

Cody Dock Bridge pohledem matematiky

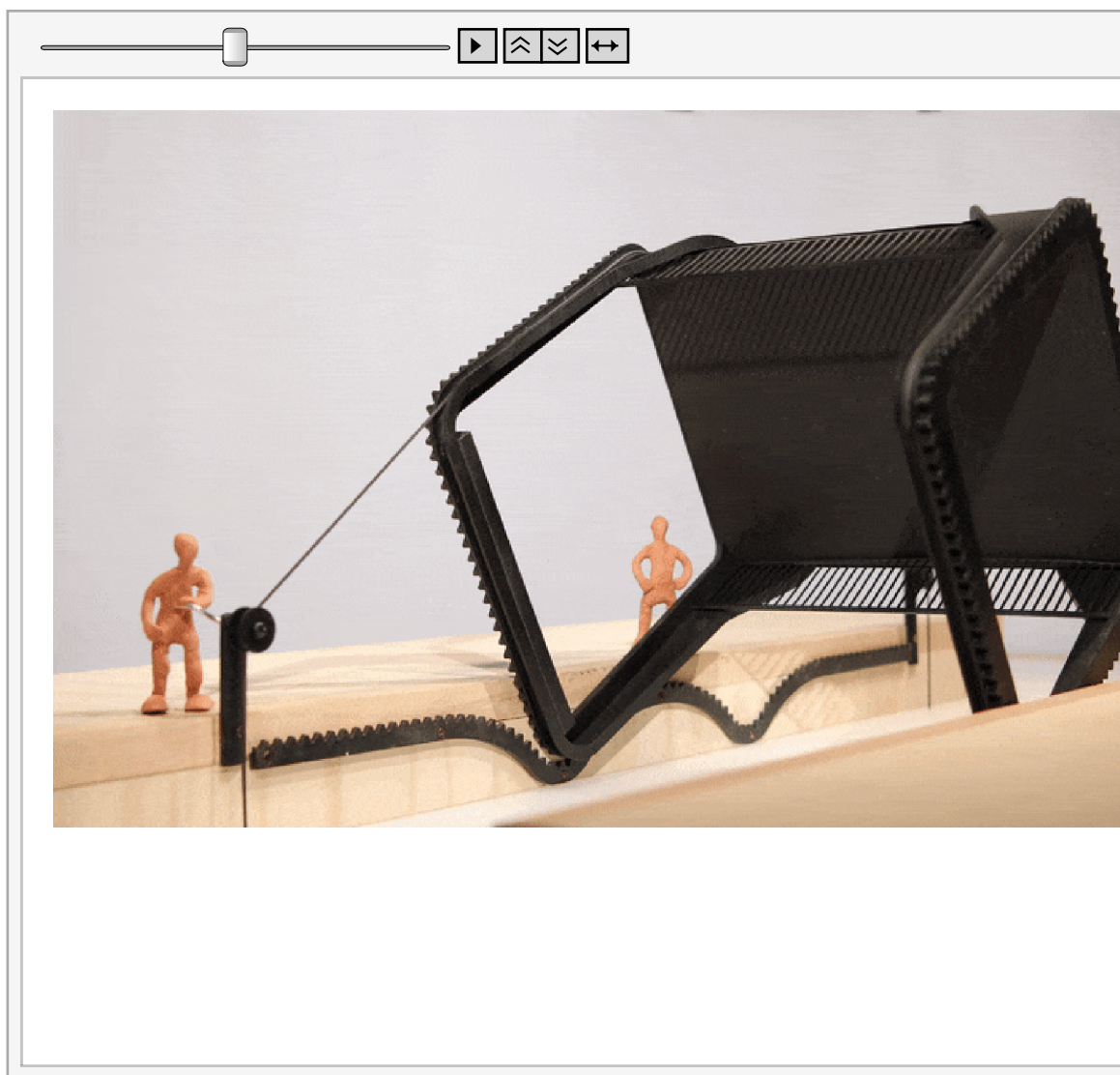
Antonín Slavík

(Matematicko-fyzikální fakulta UK)

Cody Dock Bridge

- Nový most v londýnské části Cody Dock, otevřen v roce 2022
- Thomas Randall-Page (architekt), Alfred Jacquemot (stavební inženýr); velký počet návrhářů, inženýrů a dělníků

Jedná se o velmi originální konstrukci, která za běžných okolností slouží chodcům a cyklistům, avšak otočením o 180 ° vznikne prostor umožňující proplouvání lodí.





Technické parametry:

- Hmotnost je přibližně 12 000 kg.
- Most je tvořen dvěma čtvercovými rámy o straně délky 5,4 m se zaoblenými rohy, které jsou spojeny mostovkou o délce 7,6 m.
- Při otáčení zůstává geometrický střed čtverců ve stejné výšce.
- Těžiště mostu je zhruba ve stejné výšce jako geometrický střed. Hmotnost mostovky je vyvážena umístěním cca 2500 kg betonu a oceli podél horních hran čtverců.
- Aby se zabránilo prokluzování mostu během otáčení, jsou strany čtverců ozubené. Při otáčení zuby zapadají do ocelových válců umístěných podél zakřivené dráhy.



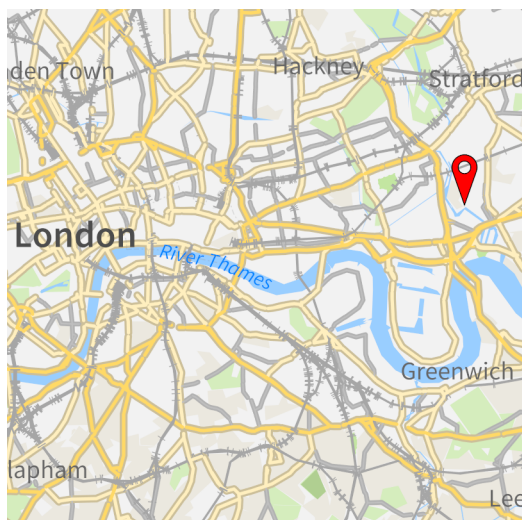
Matematický problém:

Jaký tvar má mít zakřivená dráha, aby geometrický střed čtverců zůstal ve stejné výšce?

Díky této vlastnosti je možné obsluhovat most ručně, není potřeba elektrický pohon.

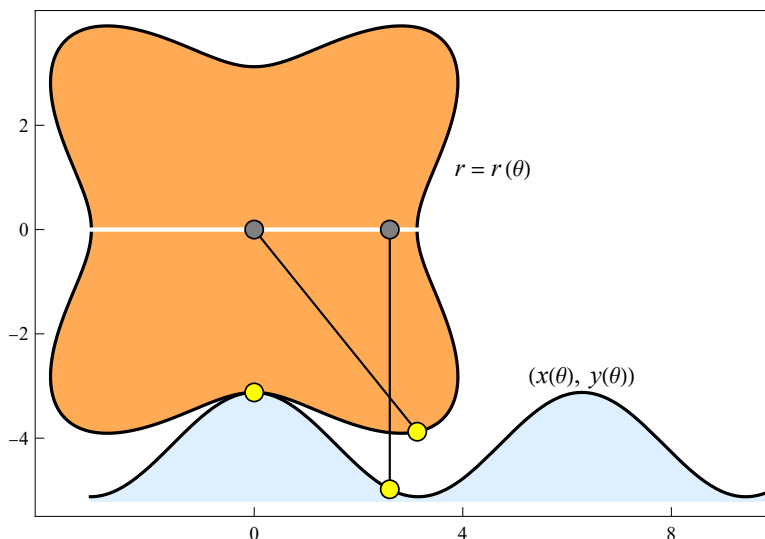
Most je natolik netradiční, že získal ocenění *Bridges Design Award*.

Nachází se na řece Lea, která pramení v jihovýchodní Anglii a v Londýně se vlévá do Temže.



Kola a vozovky

- Předpokládejme, že „kolo“ má v polárních souřadnicích rovnici $r = r(\theta)$, přičemž těžiště je v počátku soustavy souřadnic (ve skutečnosti může jít o libovolný pevně zvolený bod v soustavě souřadnic spojené s kolem, ne nutně uvnitř kola).
- Hledáme tvar vozovky, po které se kolo může otáčet a těžiště bude zůstávat ve stejné výšce. Nechť bod na hranici kola, který má polární souřadnice $(\theta, r(\theta))$, se dotkne vozovky v bodě $(x(\theta), y(\theta))$. Pak $\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta))$ je parametrizace vozovky.
- Počáteční podmínka: $x(-\pi/2) = 0$. Funkce y bude obvykle záporná.



- Těžiště zůstává ve stejné výšce: $y(\theta) = -r(\theta)$
- Kolo se valí bez prokluzování: $\int_{-\pi/2}^{\theta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\theta} \sqrt{r(\alpha)^2 + r'(\alpha)^2} d\alpha$

Derivováním získáme

$$y'(\theta) = -r'(\theta),$$

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r(\theta)^2 + r'(\theta)^2,$$

tedy:

$$x'(\theta)^2 = r(\theta)^2,$$

$$x'(\theta) = r(\theta).$$

Výsledek: $x(\theta) = \int_{-\pi/2}^{\theta} r(t) dt, \quad y(\theta) = -r(\theta).$

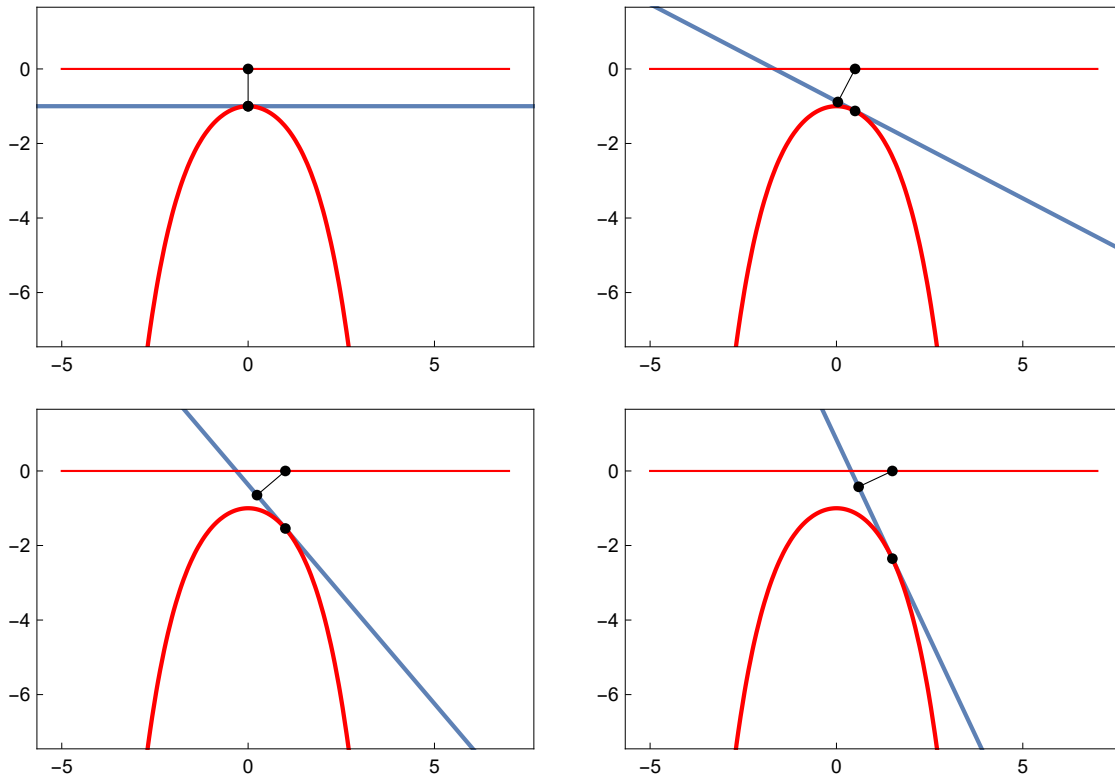
Příklady

- Kolo ve tvaru jednotkového kruhu:

$$r(\theta) = 1 \Rightarrow x(\theta) = \theta + \frac{\pi}{2},$$

$$y(\theta) = -1 \text{ (přímka } y = -1)$$

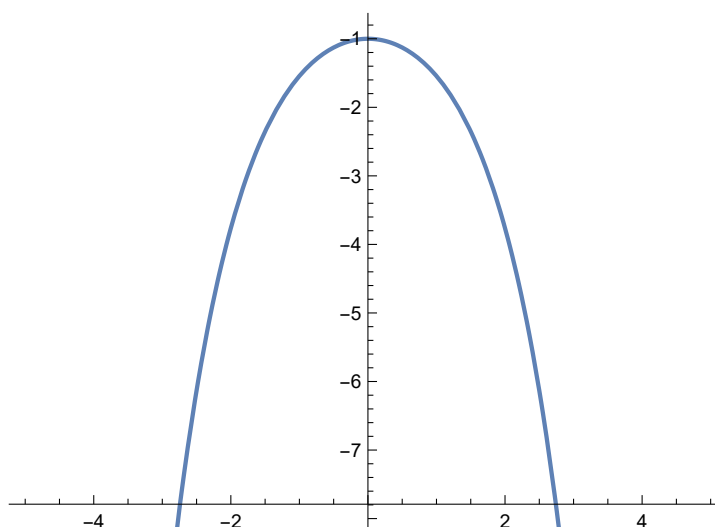
- Kolo ve tvaru přímky $y = -1$: $r(\theta) = -\frac{1}{\sin \theta}$, $\theta \in (-\pi, 0)$



Assuming $\left\{ -\pi < \theta < 0 \right\}$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} -\frac{1}{\sin[t]} dt$

$$-\text{Log}\left[-\text{Tan}\left[\frac{\theta}{2}\right]\right]$$

ParametricPlot $\left[\left\{-\text{Log}\left[-\text{Tan}\left[\frac{\theta}{2}\right]\right], \frac{1}{\text{Sin}[\theta]}\right\}, \{\theta, -\pi, 0\}\right]$



Jde o obrácenou řetězovku $y = -\cosh x$.

Důkaz. Označíme-li $x = -\log(-\text{tg}(\theta/2))$, $y = \frac{1}{\sin \theta}$, pak

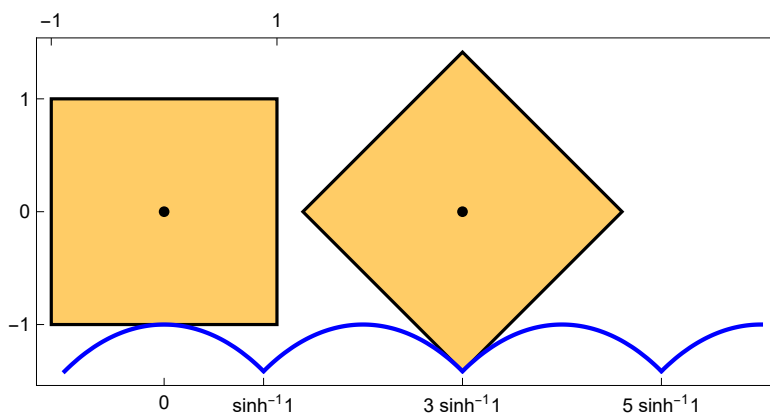
$$-\cosh x = -\frac{e^{-x} + e^x}{2} = -\frac{-\text{tg}(\theta/2) - \text{cotg}(\theta/2)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right) = \frac{1}{\sin \theta} = y.$$

Tento výsledek objevil James Clerk Maxwell ve věku 18 let.

J. C. Maxwell, *On the theory of rolling curves*, Trans. Royal Soc. Edinb. 16 (1849), 519–540.

Ve kterých bodech má přímka směrnici ± 1 ?

Derivace cosh je sinh, jde tedy o body $x = \text{arcsinh}(\pm 1)$. Pokud v těchto bodech napojíme další posunuté oblouky řetězovek, dostaneme vozovku pro čtvercové kolo.



Toto pozorování učinil Gerson B. Robison.

G. B. Robison, *Rockers and rollers*, Math. Mag. 33 (1960), 139–144.

Model na Macalester College (Stan Wagon):

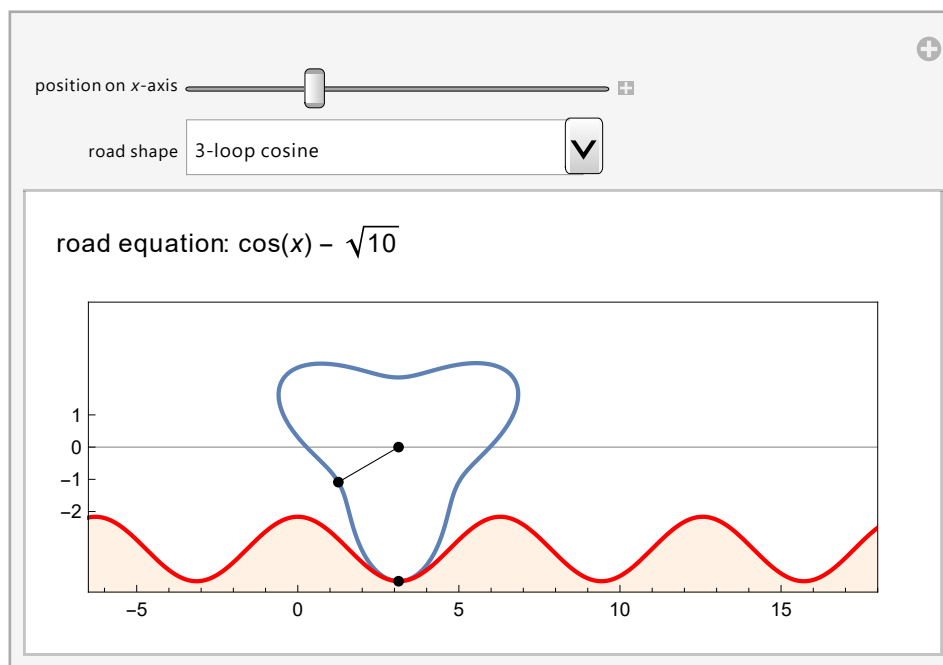


Viz též <https://www.wolframcloud.com/obj/41f348ef-52f8-4e81-9a26-a25ea21115fc>.

Kruhová verze v National Museum of Mathematics (New York City,
<http://momath.org>)



Další příklady kol a vozovek (L. Hall, S. Wagon, *Roads and wheels*, Math. Mag. 65 (1992), 283–301):

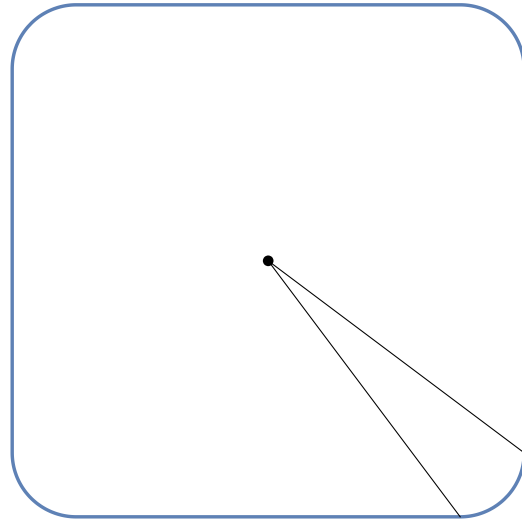
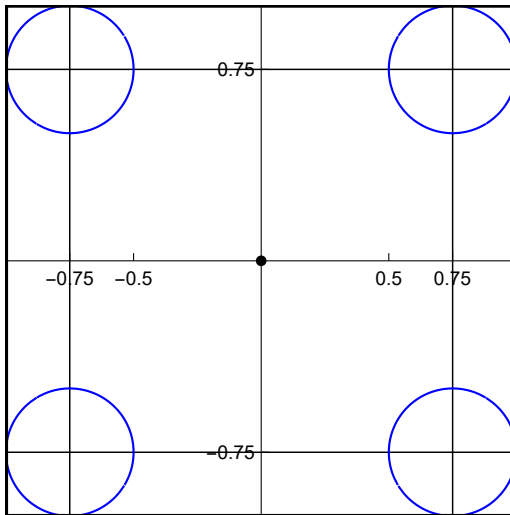


Problém s trojúhelníkovým kolem: kolize s vozovkou!

Čtverec se zaoblenými rohy

Jak vypadá vozovka pro čtverec se zaoblenými rohy?

Uvažujme čtverec o straně délky 2 jednotky se středem v počátku. Zaoblené rohy jsou části kružnic o poloměru b (v případě mostu $b = 0,25$). Označíme $\bar{b} = 1 - b$.



Část vozovky, které se kolo dotýká svou rovnou částí, je opět řetězovka $y = -\cosh x$.

Ve 4. kvadrantu jde o část, která odpovídá úhlům $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -B(b)]$, kde $B(b) = \operatorname{arccotg} \bar{b}$. Tato část má délku $\bar{b}$ a končí v bodě, jehož x -ová souřadnice je $\operatorname{arcsinh} \bar{b}$.

Jaký tvar vozovky odpovídá zaoblené části? Zaoblený roh ve 4. kvadrantu odpovídá úhlům $\theta \in [-B(b), B(b) - \frac{\pi}{2}]$ a v polárních souřadnicích má rovnici

$$r(\theta) = \sqrt{2} \bar{b} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sqrt{b^2 - 2\bar{b}^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)^2}.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \operatorname{arcsinh} \bar{b} + \int_{-B(b)}^{\theta} r(\rho) d\rho \\ &= \operatorname{arcsinh} \bar{b} + \int_{-B(b)}^{\theta} \left(\sqrt{2} \bar{b} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \rho\right) + \sqrt{b^2 - 2\bar{b}^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \rho\right)^2} \right) d\rho \\ &= \operatorname{arcsinh} \bar{b} + \int_{-B(b)}^{\theta} \left(\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} + \rho\right) + b \sqrt{1 - \beta^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \rho\right)^2} \right) d\rho, \end{aligned}$$

kde $\alpha = \sqrt{2} \bar{b}$, $\beta = \sqrt{2} \bar{b}/b$.

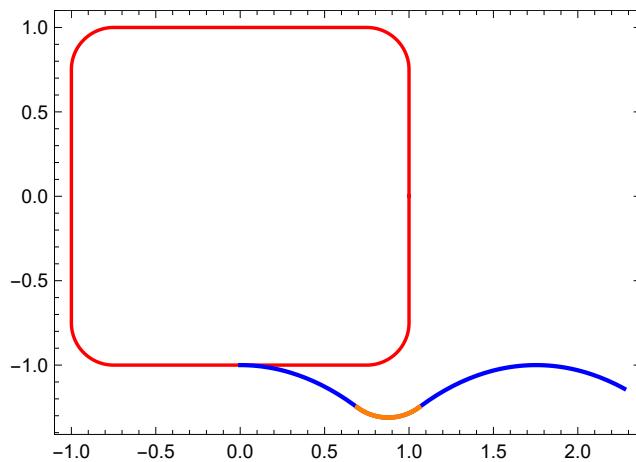
K dalšímu výpočtu potřebujeme eliptický integrál 2. druhu:

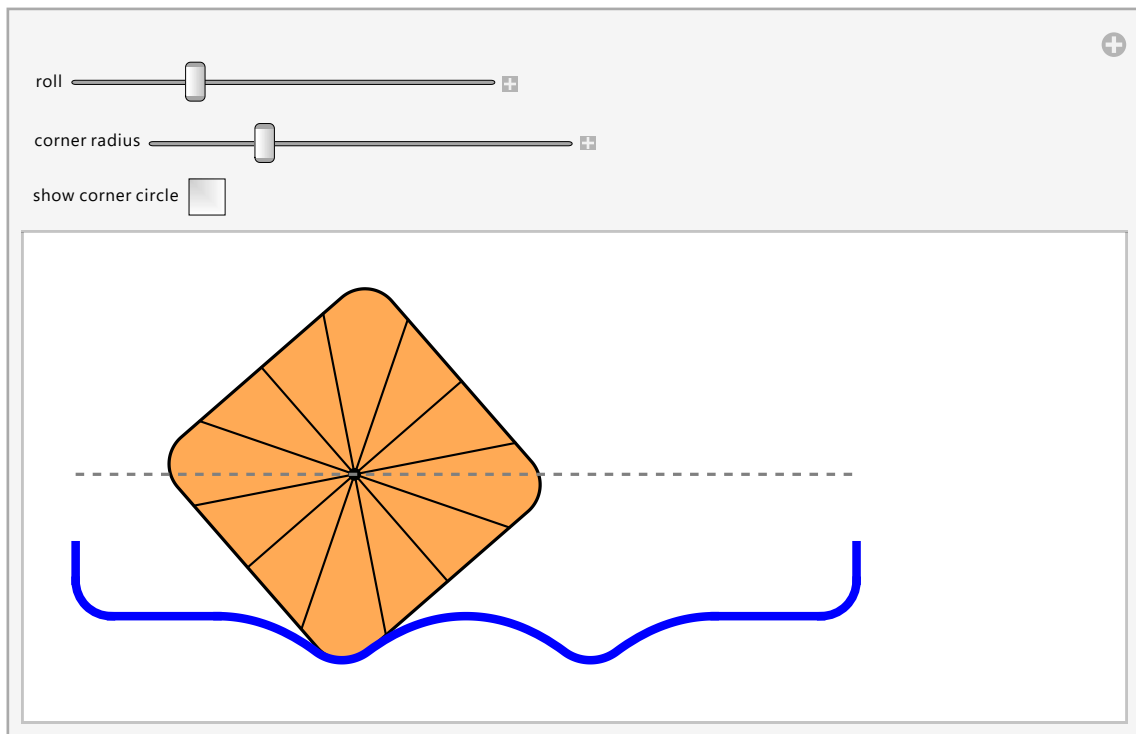
$$E(\phi | m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 t} \, dt.$$

Protože $\cos(\frac{\pi}{4} + \rho) = \frac{\cos \rho - \sin \rho}{\sqrt{2}}$ má primitivní funkci $\frac{\sin \rho + \cos \rho}{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{1 - \beta^2 \sin(\frac{\pi}{4} + \rho)^2}$ má primitivní funkci $E(\frac{\pi}{4} + \rho | \beta^2)$, dostáváme

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \operatorname{arcsinh} \bar{b} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (\sin \theta + \cos \theta - \sin(-B(b)) - \cos(-B(b))) + \\ &\quad b(E(\frac{\pi}{4} + \theta | \beta^2) - E(\frac{\pi}{4} - B(b) | \beta^2)) = \\ &= \operatorname{arcsinh} \bar{b} + \bar{b}(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{b\bar{b}}{\sqrt{1+\bar{b}^2}} + b \left(E\left(\theta + \frac{\pi}{4} \mid \frac{2\bar{b}^2}{b^2}\right) + E\left(\frac{\pi}{4} - B(b) \mid \frac{2\bar{b}^2}{b^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Máme část vozovky s parametrizací $\theta \mapsto (x(\theta), -r(\theta))$. Zbývající část získáme využitím symetrie:

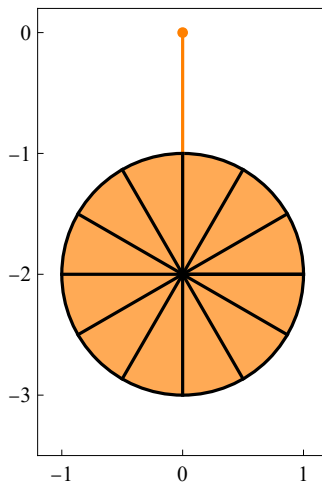




Související úloha

Jak vypadá vozovka pro kolo ve tvaru kruhu, pokud jeho těžiště není uprostřed, ale vně kruhu?

Uvažujme kruh o poloměru 1 se středem v bodě $(0, y_0)$, kde $y_0 \leq -1$.



Rovnice kola v polárních souřadnicích je komplikovaná, použijeme parametrické vyjádření $g(t) = (\sin t, y_0 - \cos t)$.

Je známo: Pro kolo s parametrizací $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$, $t \geq 0$, má příslušná vozovka parametrizaci

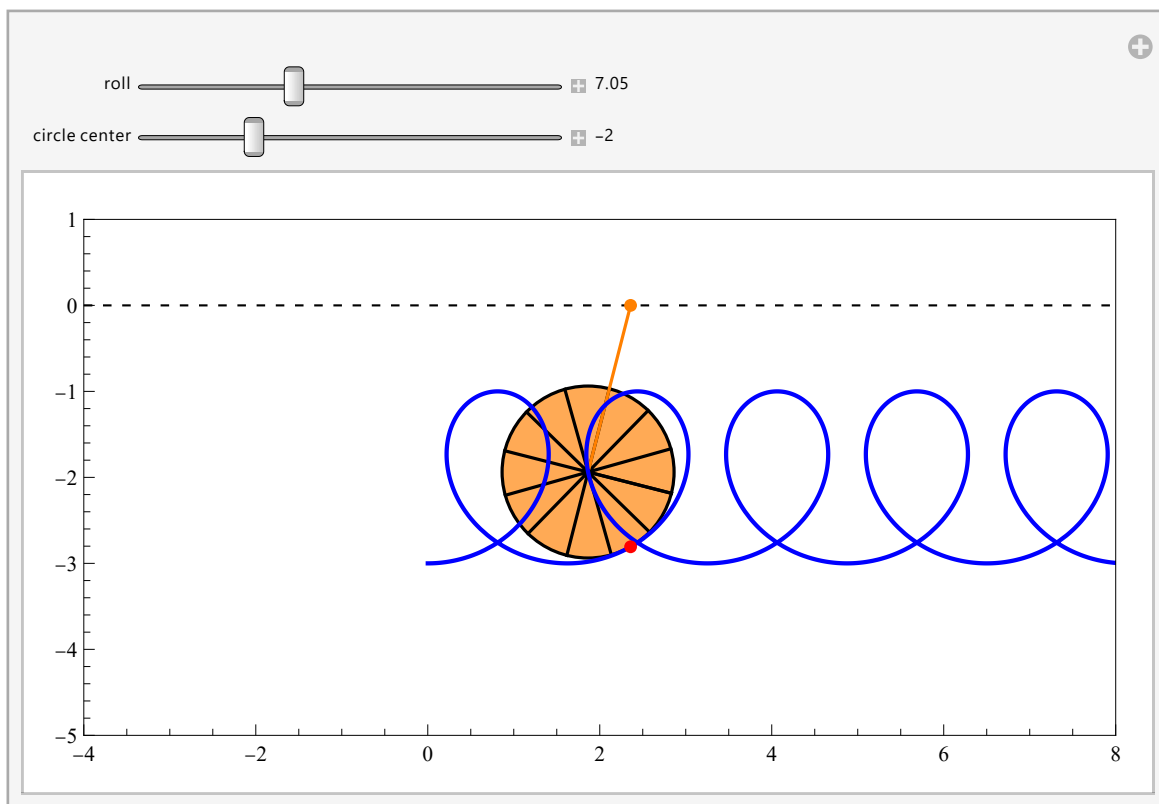
$$x(t) = \int_0^t \frac{g_1(s)g_2'(s) - g_1'(s)g_2(s)}{\sqrt{g_1(s)^2 + g_2(s)^2}} ds, \quad y(t) = -\sqrt{g_1(t)^2 + g_2(t)^2}.$$

Tedy v našem případě

$$x(t) = \int_0^t \frac{1 - y_0 \cos s}{\sqrt{1 + y_0^2 - 2y_0 \cos s}} ds, \quad y(t) = -\sqrt{1 + y_0^2 - 2y_0 \cos t}.$$

$$\text{FullSimplify}\left[\int \frac{1 - y_0 \cos[s]}{\sqrt{1 + y_0^2 - 2y_0 \cos[s]}} ds, y_0 < -1\right]$$

$$-\left((-1 + y_0) \text{EllipticE}\left[\frac{s}{2}, -\frac{4y_0}{(-1 + y_0)^2}\right]\right) + (1 + y_0) \text{EllipticF}\left[\frac{s}{2}, -\frac{4y_0}{(-1 + y_0)^2}\right]$$



Ruční výpočet integrálu:

Najdeme primitivní funkci. Substituce $s = \frac{\pi}{2} - u$:

$$\int \frac{1-y_0 \cos s}{\sqrt{1+y_0^2-2y_0 \cos s}} ds = - \int \frac{1-y_0 \sin u}{\sqrt{1+y_0^2-2y_0 \sin u}} du.$$

V čitateli i ve jmenovateli vytkneme koeficient u funkce sinus. Dostaneme

$$\delta \int \frac{\beta + \sin u}{\sqrt{\gamma + \sin u}} du, \text{ kde } \beta = -\frac{1}{y_0}, \gamma = \frac{1+y_0^2}{-2y_0}, \delta = \sqrt{-\frac{y_0}{2}}.$$

$\frac{\beta + \sin u}{\sqrt{\gamma + \sin u}}$ rozložíme na $\frac{\gamma + \sin u}{\sqrt{\gamma + \sin u}} = \sqrt{\gamma + \sin u}$ a $\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma + \sin u}}$, kde $\alpha = \beta - \gamma$.

Pozorování:

$$\sqrt{\gamma + \sin u} = \sqrt{1 + \gamma - \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{1 + \gamma} \sqrt{1 - \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)^2}{1 + \gamma}}.$$

Potřebujeme tedy vypočítat

$$\sqrt{1 + \gamma} \int \sqrt{1 - \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)^2}{1 + \gamma}} du + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \gamma}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)^2}{1 + \gamma}}} du.$$

Primitivní funkce lze vyjádřit pomocí eliptického integrálu 2. druhu

$$E(\phi | m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 t} \, dt \text{ a eliptického integrálu 1. druhu}$$

$$F(\phi | m) = \int_0^\phi (1 - m \sin^2 t)^{-1/2} \, dt.$$

Dostaneme

$$-2 \sqrt{1 + \gamma} E\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \mid \frac{2}{1+\gamma}\right) + \frac{-2\alpha}{\sqrt{1+\gamma}} F\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \mid \frac{2}{1+\gamma}\right).$$

Vzpomeneme si, že primitivní funkci je potřeba vynásobit δ , a že $u = \frac{\pi}{2} - s$:

$$\int \frac{1 - y_0 \cos s}{\sqrt{1 + y_0^2 - 2 y_0 \cos s}} \, ds = 2 \delta \left(\sqrt{1 + \gamma} E\left(\frac{s}{2} \mid \frac{2}{1+\gamma}\right) + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\gamma}} F\left(\frac{s}{2} \mid \frac{2}{1+\gamma}\right) \right) =$$

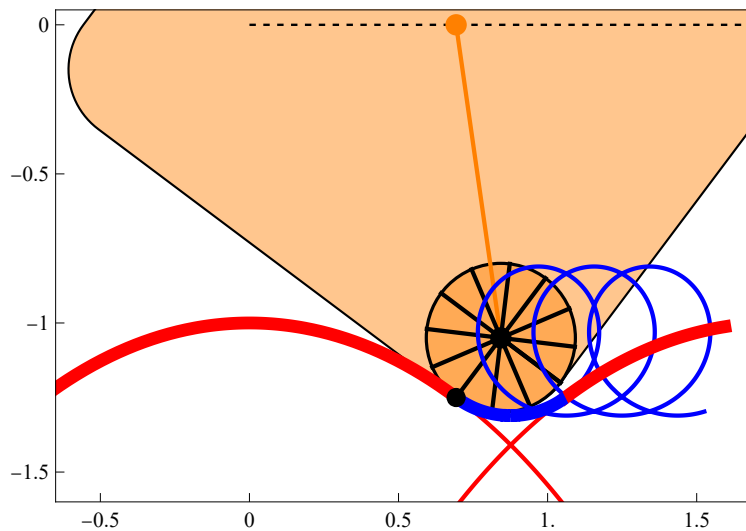
$$(1 - y_0) E\left(\frac{s}{2} \mid -\frac{4 y_0}{(1 - y_0)^2}\right) + (1 + y_0) F\left(\frac{s}{2} \mid -\frac{4 y_0}{(1 - y_0)^2}\right)$$

Tato primitivní funkce nabývá hodnoty 0 pro $s = 0$. Tedy parametrizace křivky je

$$x(t) = (1 - y_0) E\left(\frac{t}{2} \mid -\frac{4 y_0}{(1 - y_0)^2}\right) + (1 + y_0) F\left(\frac{t}{2} \mid -\frac{4 y_0}{(1 - y_0)^2}\right), \quad y(t) = -\sqrt{1 + y_0^2 - 2 y_0 \cos t}.$$

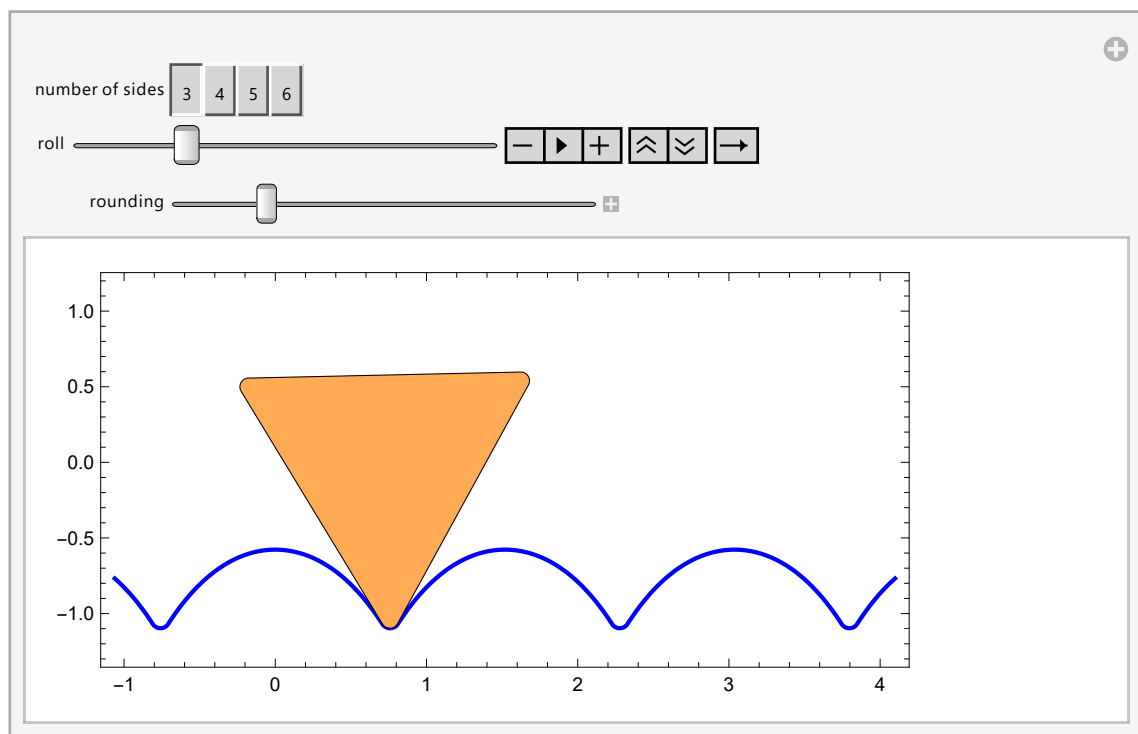
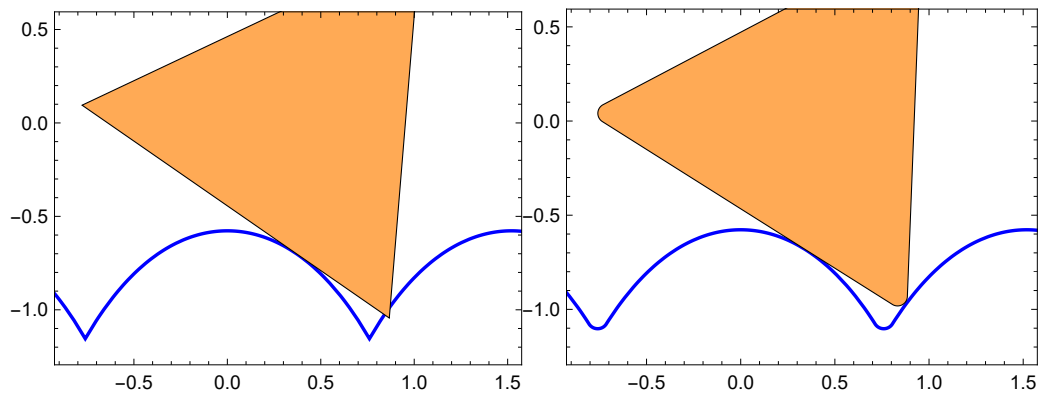
Souvislost s Cody Dock Bridge:

Části vozovky, kterých se dotýkají zaoblené rohy, jsou části právě nalezené křivky.



Potíže s trojúhelníkem

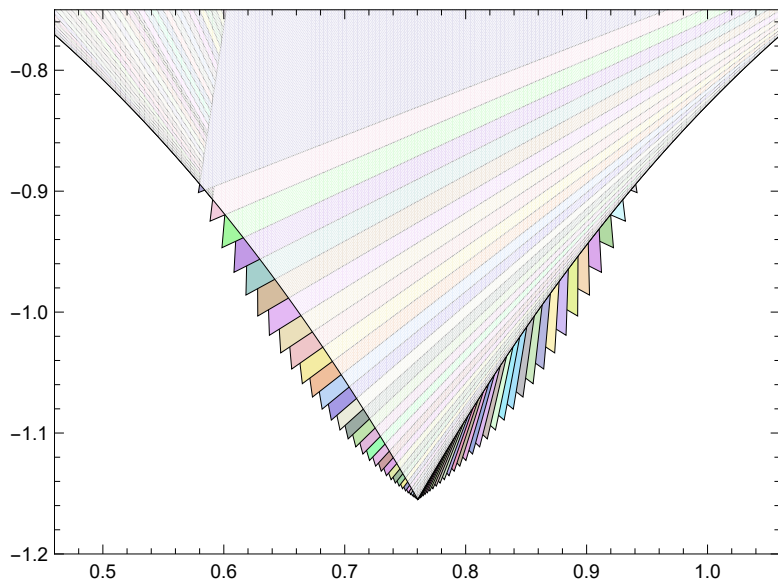
Hall a Wagon zjistili, že trojúhelníkové kolo se ve skutečnosti nemůže pohybovat po vozovce složené z řetězovek, protože vrchol narazí do vozovky. Tento problém se dá vyřešit zaoblením rohů.



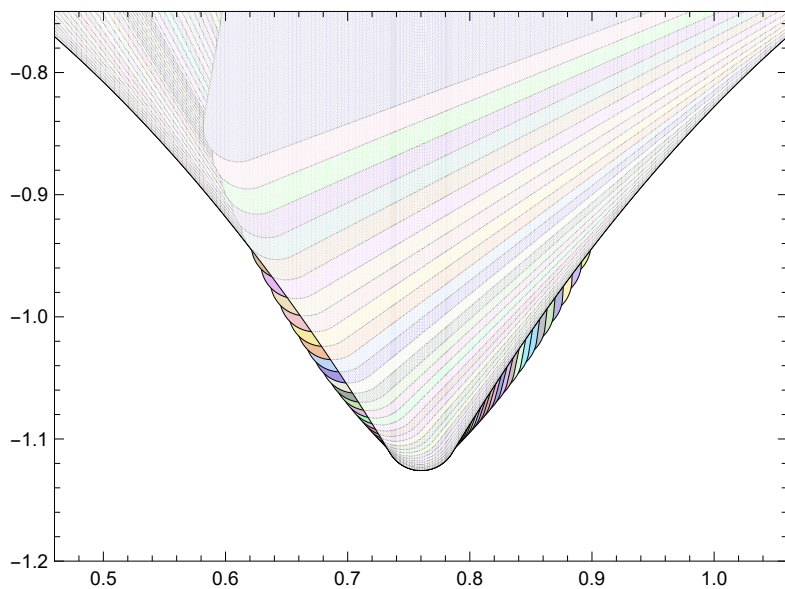
Pro trojúhelník, jehož strana má délku 2 jednotky, je potřeba vzít zaoblené rohy o poloměru minimálně 0.0831. Nalezení této hodnoty představuje zajímavý optimalizační problém:

- Pro libovolný poloměr zaoblení zkontrolujeme všechny polohy kola na vozovce, abychom zjistili, zda dojde ke kolizi.
- Najdeme minimální poloměr, pro který nedochází ke kolizi.

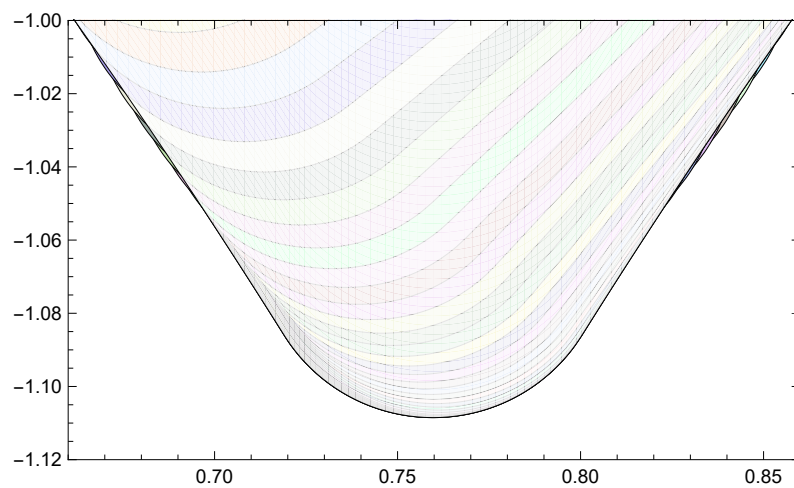
Poloměr zaoblení 0:



Poloměr zaoblení 0.05:



Poloměr zaoblení 0.08:



Závěr

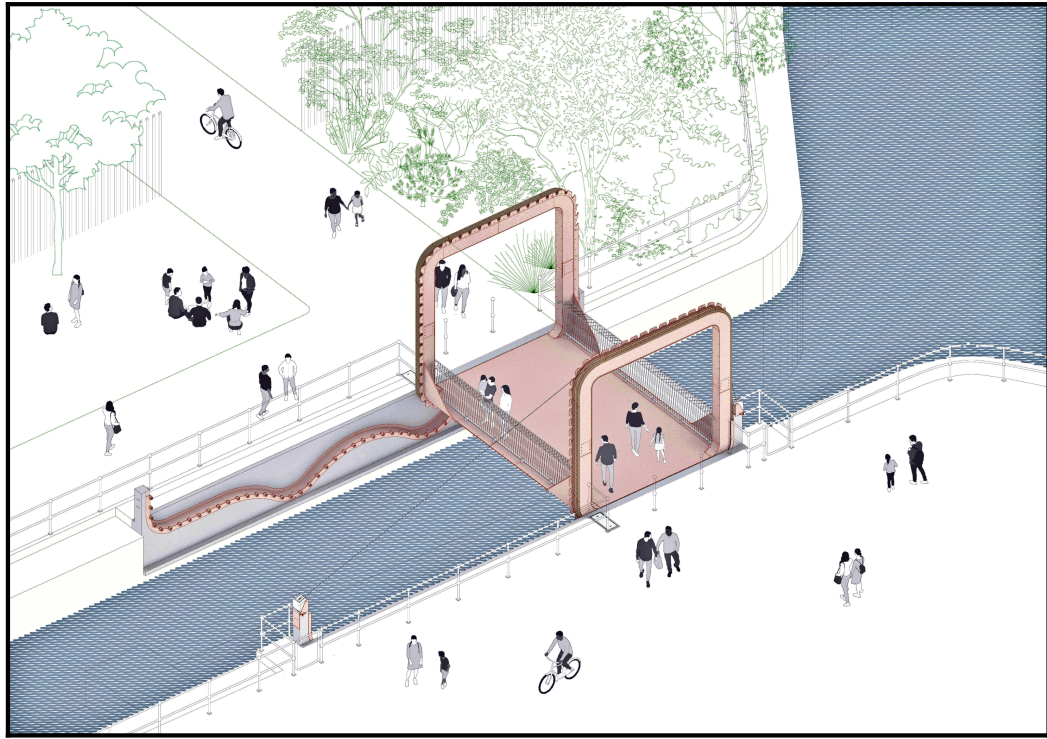
Řetězovka popisuje tvar zavěšeného řetězu/vlákná.



Lana u visutých mostů nemají tvar řetězovky, ale paraboly (hmotnost mostovky není zanedbatelná).



Cody Dock Bridge je pravděpodobně první most na světě, při jehož konstrukci se uplatnila řetězovka a eliptické integrály.



Literatura

- J. C. Maxwell, *On the theory of rolling curves*, Trans. Royal Soc. Edinb. 16 (1849), 519–540.
- G. B. Robison, *Rockers and rollers*, Math. Mag. 33 (1960), 139–144.
- L. Hall, S. Wagon, *Roads and wheels*, Math. Mag. 65 (1992), 283–301
- S. Wagon, A. Slavík: *A Rolling Square Bridge: Reimagining the Wheel*, <https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/2917199>, 2023.
- A. Jacquemot, T. Randall-Page, A. Slavík, S. Wagon: *A Rolling Square Bridge: Reimagining the Wheel*, v recenzním řízení.