

# Kouzla a úskalí fázových portrétů

Jiří Šremr

OSMA, 12. října 2023

- ukážeme možnost konstrukce globálních fázových portrétů a výhody/nevýhody jejich využití na jedné konkrétní jednoduché diferenciální rovnici 2. řádu, tzv. Duffingově rovnici
- Duffingovy diferenciální rovnice jsou charakteristické polynomiálními nelinearitami a objevují se často po aproximaci nelinearit Taylorovými polynomy různých stupňů
- typickým příkladem je rovnice matematického kyvadla

$$\varphi'' + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0,$$

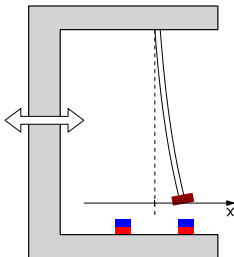
kde po aproximaci sinu pomocí Taylorova polynomu 3. stupně se středem v 0 dostáváme jednu z Duffingových rovnic

$$\varphi'' + \frac{g}{\ell} \varphi - \frac{g}{6\ell} \varphi^3 = 0$$

- my se budeme věnovat Duffingově rovnici

$$x'' - x + x^3 = 0,$$

která se objeví při modelování pohybu následující mechanické soustavy



$$m\ddot{x} + g(x) = F(t)$$

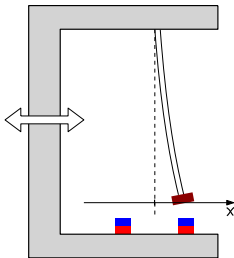
... pohybová rovnice

- $F$  reprezentuje vnější síly, tj. buzení soustavy
- $g$  reprezentuje „vnitřní“ síly – sílu způsobenou tuhostí ohýbaného pásku a síly magnetického pole – závisí na poloze tělesa, tj. souřadnici  $x$
- analytický vztah pro sílu působící na těleso v konkrétním místě v magnetickém poli permanentních magnetů nelze najít – pokud vím :-)
- používají se např. numerické simulace ve vhodných softwarech k určení průběhu funkce  $g$

–  $g(x)$  ... restoring force

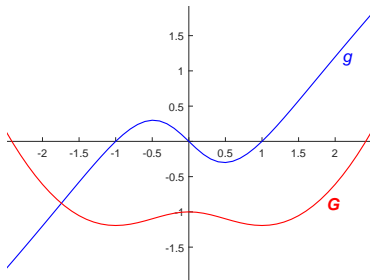
$$G(x) = \int_{x_0}^x g(s) ds$$

potenciální energie



$$m\ddot{x} + g(x) = F(t)$$

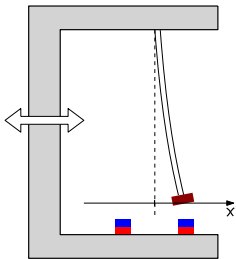
... pohybová rovnice



–  $g(x)$  ... restoring force

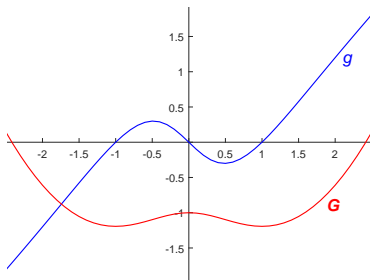
$$G(x) = \int_{x_0}^x g(s) ds$$

potenciální energie



$$m\ddot{x} - ax + bx^3 = F(t)$$

... pohybová rovnice



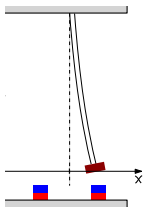
$$g(x) \approx -ax + bx^3$$

Duffingova rovnice

$$G(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 + c$$

“double-well” nebo “bistable” potential

- soustředíme se dále na nebuzenou soustavu  $\implies F(t) \equiv 0$



$$x'' = x - x^3$$

(DR)

- řešení rovnice (DR) lze popsat pomocí Jacobiho eliptických funkcí – těžko se s nimi pracuje
- použijeme jiný způsob ke zjištění, jak se soustava pohybuje při daných počátečních podmínkách – místo o řešení rovnice (DR) se budeme zajímat o jejich fázové trajektorie
- rovnovážné stavy?
  - selský rozum: právě 3 rovnovážné stavy

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* > 0, \quad x_3^* < 0$$

- matematika: rovnovážný stav = „nic se nehýbe“ – odpovídá konstantnímu řešení rovnice (DR)  
 $x(t) := x^* \in \mathbb{R}$  je řešení rovnice (DR)  $\iff 0 = x''(t) = x^* - (x^*)^3$ , a proto

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = -1$$

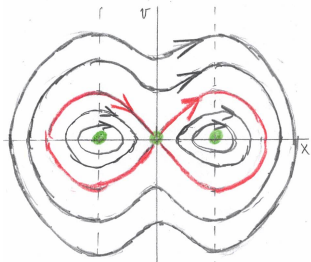
$$x'' = x - x^3$$

(DR)

- víme, že rovnovážné stavy (ekvilibria) jsou  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 1$ ,  $x_3^* = -1$
- pro představu, jak se soustava pohybuje při různých počátečních polohách  $x_0$  a různých počátečních rychlostech  $v_0$  použijeme numerické simulace
- pro různá  $x_0$ ,  $v_0$  numericky řešíme počáteční úlohy

$$x'' = x - x^3; \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v(0) = v_0$$

a ve fázové  $xv$ -rovině vykresluje body  $(x(t), v(t))$  v jednotlivých časech  $t$  – dostaneme křivky, kterým se říká fázové trajektorie odpovídajících řešení rovnice (DR)



- šipky znázorňují, jak se body  $(x(t), v(t))$  pohybují po křivkách se zvyšujícím se časem  $t$
- červené trajektorie se nazývají homoklinické trajektorie ... směřují do a vycházejí ze stejného ekvilibria pro  $t \rightarrow +\infty$  a  $t \rightarrow -\infty$
- červená trajektorie je tzv. separatrix – odděluje ve fázové rovině oblasti v nich se trajektorie chovají různě
- definují se různé typy ekvilibríí ... záleží na chování trajektorií v jejich okolí
- ekvilibrum  $x_1^* = 0$  je typu **sedlo**
- ekvilibria  $x_{2,3}^* = \pm 1$  jsou typu **střed**

**Je to správně? Můžeme „nějak dokázat“ alespoň něco z toho, co jsme zjistili pomocí numerických simulací?**

$$x'' = x - x^3$$

(DR)

- řešení rovnice (DR) na intervalu  $I$  ... skalární funkce  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$
- $x^* \in \mathbb{R}$  je ekvilíbrium  $\iff x(t) := x^*$  je řešení rovnice (DR)  $\iff x^* - (x^*)^3 = 0$

$$x' = v$$

$$v' = x - x^3$$

(DS)

- řešení soustavy (DS) na intervalu  $I$  ... dvojice funkcí  $(x, v)$ , kde  $x, v: I \rightarrow \mathbb{R}$
- $x^* \in \mathbb{R}$  je ekvilíbrium rovnice (DR)  $\iff x(t) := x^*, v(t) := 0$  je řešení soustavy (DS)

$$y_1' = f_1(y_1, y_2)$$

$$y_2' = f_2(y_1, y_2)$$

(S)

- řešení soustavy (S) na intervalu  $I$  ... dvojice funkcí  $(y_1, y_2)$ , kde  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$
- $y_1(t) := y_1^*, y_2(t) := y_2^*$  je řešení soustavy (S)  $\iff y_1^*, y_2^* \in \mathbb{R}$  splňují

$$f_1(y_1^*, y_2^*) = 0, \quad f_2(y_1^*, y_2^*) = 0 \quad (1)$$

**Definice.** Bod  $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$  se nazývá ekvilíbrium (stacionární bod, bod rovnováhy) soustavy (S), jestliže platí (1).



$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (S)$$

**Definice.** Bod  $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$  se nazývá ekvilibrum (stacionární bod, bod rovnováhy) soustavy (S), jestliže platí  $f_1(y_1^*, y_2^*) = 0$  a  $f_2(y_1^*, y_2^*) = 0$ .

**Důsledek 1.** Necht'  $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , bod  $Y^* \in \mathbb{R}^2$  je ekvilibrum soustavy (S) a necht'

$$J(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

Potom platí:

- (1) Má-li matice  $J(Y^*)$  reálná vlastní čísla  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , pak je ekvilibrum  $Y^*$  soustavy (S) typu **sedlo**.
- (2) Jestliže  $Y^* = (y_1^*, 0)$ , matice  $J(Y^*)$  má vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \pm i\mu$  ( $\mu > 0$ ) a platí

$$f_1(y_1, -y_2) = -f_1(y_1, y_2), \quad f_2(y_1, -y_2) = f_2(y_1, y_2) \quad \text{for } y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

pak je ekvilibrum  $Y^*$  soustavy (S) typu **střed**.

$$x'' = x - x^3$$

(DR)

- ekvilibria jsou  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 1$ ,  $x_3^* = -1$

$$x' = v$$

$$v' = x - x^3$$

(DS)

$$y_1' = f_1(y_1, y_2)$$

$$y_2' = f_2(y_1, y_2)$$

(S)

- (DS) je speciální případ (S), kde  $f_1(y_1, y_2) = y_2$ ,  $f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_1^3$
- Jacobiho matice

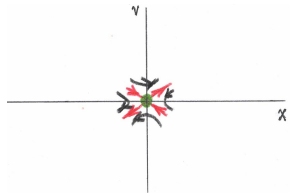
$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3y_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1^* = 0$  je ekvilibrium rovnice (DR)

$Y_1^* = (x_1^*, 0) = (0, 0)$  je ekvilibrium soustavy (DS)

$J(Y_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  má vlastní čísla  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$

Důsledek 1  $\implies Y_1^*$  je sedlo  $\implies \underline{x_1^*}$  je sedlo



$$x'' = x - x^3$$

(DR)

- ekvilibria jsou  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 1$ ,  $x_3^* = -1$

$$x' = v$$

$$v' = x - x^3$$

(DS)

$$y_1' = f_1(y_1, y_2)$$

$$y_2' = f_2(y_1, y_2)$$

(S)

- (DS) je speciální případ (S), kde  $f_1(y_1, y_2) = y_2$ ,  $f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_1^3$
- Jacobiho matice

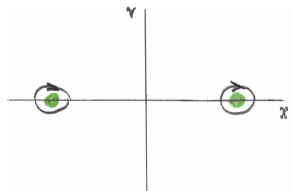
$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3y_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_{2,3}^* = 0$  jsou ekvilibria rovnice (DR)

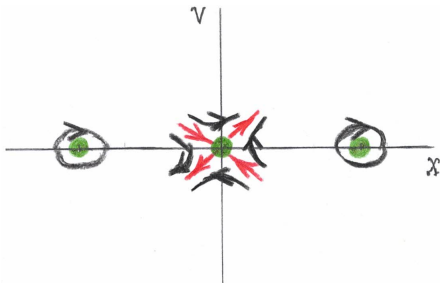
$Y_{2,3}^* = (x_{2,3}^*, 0) = (\pm 1, 0)$  jsou ekvilibria soustavy (DS)

$J(Y_{2,3}^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  má vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$

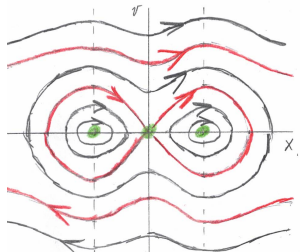
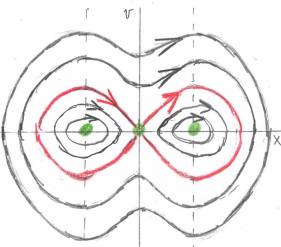
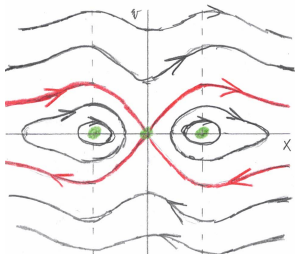
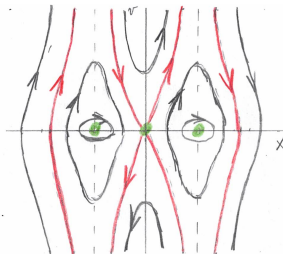
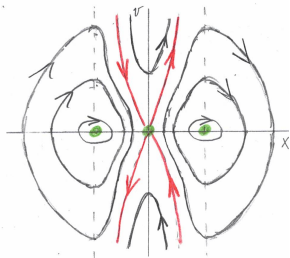
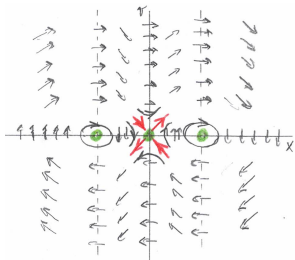
Důsledek 1  $\implies Y_{2,3}^*$  jsou středy  $\implies \underline{x_{2,3}^*}$  jsou středy



- máme „dokázáno“



- náš „předpokládaný“ fázový portrét vytvořený na základě numerických simulací máme lokálně správný
- otázkou nyní je: Jak to propojit? Jak se chovají trajektorie „daleko“ od ekvilibríí?
- existuje spousta možností ... například



$$x'' = x - x^3$$

(DR)

Jak zjistit, která možnost je správná? Existuje několik postupů, zejména:

(A) Rovnice (DR) popisuje konzervativní systém, a proto

- odpovídající soustava je

$$x' = v$$

$$v' = x - x^3$$

- fázové trajektorie jsou „částmi“ integrálních křivek diferenciální rovnice 1.řádu

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x - x^3}{v},$$

keré je možné díky konzervativnosti systému jednoduše analyticky popsat ... jsou dány implicitně rovnicí

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 = konst.$$

- jinými slovy, celková energie soustavy je podél řešení rovnice (DR) konstantní

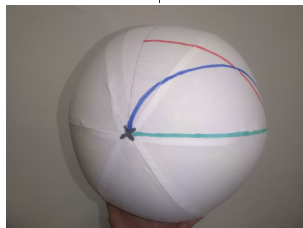
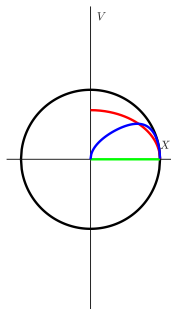
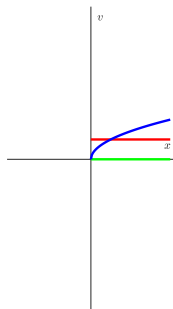
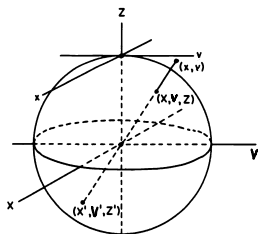
(B) Sestrojit globální fázový portrét

- použijeme projekci na tzv. Poincarého sféru

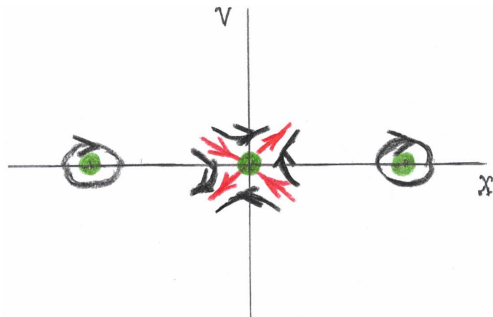
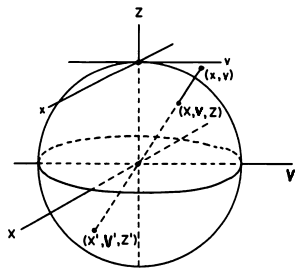
**Ukážeme, jak je možné sestrojit globální fázový portrét rovnice (DR)**

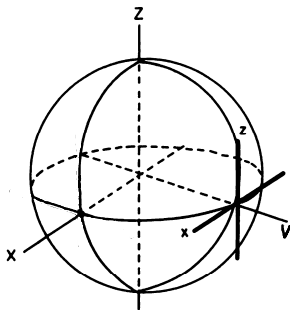


Jak se zobrazí polopřímky  $v = 0$ ,  $v = 1$ , a parabola  $v = \sqrt{x}$ ?







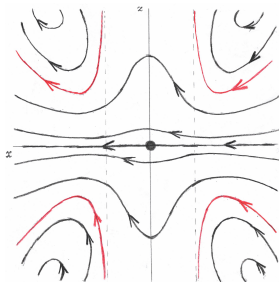


- vyšetříme chování trajektorií v  $xv$ -rovině, které jsou „daleko“ ve směru osy  $v$
- zobrazíme vektorové pole ze sféry na  $xz$ -rovinu „přilepenou“ ke sféře v bodě  $(0, 1, 0)$
- z transformačních vztahů dostaneme soustavu

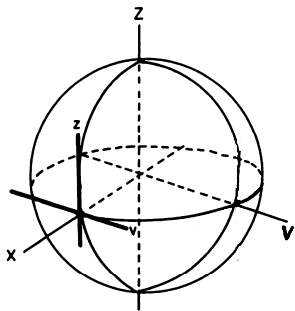
$$x' = x^4 - z^2 - x^2 z^2$$

$$z' = x^3 z - xy^3$$

- vyšetříme chování trajektorií této soustavy alespoň lokálně, v okolí bodu  $(0, 0)$
- pro tuto soustavu lze všechny trajektorie analyticky popsat



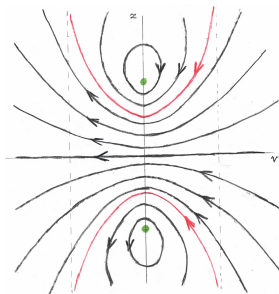
- získané trajektorie zobrazíme zpět na sféru



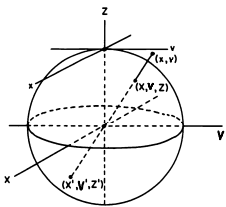
- vyšetříme chování trajektorií v  $xv$ -rovině, které jsou „daleko“ ve směru osy  $z$
- zobrazíme vektorové pole ze sféry na  $zv$ -rovinu „přilepenou“ ke sféře v bodě  $(1, 0, 0)$
- z transformačních vztahů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} v' &= -v^2 z^2 + z^2 - 1 \\ z' &= -vz^3 \end{aligned}$$

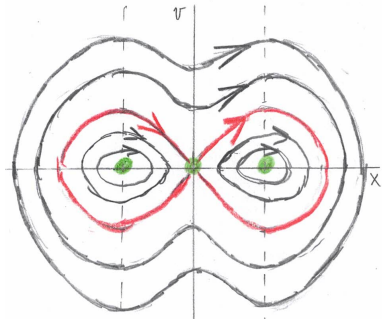
- vyšetříme chování trajektorií této soustavy alespoň lokálně, v okolí bodu  $(0, 0)$
- pro tuto soustavu lze všechny trajektorie analyticky popsat

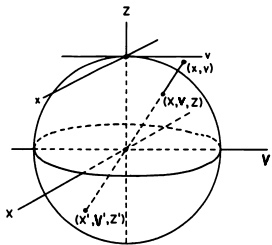


- získané trajektorie zobrazíme zpět na sféru



Fázový portrét rovnice  $x'' = x - x^3$





Globální fázový portrét rovnice  $x'' = x - x^3$

