:\, b \in B \wedge b' \in B'\}}\Big).$$

CVIČENÍ

Promyslete si, že $\alpha + \alpha'$ je skutečně řez, který navíc není typu 2).

POZNÁMKA

- Axiomy A1 a A2 jsou pro řezy zřejmě splněny.
- Ukážeme, že řez $0^* = (\mathbb{Q}_0^-, \mathbb{Q}^+)$ je nulovým prvkem v množině řezů. (1. a 3. typu)

Nechť $\alpha = (A, B)$. Chceme dokázat, že

$$\alpha + 0^* = \alpha, \text{ tzn.}$$

$$\boxed{B + \mathbb{Q}^+ = B.}$$

$\subset$ Je-li $x = b + q$ $(b \in B,\ q \in \mathbb{Q}^+)$, pak

$$x > b \ (\in B) \implies x \in B.$$

$\supset$ Nechť $x \in B$. Protože $\min B$ neexistuje, najdeme $y \in B$ takové, že $y < x$.

Pak ovšem $x = \underbrace{y}_{B} + \underbrace{(x-y)}_{\mathbb{Q}^+} \in B + \mathbb{Q}^+$.

Platí tedy i A3.

- Nyní uvažujme řez $\alpha = (A, B)$ a k němu sestrojme řez $(-\alpha) \overset{\text{df.}}{=} \left(\mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q}^+ - A),\ \underbrace{\mathbb{Q}^+ - A}_{}\right)$.

$= \{q - a : q \in \mathbb{Q}^+ \wedge a \in A\}$

[Ověřte, že $(-\alpha)$ je skutečně řez, který není typu 2).]

Dále dokážeme, že $\alpha + (-\alpha) = 0^*$,

tzn. $\boxed{B + (\mathbb{Q}^+ - A) = \mathbb{Q}^+.}$

Inkluze $\subset$ je snadná. Je-li $x \in B + (\mathbb{Q}^+ - A)$, pak $x = b + q - a$, kde $b \in B$, $q \in \mathbb{Q}^+$, $a \in A$

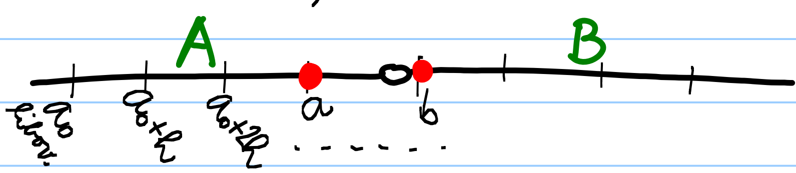
$\overset{b>a}{\Longrightarrow} \quad x > q \ (\in \mathbb{Q}^+) \implies x \in \mathbb{Q}^+.$

[Pro důkaz opačné inkluze $\supset$ budeme potřebovat následující tvrzení.]

TVRZENÍ

Nechť (A, B) je řez a $h > 0$ je libovolné. [$h \in \mathbb{Q}$]
Pak existuje $a \in A$ a $b \in B$ takové, že $b - a = h$.

MYŠLENKA DŮKAZU



Nechť tedy $x \in \mathbb{Q}^+$. Pak $\frac{1}{2}x \in \mathbb{Q}^+$ a podle pomocného tvrzení existuje $a \in A$ a $b \in B$ tak, že $b - a = \frac{1}{2}x$.

Odtud $$x = \underbrace{b}_{\in B} + \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x - a}_{\in \mathbb{Q}^+ - A}\Big).$$

[Platí tedy i (A4).]

NÁSOBENÍ ŘEZŮ

Nechť $\alpha = (A, B) > 0^*$ a
$\alpha' = (A', B') > 0^*$.

Pak definujeme

$$\alpha \cdot \alpha' = \Big(\mathbb{Q} \setminus (B \cdot B'),\ \underbrace{B \cdot B'}_{=\{b \cdot b' \,:\, b \in B \wedge b' \in B'\}}\Big).$$

Dále definujeme

$$\alpha \cdot 0^* = 0^* \cdot \alpha = 0^* \quad \text{pro libovolné } \alpha,$$

$$(-\alpha) \cdot \alpha' = \alpha \cdot (-\alpha') = -(\alpha \cdot \alpha'),$$

$$(-\alpha) \cdot (-\alpha') = \alpha \cdot \alpha' \quad \text{pro } \alpha > 0^*,\ \alpha' > 0^*.$$

POZNÁMKA

Podobně jako u operace + bychom i nyní mohli dokázat všechny vlastnosti operace $\cdot$.

CVIČENÍ

Uvažujme řez $\alpha = (A, B)$, kde

$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\}$, $A = \mathbb{Q} \setminus B$.

Ukažte, že platí $\alpha^2 = 2^*$.

VĚTA

Každá neprázdná zdola omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ infimum.

[$\mathbb{R}$ – množina řezů typu 1) a 3)]

DŮKAZ

Každé $x \in M$ lze zapsat ve tvaru (A_x, B_x).

Definujme $B = \bigcup_{x \in M} B_x \qquad A = \mathbb{Q} \setminus B.$

Není těžké si promyslet (udělejte to), že platí:

$$M \neq \emptyset \implies B \neq \emptyset,$$
$$M \text{ zdola omezená} \implies B \neq \mathbb{Q}$$

a že $\alpha = (A, B)$ je řez, který není typu 2). [rozmyslete si!]

Dokážeme, že platí $\alpha = \inf M$.

Předpokládejme, že $(\exists x \in M): x < \alpha$.

$\implies (A_x, B_x) < (A, B) \implies$

$\exists y \in B_x \cap A \subset B \cap A = \emptyset.$ (SPOR)

Je tedy α dolní odhad množiny M.

Předp., že $(A', B') = \alpha' > \alpha = (A, B) \Longrightarrow$

$\exists\, y \in A' \cap \underset{\bigcup_{x \in M} B_x}{\underset{\shortparallel}{B}} \Longrightarrow y \in A' \cap B_x$ (pro nějaké $x \in M$)

$\Longrightarrow \alpha' > x$ (pro nějaké $x \in M$) $\Longrightarrow$

α' není dolní odhad množiny M $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha$ je největší dolní odhad M $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha = \inf M$. $\square$

DALŠÍ TVRZENÍ EKVIVALENTNÍ S VĚTOU O SUPREMU / INFIMU

- Monotónní omezená posloupnost je konvergentní.
- Průnik do sebe vnořených uzavřených omezených intervalů je neprázdný.
- Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.
- Každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

LITERATURA

[1] JARNÍK, V.: Diferenciální počet (I). Praha: Academia, 1984.