Kdyby papež uměl dělit

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA VŠB-TUO, 2.11. 2023

Krátký výlet do historie

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský
- hinduistický

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský
- hinduistický
- etiopský

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský
- hinduistický
- etiopský
- íránský

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský
- hinduistický
- etiopský
- íránský
- koptský

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský
- hinduistický
- etiopský
- íránský
- koptský
- ...

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský
- hinduistický
- etiopský
- íránský
- koptský
- ...

Jsou umělým lidským výtvorem, jako například jazyk?

Krátký výlet do historie

Současné kalendáře:

- hebrejský
- muslimský
- čínský
- hinduistický
- etiopský
- íránský
- koptský
- ...

Jsou umělým lidským výtvorem, jako například jazyk?

Všechny jsou založeny na periodickém pohybu Slunce a Měsíce.

Vyjádříme to v číslech

Vyjádříme to v číslech

- Jeden solární rok má 365.24219878 dnů.

Vyjádříme to v číslech

- Jeden solární rok má 365.24219878 dnů.
- Jeden lunární měsíc má 29.530589 dnů.

Vyjádříme to v číslech

- Jeden solární rok má 365.24219878 dnů.
- Jeden lunární měsíc má 29.530589 dnů.
- Vzájemný poměr udává 12.368267 lunací ročně.

Vyjádříme to v číslech

- Jeden solární rok má 365.24219878 dnů.
- Jeden lunární měsíc má 29.530589 dnů.
- Vzájemný poměr udává 12.368267 lunací ročně.

Tedy:

Vyjádříme to v číslech

- Jeden solární rok má 365.24219878 dnů.
- Jeden lunární měsíc má 29.530589 dnů.
- Vzájemný poměr udává 12.368267 lunací ročně.

Tedy:

- lunární měsíc má mezi 29 a 30 dny,
- proběhne přibližně 12 lunací za rok.

Nejstarší kalendář

Nejstarší kalendář

Babylónský kalendář:

Nejstarší kalendář

Babylónský kalendář:

- lunární

Nejstarší kalendář

Babylónský kalendář:

- lunární
- 12 měsíců

Nejstarší kalendář

Babylónský kalendář:

- lunární
- 12 měsíců
- střídavě po 29 a 30 dnech

Nejstarší kalendář

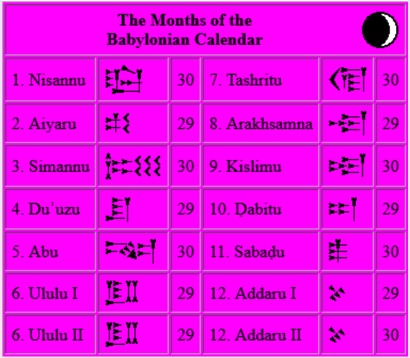
Babylónský kalendář:

- lunární
- 12 měsíců
- střídavě po 29 a 30 dnech
- 354 dnů v roce

Babylónský kalendář

The Months of the Babylonian Calendar					
1. Nisannu		30	7. Tashritu		30
2. Aiyaru		29	8. Arakhsamna		29
3. Simannu		30	9. Kislimu		30
4. Du'uzu		29	10. Ḍabitu		29
5. Abu		30	11. Sabaḍu		30
6. Ululu I		29	12. Addaru I		29
6. Ululu II		29	12. Addaru II		30

Babylónský kalendář



The Months of the Babylonian Calendar					
1. Nisannu		30	7. Tashritu		30
2. Aiyaru		29	8. Arakhsamna		29
3. Simannu		30	9. Kislimu		30
4. Du'uzu		29	10. Dabitu		29
5. Abu		30	11. Sabadu		30
6. Ululu I		29	12. Addaru I		29
6. Ululu II		29	12. Addaru II		30

12 (nebo 14) měsíců

Babylónský kalendář s korekcemi

Babylónský kalendář s korekcemi

		Uncorrected		Corrected	
AD/AN	**AD/AN**	**early:**	**late:**	**early:**	**late:**
1990/2737	2009/2756	01- 4/26	01- 4/27	01* 3/27	01* 3/28
1991/2738	2010/2757	02- 4/15	02- 4/16	02- 4/15	02- 4/16
1992/2739	2011/2758	03* 4/4	03* 4/5	03- 4/4	03- 4/5
1993/2740	2012/2759	04- 4/23	04- 4/24	04* 3/24	04* 3/25
1994/2741	2013/2760	05- 4/12	05- 4/13	05- 4/12	05- 4/13
1995/2742	2014/2761	06* 4/1	06* 4/2	06- 4/1	06- 4/2
1996/2743	2015/2762	07- 4/20	07- 4/21	07* 3/21	07* 3/22
1997/2744	2016/2763	08* 4/9	08* 4/10	08- 4/9	08- 4/10
1998/2745	2017/2764	09- 4/28>	09- 4/29>	09* 3/29	09* 3/30
1999/2746	2018/2765	10- 4/17	10- 4/18	10- 4/17>	10- 4/18>
2000/2747	2019/2766	11* 4/6	11* 4/7	11- 4/6	11- 4/7
2001/2748	2020/2767	12- 4/25	12- 4/26	12* 3/26	12* 3/27
2002/2749	2021/2768	13- 4/14	13- 4/15	13- 4/14	13- 4/15
2003/2750	2022/2769	14* 4/3	14* 4/4	14- 4/3	14- 4/4
2004/2751	**2023/2770**	15- 4/22	15- 4/23	15* 3/23	15* 3/24
2005/2752	2024/2771	16- 4/11	16- 4/12	16- 4/11	16- 4/12
2006/2753	2025/2772	17§ 3/31<	17§ 4/1<	17- 3/31	17- 4/1
2007/2754	2026/2773	18- 4/18	18- 4/19	18§ 3/20<	18§ 3/21<
2008/2755	2027/2774	19* 4/7	19* 4/8	19- 4/7	19- 4/8

Babylónský kalendář s korekcemi

		Uncorrected		Corrected	
AD/AN	AD/AN	early:	late:	early:	late:
1990/2737	2009/2756	01- 4/26	01- 4/27	01* 3/27	01* 3/28
1991/2738	2010/2757	02- 4/15	02- 4/16	02- 4/15	02- 4/16
1992/2739	2011/2758	03* 4/4	03* 4/5	03- 4/4	03- 4/5
1993/2740	2012/2759	04- 4/23	04- 4/24	04* 3/24	04* 3/25
1994/2741	2013/2760	05- 4/12	05- 4/13	05- 4/12	05- 4/13
1995/2742	2014/2761	06* 4/1	06* 4/2	06- 4/1	06- 4/2
1996/2743	2015/2762	07- 4/20	07- 4/21	07* 3/21	07* 3/22
1997/2744	2016/2763	08* 4/9	08* 4/10	08- 4/9	08- 4/10
1998/2745	2017/2764	09- 4/28>	09- 4/29>	09* 3/29	09* 3/30
1999/2746	2018/2765	10- 4/17	10- 4/18	10- 4/17>	10- 4/18>
2000/2747	2019/2766	11* 4/6	11* 4/7	11- 4/6	11- 4/7
2001/2748	2020/2767	12- 4/25	12- 4/26	12* 3/26	12* 3/27
2002/2749	2021/2768	13- 4/14	13- 4/15	13- 4/14	13- 4/15
2003/2750	2022/2769	14* 4/3	14* 4/4	14- 4/3	14- 4/4
2004/2751	**2023/2770**	15- 4/22	15- 4/23	15* 3/23	15* 3/24
2005/2752	2024/2771	16- 4/11	16- 4/12	16- 4/11	16- 4/12
2006/2753	2025/2772	17§ 3/31<	17§ 4/1<	17- 3/31	17- 4/1
2007/2754	2026/2773	18- 4/18	18- 4/19	18§ 3/20<	18§ 3/21<
2008/2755	2027/2774	19* 4/7	19* 4/8	19- 4/7	19- 4/8

19-letý cyklus (AN = anno Nabonassari, 1 AN = 747 BC)

Pokroky

Pokroky

V 5. století př.n.l. byl Babylónský kalendář nahrazen *egyptským*.

Pokroky

V 5. století př.n.l. byl Babylónský kalendář nahrazen *egyptským*.

Ten měl 12 měsíců po 30 dnech, tedy 360 dní ročně.

Pokroky

V 5. století př.n.l. byl Babylónský kalendář nahrazen *egyptským*.

Ten měl 12 měsíců po 30 dnech, tedy 360 dní ročně.

Brzy byly zpozorovány nesrovnalosti.

Pokroky

V 5. století př.n.l. byl Babylónský kalendář nahrazen *egyptským*.

Ten měl 12 měsícú po 30 dnech, tedy 360 dní ročně.

Brzy byly zpozorovány nesrovnalosti.

Řešení: *epagomeny* (5 dní přidaných na konec roku).

Egyptský kalendář

Egyptský kalendář

Měl 365 dnů a fungoval po více než 3000 let.

Egyptský kalendář

Měl 365 dnů a fungoval po více než 3000 let.

Dekret kanopský (Ptolemaios III., 238 př.n.l.): každý čtvrtý rok bude přidán ještě šestý den.

Egyptský kalendář

Měl 365 dnů a fungoval po více než 3000 let.

Dekret kanopský (Ptolemaios III., 238 př.n.l.): každý čtvrtý rok bude přidán ještě šestý den.

Tak vznikl *alexandrijský kalendář*.

Egyptský kalendář

Měl 365 dnů a fungoval po více než 3000 let.

Dekret kanopský (Ptolemaios III., 238 př.n.l.): každý čtvrtý rok bude přidán ještě šestý den.

Tak vznikl *alexandrijský kalendář*.

Dodnes jej používá etiopská a koptská církev.

Římský kalendář a juliánský kalendář

Římský kalendář a juliánský kalendář

Náš kalendář je přímým potomkem *římského* kalendáře.

Římský kalendář a juliánský kalendář

Náš kalendář je přímým potomkem *římského* kalendáře.

Ten měl až do roku 46 př.n.l. 365 dnů ročně.

Římský kalendář a juliánský kalendář

Náš kalendář je přímým potomkem *římského* kalendáře.

Ten měl až do roku 46 př.n.l. 365 dnů ročně.

Během egyptského tažení se Julius Caesar dozvěděl o (přesnějším) alexandrijském kalendáři s čtyřletým přestupním cyklem.

Náš kalendář je přímým potomkem *římského* kalendáře.

Ten měl až do roku 46 př.n.l. 365 dnů ročně.

Během egyptského tažení se Julius Caesar dozvěděl o (přesnějším) alexandrijském kalendáři s čtyřletým přestupním cyklem.

Přivedl do Říma alexandrijského astronoma Sosigena.

Římský kalendář a juliánský kalendář

Náš kalendář je přímým potomkem *římského* kalendáře.

Ten měl až do roku 46 př.n.l. 365 dnů ročně.

Během egyptského tažení se Julius Caesar dozvěděl o (přesnějším) alexandrijském kalendáři s čtyřletým přestupním cyklem.

Přivedl do Říma alexandrijského astronoma Sosigena.

Na jeho radu reformoval kalendář na *juliánský*.

Juliánský kalendář

Juliánský kalendář

Průměrná roční doba činí 365.25 dnů.

Juliánský kalendář

Průměrná roční doba činí 365.25 dnů.

Což není daleko od 365.24219878.

Juliánský kalendář

Průměrná roční doba činí 365.25 dnů.

Což není daleko od 365.24219878.

Odchylka činí jeden den za přibližně sto let.

Juliánský kalendář

Průměrná roční doba činí 365.25 dnů.

Což není daleko od 365.24219878.

Odchylka činí jeden den za přibližně sto let.

Během následujícího milénia byla ale chyba pozorována.

1582

V roce 1582 sestavil papež *Řehoř (Gregory) XIII* komisi pro vytvoření nového systému.

V roce 1582 sestavil papež *Řehoř (Gregory) XIII* komisi pro vytvoření nového systému.

Hlavní autor: neapolský astronom Aloysius Lilius.

V roce 1582 sestavil papež *Řehoř (Gregory) XIII* komisi pro vytvoření nového systému.

Hlavní autor: neapolský astronom Aloysius Lilius.

Na jeho radu papež vyhlásil:

V roce 1582 sestavil papež *Řehoř (Gregory) XIII* komisi pro vytvoření nového systému.

Hlavní autor: neapolský astronom Aloysius Lilius.

Na jeho radu papež vyhlásil:

- po 4. říjnu 1582 bude následovat 15. říjen 1582,

V roce 1582 sestavil papež *Řehoř (Gregory) XIII* komisi pro vytvoření nového systému.

Hlavní autor: neapolský astronom Aloysius Lilius.

Na jeho radu papež vyhlásil:

- po 4. říjnu 1582 bude následovat 15. říjen 1582,
- roky končící na 00 nebudou přestupné

V roce 1582 sestavil papež *Řehoř (Gregory) XIII* komisi pro vytvoření nového systému.

Hlavní autor: neapolský astronom Aloysius Lilius.

Na jeho radu papež vyhlásil:

- po 4. říjnu 1582 bude následovat 15. říjen 1582,
- roky končící na 00 nebudou přestupné
- s výjimkou roků dělitelných 400,

V roce 1582 sestavil papež *Řehoř (Gregory) XIII* komisi pro vytvoření nového systému.

Hlavní autor: neapolský astronom Aloysius Lilius.

Na jeho radu papež vyhlásil:

- po 4. říjnu 1582 bude následovat 15. říjen 1582,
- roky končící na 00 nebudou přestupné
- s výjimkou roků dělitelných 400,
- Nový rok se přesune z 25. března na 1. ledna.

Protest protestantů

Protest protestantů

Nekatolický svět v tom viděl katolický úskok.

Protest protestantů

Nekatolický svět v tom viděl katolický úskok.

Trvalo dalších skoro 200 let, než se věci srovnaly.

Protest protestantů

Nekatolický svět v tom viděl katolický úskok.

Trvalo dalších skoro 200 let, než se věci srovnaly.

Velká Británie a její kolonie přijaly reformu v září 1752.

Protest protestantů

Nekatolický svět v tom viděl katolický úskok.

Trvalo dalších skoro 200 let, než se věci srovnaly.

Velká Británie a její kolonie přijaly reformu v září 1752.

Po 2. září 1752 následovalo 14. září 1752,

Protest protestantů

Nekatolický svět v tom viděl katolický úskok.

Trvalo dalších skoro 200 let, než se věci srovnaly.

Velká Británie a její kolonie přijaly reformu v září 1752.

Po 2. září 1752 následovalo 14. září 1752,

a Nový rok se přesunul z 25. března na 1. ledna.

Protest protestantů

Nekatolický svět v tom viděl katolický úskok.

Trvalo dalších skoro 200 let, než se věci srovnaly.

Velká Británie a její kolonie přijaly reformu v září 1752.

Po 2. září 1752 následovalo 14. září 1752,

a Nový rok se přesunul z 25. března na 1. ledna.

Díky tomu si můžete otestovat vyznání Vašeho počítače.

Jakou víru vyznává Váš stroj?

Jakou víru vyznává Váš stroj?

October 1582

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

September 1752

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
		1	2	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Jakou víru vyznává Váš stroj?

October 1582

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

September 1752

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
		1	2	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Protestantská verse.

Zhodnocení

Zhodnocení

Gregoriánský kalendář je

Zhodnocení

Gregoriánský kalendář je

- *precizní* (odchylka 1 den za 3320 let),

Zhodnocení

Gregoriánský kalendář je

- *precizní* (odchylka 1 den za 3320 let),
- *pohodlný* (jednoduchá pravidla pro určení přestupnosti)

Zhodnocení

Gregoriánský kalendář je

- *precizní* (odchylka 1 den za 3320 let),
- *pohodlný* (jednoduchá pravidla pro určení přestupnosti)

Je to produkt umění, nebo je v pozadí nějaká věda?

Zhodnocení

Gregoriánský kalendář je

- *precizní* (odchylka 1 den za 3320 let),
- *pohodlný* (jednoduchá pravidla pro určení přestupnosti)

Je to produkt umění, nebo je v pozadí nějaká věda?

Pokusíme se ukázat, že věda.

A teď pro změnu zlomky

A teď pro změnu zlomky

Historie sahá k Eukleidovu algoritmu.

A teď pro změnu zlomky

Historie sahá k Eukleidovu algoritmu.

Připomeneme si Eukleidův algoritmus pro nalezení GCD dvou čísel.

Eukleidův algoritmus

Eukleidův algoritmus

$$75 = 2 \cdot 33 + 9 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{33}$$

$$33 = 3 \cdot 9 + 6 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{3 \cdot 9 + 6} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{9}}$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{1 \cdot 6 + 3}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{6}}}$$

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2 \cdot 3}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Eukleidův algoritmus

$$75 = 2 \cdot 33 + 9 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{33}$$

$$33 = 3 \cdot 9 + 6 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{3 \cdot 9 + 6} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{9}}$$

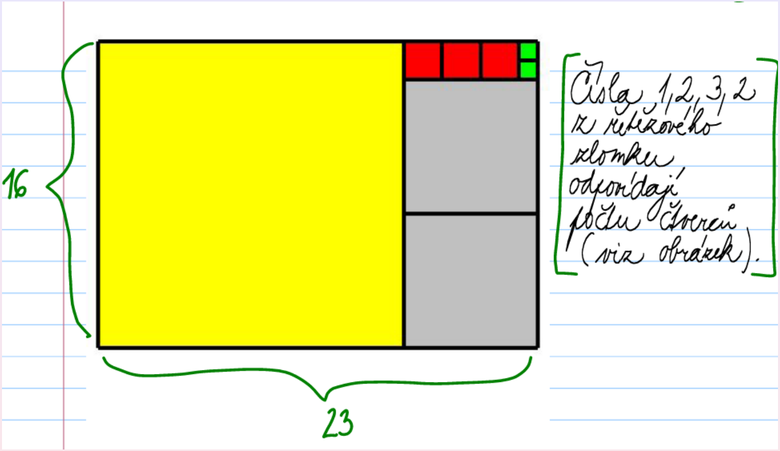
$$9 = 1 \cdot 6 + 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{1 \cdot 6 + 3}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{6}}}$$

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{2 \cdot 3}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

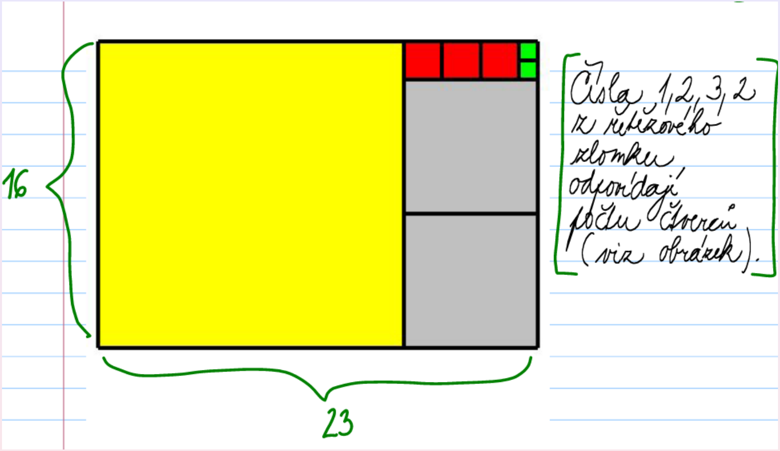
Zápis zlomku pomocí řetězového zlomku: $\frac{75}{33} = [2; 3, 1, 2]$. A kde je ten GCD?

Ukradeno mistrům

Ukradeno mistrům

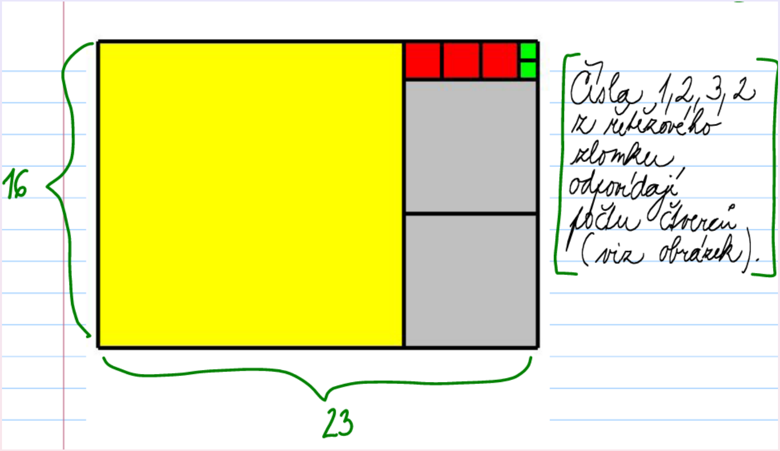


Ukradeno mistrům



Geometrický význam řetězového zlomku pro $\frac{23}{16} = [1; 2, 3, 2]$.

Ukradeno mistrům



Geometrický význam řetězového zlomku pro $\frac{23}{16} = [1; 2, 3, 2]$.

Historie

Historie

Není známo, že by Řekové znali řetězové zlomky.

Historie

Není známo, že by Řekové znali řetězové zlomky.

První doložený řetězový zlomek uvádí Bombelli (1572) pro aproximaci $\sqrt{3}$.

Historie

Není známo, že by Řekové znali řetězové zlomky.

První doložený řetězový zlomek uvádí Bombelli (1572) pro aproximaci $\sqrt{3}$.

První *nekonečný* řetězový zlomek uvádí Lord Brouncker pro rozvoj $\frac{4}{\pi}$.

Historie

Není známo, že by Řekové znali řetězové zlomky.

První doložený řetězový zlomek uvádí Bombelli (1572) pro aproximaci $\sqrt{3}$.

První *nekonečný* řetězový zlomek uvádí Lord Brouncker pro rozvoj $\frac{4}{\pi}$.

Systematický vývoj od 1737: Euler uvádí aplikace řetězových zlomků v teorii čísel a v matematické analýze.

Historie

Není známo, že by Řekové znali řetězové zlomky.

První doložený řetězový zlomek uvádí Bombelli (1572) pro aproximaci $\sqrt{3}$.

První *nekonečný* řetězový zlomek uvádí Lord Brouncker pro rozvoj $\frac{4}{\pi}$.

Systematický vývoj od 1737: Euler uvádí aplikace řetězových zlomků v teorii čísel a v matematické analýze.

18. a 19. století - přispívá každý, kdo něco znamená.

Co když je číslo iracionální?

Co když je číslo iracionální?

Řetězový zlomek dává smysl i pro iracionální číslo.

Co když je číslo iracionální?

Řetězový zlomek dává smysl i pro iracionální číslo.

Zásadní rozdíl: bude nekonečný.

Co když je číslo iracionální?

Řetězový zlomek dává smysl i pro iracionální číslo.

Zásadní rozdíl: bude nekonečný.

Nesmyslná úloha: najdi GCD čísel 1 a $\sqrt{2}$!

Řetězový zlomek pro iracionální číslo.

Řetězový zlomek pro iracionální číslo.

$$\sqrt{2} = 1 + 0.41421356\ldots = 1 + \cfrac{1}{2.41421356\ldots} =$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + 0.41421356\ldots} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}} = \ldots$$

Řetězový zlomek pro iracionální číslo.

$$\sqrt{2} = 1 + 0.41421356\ldots = 1 + \frac{1}{2.41421356\ldots} =$$

$$1 + \frac{1}{2 + 0.41421356\ldots} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}} = \ldots$$

Tedy $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2\ldots]$.

Lze to dotáhnout do konce?

Lze to dotáhnout do konce?

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Lze to dotáhnout do konce?

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Řetězový zlomek pro $\sqrt{2}$ nekončící.

Řetězové zlomky jsou krásné.

Řetězové zlomky jsou krásné.

Estetická krása řetězových zlomků vyvolává dojem, že by určitá čísla mohla mít v algebře a geometrii zvláštní význam.

Řetězové zlomky jsou krásné.

Estetická krása řetězových zlomků vyvolává dojem, že by určitá čísla mohla mít v algebře a geometrii zvláštní význam.

Uvedeme zásadní příklad.

Nejiracionálnější číslo na světě

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Nejiracionálnější číslo na světě

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Samé jedničky.

Zlatý řez má následující vlastnost:

Zlatý řez a příbuzní

Zlatý řez má následující vlastnost:

$$\tau + (-1) = \frac{1}{\tau}$$

Zlatý řez má následující vlastnost:

$$\tau + (-1) = \frac{1}{\tau}$$

Otázka: které číslo θ je *bratrancem* τ ve smyslu:

Zlatý řez a příbuzní

Zlatý řez má následující vlastnost:

$$\tau + (-1) = \frac{1}{\tau}$$

Otázka: které číslo θ je *bratrancem* τ ve smyslu:

$$\theta \cdot (-1) = \frac{1}{\theta}?$$

Zlatý řez a příbuzní

Zlatý řez má následující vlastnost:

$$\tau + (-1) = \frac{1}{\tau}$$

Otázka: které číslo θ je *bratrancem* τ ve smyslu:

$$\theta \cdot (-1) = \frac{1}{\theta}?$$

Odpověď: $\theta = i$.

Povědomé zlomky

Povědomé zlomky

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}$$

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$

1+

1.618033989

n-tá konvergenta

n-tá konvergenta

Ukončíme-li nekonečný řetězový zlomek pro iracionální číslo α v n-tém kroku, dostaneme číslo α_n, které nazveme *n-tou konvergentou* čísla α.

n-tá konvergenta

Ukončíme-li nekonečný řetězový zlomek pro iracionální číslo α v n-tém kroku, dostaneme číslo α_n, které nazveme *n-tou konvergentou* čísla α.

Konvergenta má vždy tvar zlomku:

n-tá konvergenta

Ukončíme-li nekonečný řetězový zlomek pro iracionální číslo α v n-tém kroku, dostaneme číslo α_n, které nazveme *n-tou konvergentou* čísla α.

Konvergenta má vždy tvar zlomku:

$$\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

Ukradeno mistrům podruhé

(*)
$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}}$$

$[n \in \mathbb{N},\ n \geq 2]$

VĚTA

Uvažujme řetězový zlomek $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. [ukončený nebo neukončený]

Pak pro každé $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ [konečná nebo nekonečná množina]

platí
$$\boxed{[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}.}$$

(×)

Ukradeno mistrům podruhé

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned} p_n &= a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}} \qquad [n \in \mathbb{N},\ n \geq 2]$$

VĚTA

Uvažujme řetězový zlomek $[a_0; a_1, a_2, \ldots\ ]$. [ukončený nebo neukončený]

Ak pro každé $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ [konečná nebo nekonečná množina]

platí

$$\boxed{[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}.} \qquad (\times)$$

Formule.

Výpočet konvergent

Výpočet konvergent

$$\alpha = \sqrt{2} = 2.41421356\ldots \qquad \pi = 3.141592654\ldots$$

$$\alpha_0 = 1 \qquad \pi_0 = 3$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \pi_1 = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad \pi_2 = \frac{333}{106} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$$

$$\alpha_3 = \frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} \qquad \pi_3 = \frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

$$\alpha_4 = \frac{41}{29} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} \qquad \pi_4 = \frac{103993}{33102} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

Výpočet konvergent

$$\alpha = \sqrt{2} = 2.41421356\ldots \qquad \pi = 3.141592654\ldots$$

$$\alpha_0 = 1 \qquad \pi_0 = 3$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \pi_1 = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad \pi_2 = \frac{333}{106} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$$

$$\alpha_3 = \frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} \qquad \pi_3 = \frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

$$\alpha_4 = \frac{41}{29} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} \qquad \pi_4 = \frac{103993}{33102} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

Konvergenty pro $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$ a
$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \ldots]$.

Proč konvergenty?

Proč konvergenty?

Konvergenty vskutku konvergují, $\alpha_n \to \alpha$, a to dost rychle.

Proč konvergenty?

Konvergenty vskutku konvergují, $\alpha_n \to \alpha$, a to dost rychle.

Rychlost konvergence závisí na konkrétním čísle.

Proč konvergenty?

Konvergenty vskutku konvergují, $\alpha_n \to \alpha$, a to dost rychle.

Rychlost konvergence závisí na konkrétním čísle.

Příklady:

Proč konvergenty?

Konvergenty vskutku konvergují, $\alpha_n \to \alpha$, a to dost rychle.

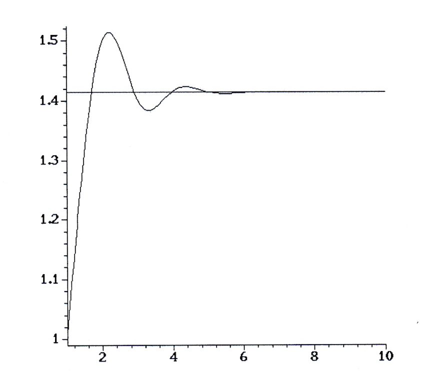
Rychlost konvergence závisí na konkrétním čísle.

Příklady:

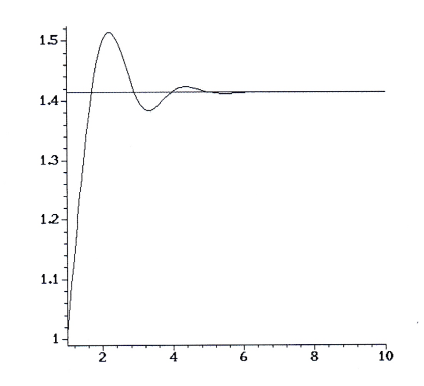
$$\sqrt{2} - \sqrt{2}_4 \approx 4.2 \times 10^{-4}, \quad \pi - \pi_4 \approx 5.8 \times 10^{-10}.$$

Konvergence konvergent

Konvergence konvergent



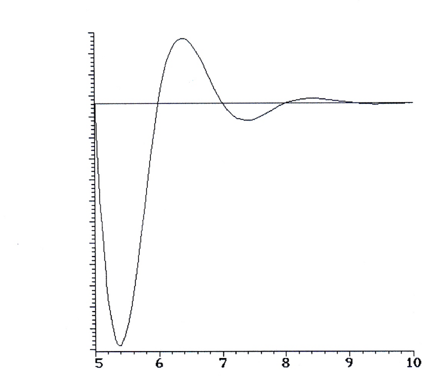
Konvergence konvergent



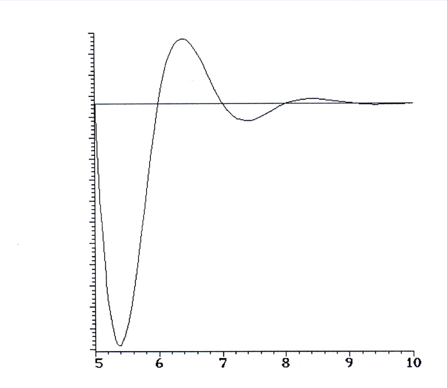
Graf pro $\sqrt{2}$.

Konvergence konvergent

Konvergence konvergent



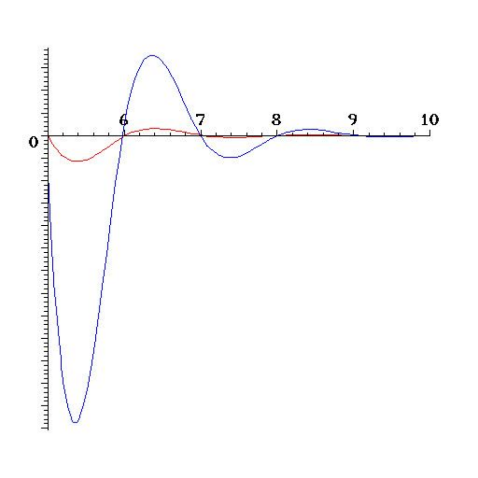
Konvergence konvergent



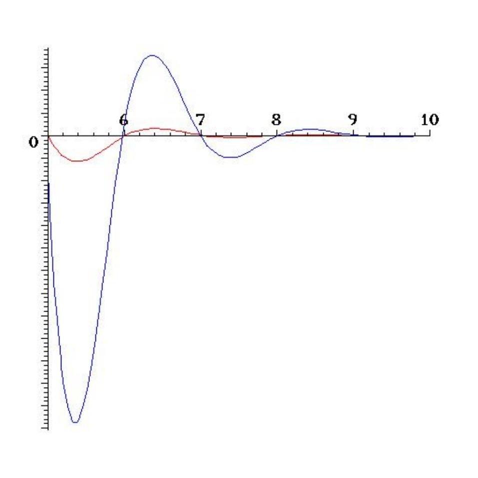
Graf pro π.

Konvergence konvergent

Konvergence konvergent



Konvergence konvergent



Grafy pro $\sqrt{2}$ a π.

Aproximace řetězovými zlomky

Aproximace řetězovými zlomky

Řetězové zlomky mají řadu pozoruhodných vlastností.

Aproximace řetězovými zlomky

Řetězové zlomky mají řadu pozoruhodných vlastností.

Nás zajímají zejména jejich aproximační schopnosti.

Aproximace řetězovými zlomky

Řetězové zlomky mají řadu pozoruhodných vlastností.

Nás zajímají zejména jejich aproximační schopnosti.

Ukazuje se, že konvergenty jsou v tomto směru vskutku nadstandardní.

Co je to dobrá aproximace?

Co je to dobrá aproximace?

Definition

Zlomek $\frac{p}{q}$ nazveme *dobrou aproximací* čísla α, jestliže

$$\forall q' \in \mathbb{N},\ q' < q\ \forall p' \in \mathbb{Z} : |q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$$

Definition

Zlomek $\frac{p}{q}$ nazveme *dobrou aproximací* čísla α, jestliže

$$\forall q' \in \mathbb{N},\ q' < q\ \forall p' \in \mathbb{Z} : |q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$$

Například $\frac{22}{7}$ je dobrá aproximace π, neboť

$$\forall q' \in \mathbb{N},\ q' < 7\ \forall p' \in \mathbb{Z} : |7\pi - 22| < |q'\pi - p'|$$

Co je to dobrá aproximace?

Definition

Zlomek $\frac{p}{q}$ nazveme *dobrou aproximací* čísla α, jestliže

$$\forall q' \in \mathbb{N},\ q' < q\ \forall p' \in \mathbb{Z} : |q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$$

Například $\frac{22}{7}$ je dobrá aproximace π, neboť

$$\forall q' \in \mathbb{N},\ q' < 7\ \forall p' \in \mathbb{Z} : |7\pi - 22| < |q'\pi - p'|$$

Připomeňme:

Co je to dobrá aproximace?

Definition

Zlomek $\frac{p}{q}$ nazveme *dobrou aproximací* čísla α, jestliže

$$\forall q' \in \mathbb{N},\ q' < q\ \forall p' \in \mathbb{Z} : |q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$$

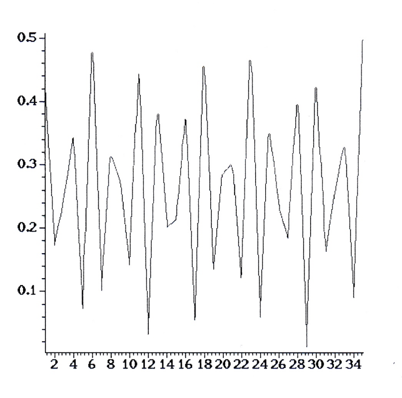
Například $\frac{22}{7}$ je dobrá aproximace π, neboť

$$\forall q' \in \mathbb{N},\ q' < 7\ \forall p' \in \mathbb{Z} : |7\pi - 22| < |q'\pi - p'|$$

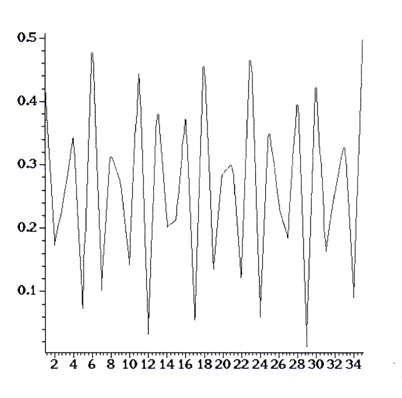
Připomeňme:

$$7\pi - 22 = -0.00885142487\cdots$$

Dobré aproximace $\sqrt{2}$



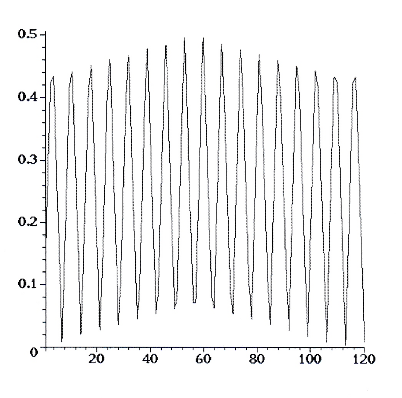
Dobré aproximace $\sqrt{2}$



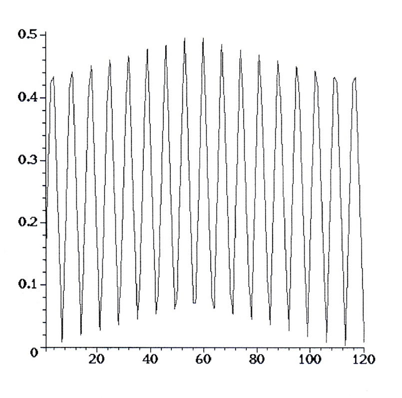
Dobré aproximace dostáváme pro jmenovatele: $2, 5, 12, 29, 70, \ldots$.

Dobré aproximace π

Dobré aproximace π



Dobré aproximace π



Dobré aproximace dostaneme pro jmenovatele:
$7, 106, 113, 33\,102, \ldots$.

Jakou roli zde hrají konvergenty?

Jakou roli zde hrají konvergenty?

Pozorování: dobré aproximace splývají s konvergentami.

Huyghensova věta (Christian Huyghens, 1629–1695)

Huyghensova věta (Christian Huyghens, 1629–1695)

Theorem

Každá konvergenta je dobrou aproximací.

Huyghensova věta (Christian Huyghens, 1629–1695)

Theorem

Každá konvergenta je dobrou aproximací.

Naopak, každá dobrá aproximace je některou konvergentou.

Huyghensova věta (Christian Huyghens, 1629–1695)

Theorem

Každá konvergenta je dobrou aproximací.

Naopak, každá dobrá aproximace je některou konvergentou.

Dále platí: q_n *je nejmenší* $q > q_{n-1}$ *takové, pro které existuje* $p \in \mathbb{Z}$ *splňující*

$$|q\alpha - p| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|.$$

Huyghensova věta (Christian Huyghens, 1629–1695)

Theorem

Každá konvergenta je dobrou aproximací.

Naopak, každá dobrá aproximace je některou konvergentou.

Dále platí: q_n *je nejmenší* $q > q_{n-1}$ *takové, pro které existuje* $p \in \mathbb{Z}$ *splňující*

$$|q\alpha - p| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|.$$

Navíc

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Kalendář a zlomky

Kalendář a zlomky

Idea moderního kalendáře:

Kalendář a zlomky

Idea moderního kalendáře:

- chceme cyklus q roků,

Kalendář a zlomky

Idea moderního kalendáře:

- chceme cyklus q roků,
- z toho p přestupných a $q - p$ nepřestupných,

Idea moderního kalendáře:

- chceme cyklus q roků,
- z toho p přestupných a $q - p$ nepřestupných,
- p, q volíme tak, aby průměrná délka roku byla co nejbližší astronomické délce,

Kalendář a zlomky

Idea moderního kalendáře:

- chceme cyklus q roků,
- z toho p přestupných a $q - p$ nepřestupných,
- p, q volíme tak, aby průměrná délka roku byla co nejbližší astronomické délce,
- a aby pravidla pro určení q, p byla dostatečně jednoduchá.

Příklady

Příklady

Požadavky nepochybně splňují:

Příklady

Požadavky nepochybně splňují:

- juliánský kalendář ($q = 4,\ p = 1$),

Příklady

Požadavky nepochybně splňují:

- juliánský kalendář ($q = 4$, $p = 1$),
- gregoriánský kalendář ($q = 400$, $p = 97$).

Příklady

Požadavky nepochybně splňují:

- juliánský kalendář ($q = 4$, $p = 1$),
- gregoriánský kalendář ($q = 400$, $p = 97$).

Požadavky nejspíš nesplňuje:

Příklady

Požadavky nepochybně splňují:

- juliánský kalendář ($q = 4$, $p = 1$),
- gregoriánský kalendář ($q = 400$, $p = 97$).

Požadavky nejspíš nesplňuje:

- hebrejský kalendář ($q = 19$, p vyžaduje netriviální výpočet)

Obecný přístup

Obecný přístup

Uvažujme q-letý cyklus s p přestupnými roky.

Obecný přístup

Uvažujme q-letý cyklus s p přestupnými roky.

Během cyklu uběhne $365q + p$ dnů.

Obecný přístup

Uvažujme q-letý cyklus s p přestupnými roky.

Během cyklu uběhne $365q + p$ dnů.

Tedy průměrná délka roku je $365 + \frac{p}{q}$ dnů.

Obecný přístup

Uvažujme q-letý cyklus s p přestupnými roky.

Během cyklu uběhne $365q + p$ dnů.

Tedy průměrná délka roku je $365 + \frac{p}{q}$ dnů.

Takže hledáme vhodná q a p pro aproximaci čísla $\alpha = 0.24219878$.

Obecný přístup

Uvažujme q-letý cyklus s p přestupnými roky.

Během cyklu uběhne $365q + p$ dnů.

Tedy průměrná délka roku je $365 + \frac{p}{q}$ dnů.

Takže hledáme vhodná q a p pro aproximaci čísla $\alpha = 0.24219878$.

V souladu s Huyghensovou větou posoudíme konvergenty.

Řetězový zlomek pro α

Řetězový zlomek pro α

$$0.24219878 = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \ddots}}}}}$$

Posloupnost konvergent

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{29}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{33}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{31}{128}, \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{163}{673}.$$

Posloupnost konvergent

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{29}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{33}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{31}{128}, \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{163}{673}.$$

Prvních pět konvergent pro α.

Posuďme konvergenty

Posuďme konvergenty

První konvergenta $\frac{1}{4}$ odpovídá juliánskému kalendáři se 4-letým cyklem a jedním přestupným rokem.

Posuďme konvergenty

První konvergenta $\frac{1}{4}$ odpovídá juliánskému kalendáři se 4-letým cyklem a jedním přestupným rokem.

Další zlomky mají nepříjemné jmenovatele $29, 33, 128, 673$, a jsou tedy po zásluze odmítnuty.

Posuďme konvergenty

První konvergenta $\frac{1}{4}$ odpovídá juliánskému kalendáři se 4-letým cyklem a jedním přestupným rokem.

Další zlomky mají nepříjemné jmenovatele $29, 33, 128, 673$, a jsou tedy po zásluze odmítnuty.

Výjimka: o kalendáři s periodou 33 se uvažovalo.

Posuďme konvergenty

První konvergenta $\frac{1}{4}$ odpovídá juliánskému kalendáři se 4-letým cyklem a jedním přestupným rokem.

Další zlomky mají nepříjemné jmenovatele $29, 33, 128, 673$, a jsou tedy po zásluze odmítnuty.

Výjimka: o kalendáři s periodou 33 se uvažovalo.

Takový kalendář by byl preciznější než náš současný.

Stoleťový přístup

Stoleťový přístup

Chceme cyklus zahrnující několik století,

Stoleťový přístup

Chceme cyklus zahrnující několik století,

aby se to dobře počítalo,

Stoleťový přístup

Chceme cyklus zahrnující několik století,

aby se to dobře počítalo,

dlouho to trvalo

Stoleťový přístup

Chceme cyklus zahrnující několik století,

aby se to dobře počítalo,

dlouho to trvalo

a aby byla jednoduchá pravidla pro určování p.

Stoleťový přístup

Chceme cyklus zahrnující několik století,

aby se to dobře počítalo,

dlouho to trvalo

a aby byla jednoduchá pravidla pro určování p.

Tedy předpokládejme, že $q = 100q'$, kde $q' \in \mathbb{N}$.

Stoleťový přístup

Chceme cyklus zahrnující několik století,

aby se to dobře počítalo,

dlouho to trvalo

a aby byla jednoduchá pravidla pro určování p.

Tedy předpokládejme, že $q = 100q'$, kde $q' \in \mathbb{N}$.

Pak hledáme aproximace čísla $\alpha' = 100\alpha = 24.219878$.

Řetězový zlomek pro α'

Řetězový zlomek pro α'

$$0.24219878 \times 100 = 24 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

Konvergenty pro α

Konvergenty pro α

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{97}{4}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{121}{5}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{218}{9}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{993}{41}.$$

Konvergenty pro α

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{97}{4}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{121}{5}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{218}{9}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{993}{41}.$$

První čtyři konvergenty pro α.

Kandidáti

Máme tedy několik kandidátů na kalendářový model.

Kandidáti

Máme tedy několik kandidátů na kalendářový model.

První kandidát, $\frac{97}{4}$, odpovídá gregoriánskému kalendáři (400-letý cyklus, 97 přestupných let, jednoduchá pravidla).

Druhý kandidát

Druhý kandidát

Druhá konvergenta $\frac{121}{5}$ by odpovídala 500-letému cyklu se 121 přestupnými roky.

Druhý kandidát

Druhá konvergenta $\frac{121}{5}$ by odpovídala 500-letému cyklu se 121 přestupnými roky.

Přestupný rok by mohl být každý čtvrtý kromě dělitelných 100 s výjimkou dělitelného 500.

Druhý kandidát

Druhá konvergenta $\frac{121}{5}$ by odpovídala 500-letému cyklu se 121 přestupnými roky.

Přestupný rok by mohl být každý čtvrtý kromě dělitelných 100 s výjimkou dělitelného 500.

Tento systém by zachoval všechny výhody gregoriánského kalendáře a zároveň by byl mnohem preciznější.

Druhý kandidát

Druhá konvergenta $\frac{121}{5}$ by odpovídala 500-letému cyklu se 121 přestupnými roky.

Přestupný rok by mohl být každý čtvrtý kromě dělitelných 100 s výjimkou dělitelného 500.

Tento systém by zachoval všechny výhody gregoriánského kalendáře a zároveň by byl mnohem preciznější.

Papež jej však nezvolil.

Porovnání

Porovnání

Gregoriánský kalendář je o 26 sekund delší než solární rok.

Porovnání

Gregoriánský kalendář je o 26 sekund delší než solární rok.

Odchylka o 1 den se projeví jednou za 3320 let.

Porovnání

Gregoriánský kalendář je o 26 sekund delší než solární rok.

Odchylka o 1 den se projeví jednou za 3320 let.

500-letý kalendář by byl o 17 sekund kratší než solární rok.

Porovnání

Gregoriánský kalendář je o 26 sekund delší než solární rok.

Odchylka o 1 den se projeví jednou za 3320 let.

500-letý kalendář by byl o 17 sekund kratší než solární rok.

Odchylka o 1 den by se projevila jednou za 5031 let.

Porovnání

Gregoriánský kalendář je o 26 sekund delší než solární rok.

Odchylka o 1 den se projeví jednou za 3320 let.

500-letý kalendář by byl o 17 sekund kratší než solární rok.

Odchylka o 1 den by se projevila jednou za 5031 let.

Proč tohle všechno papežovi uniklo?

Třetí kandidát

Třetí kandidát

Další konvergenta, $\frac{218}{9}$, nabízí 900-letý cyklus.

Třetí kandidát

Další konvergenta, $\frac{218}{9}$, nabízí 900-letý cyklus.

Pravidla pro určení přestupných let by ale vyžadovala 7 výjimek, protože $218 = \frac{900}{4} - 7$.

Třetí kandidát

Další konvergenta, $\frac{218}{9}$, nabízí 900-letý cyklus.

Pravidla pro určení přestupných let by ale vyžadovala 7 výjimek, protože $218 = \frac{900}{4} - 7$.

To by se určovalo obtížně.

Třetí kandidát

Další konvergenta, $\frac{218}{9}$, nabízí 900-letý cyklus.

Pravidla pro určení přestupných let by ale vyžadovala 7 výjimek, protože $218 = \frac{900}{4} - 7$.

To by se určovalo obtížně.

Navíc je cyklus moc dlouhý.

Třetí kandidát

Další konvergenta, $\frac{218}{9}$, nabízí 900-letý cyklus.

Pravidla pro určení přestupných let by ale vyžadovala 7 výjimek, protože $218 = \frac{900}{4} - 7$.

To by se určovalo obtížně.

Navíc je cyklus moc dlouhý.

Vše nasvědčuje tomu, že bychom měli preferovat 500-letý cyklus.

Třetí kandidát

Další konvergenta, $\frac{218}{9}$, nabízí 900-letý cyklus.

Pravidla pro určení přestupných let by ale vyžadovala 7 výjimek, protože $218 = \frac{900}{4} - 7$.

To by se určovalo obtížně.

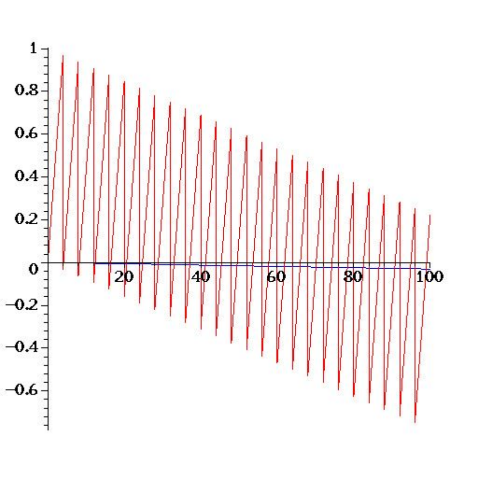
Navíc je cyklus moc dlouhý.

Vše nasvědčuje tomu, že bychom měli preferovat 500-letý cyklus.

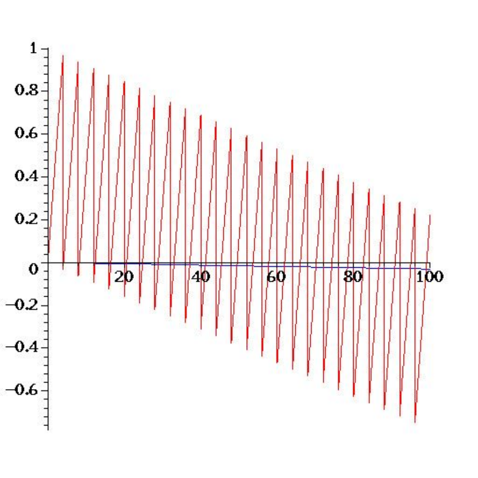
Máme nicméně 400-letý.

Porovnání kalendářů

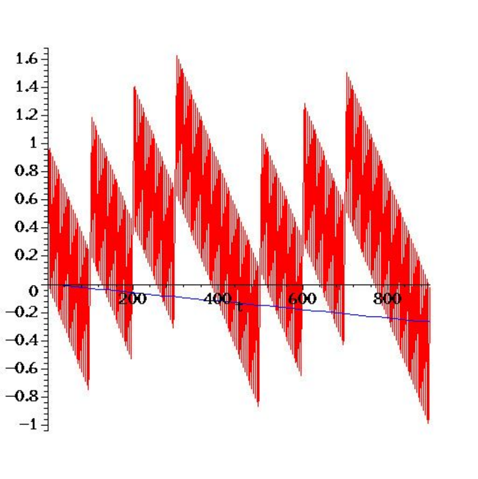
Porovnání kalendářů

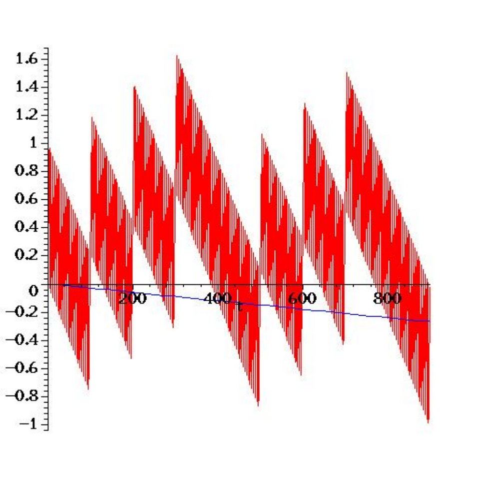


Porovnání kalendářů

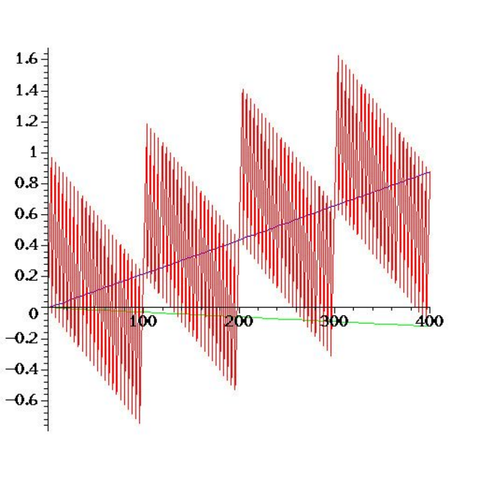


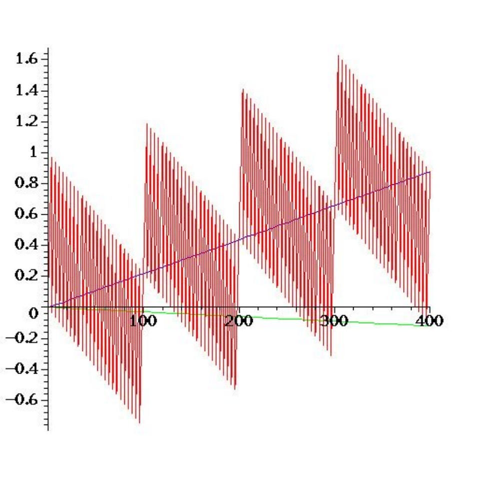
Odchylka gregoriánského kalendáře za 100 let.


1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
200
400
t
600
800

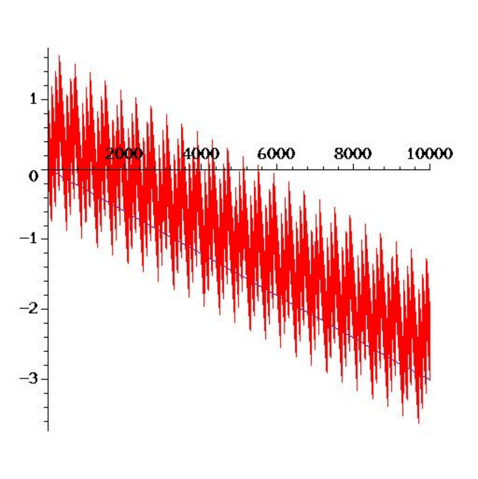


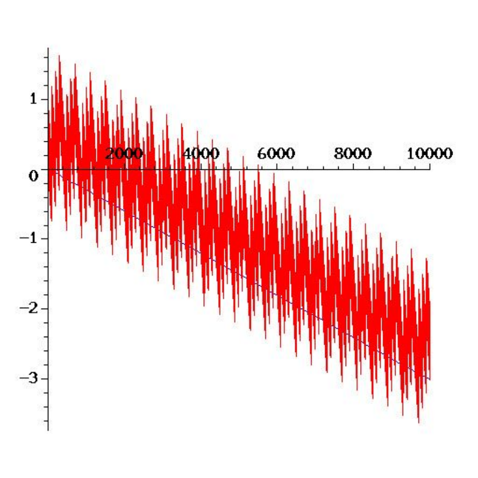
Odchylka gregoriánského kalendáře za 900 let


1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
100
200
300
400



Kdybychom vyhodili 400-letou korekci.


1
0
−1
−2
−3
2000
4000
6000
8000
10000



Odchylka gregoriánského kalendáře za 10 000 let.

Co dál?

Co dál?

Můžeme spekulovat, jak opravit chybu v gregoriánském kalendáři.

Co dál?

Můžeme spekulovat, jak opravit chybu v gregoriánském kalendáři.

Idea: zachováme systém a zavedeme nepravidelné korekce.

Co dál?

Můžeme spekulovat, jak opravit chybu v gregoriánském kalendáři.

Idea: zachováme systém a zavedeme nepravidelné korekce.

Jak?

Co dál?

Můžeme spekulovat, jak opravit chybu v gregoriánském kalendáři.

Idea: zachováme systém a zavedeme nepravidelné korekce.

Jak?

Pomohou nám (opět) řetězové zlomky.

Megalomanie

Hledáme hodně dlouhý cyklus q, který by obsáhl několik 400-letých cyklů.

Megalomanie

Hledáme hodně dlouhý cyklus q, který by obsáhl několik 400-letých cyklů.

Tedy $q = 400q'$, $q' \in \mathbb{N}$.

Megalomanie

Hledáme hodně dlouhý cyklus q, který by obsáhl několik 400-letých cyklů.

Tedy $q = 400q'$, $q' \in \mathbb{N}$.

Najdeme tudíž řetězový zlomek pro číslo 400×0.24219878.

$$400 \times 0.24219878 = 96 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Nepravidelná korekce

Nepravidelná korekce

Konvergenty jsou:

Nepravidelná korekce

Konvergenty jsou:

$$96, 97, \frac{775}{8}, \frac{2422}{25}, \frac{5619}{58}, \dots$$

Nepravidelná korekce

Konvergenty jsou:

$$96, 97, \frac{775}{8}, \frac{2422}{25}, \frac{5619}{58}, \ldots$$

Třetí konvergenta nabízí 3200-letý cyklus se 775 přestupnými roky.

Nepravidelná korekce

Konvergenty jsou:

$$96, 97, \frac{775}{8}, \frac{2422}{25}, \frac{5619}{58}, \dots$$

Třetí konvergenta nabízí 3200-letý cyklus se 775 přestupnými roky.

Připomeňme: gregoriánský kalendář odpovídá zlomku $\frac{97}{400}$.

Nepravidelná korekce

Konvergenty jsou:

$$96, 97, \frac{775}{8}, \frac{2422}{25}, \frac{5619}{58}, \dots$$

Třetí konvergenta nabízí 3200-letý cyklus se 775 přestupnými roky.

Připomeňme: gregoriánský kalendář odpovídá zlomku $\frac{97}{400}$.

Tedy za 8 cyklů má 776 přestupných let.

Nepravidelná korekce

Konvergenty jsou:

$$96, 97, \frac{775}{8}, \frac{2422}{25}, \frac{5619}{58}, \dots$$

Třetí konvergenta nabízí 3200-letý cyklus se 775 přestupnými roky.

Připomeňme: gregoriánský kalendář odpovídá zlomku $\frac{97}{400}$.

Tedy za 8 cyklů má 776 přestupných let.

Takže potřebujeme jednou za 3200 let jeden vyhodit (nepravidelná korekce).

Nepravidelná korekce

Konvergenty jsou:

$$96, 97, \frac{775}{8}, \frac{2422}{25}, \frac{5619}{58}, \dots$$

Třetí konvergenta nabízí 3200-letý cyklus se 775 přestupnými roky.

Připomeňme: gregoriánský kalendář odpovídá zlomku $\frac{97}{400}$.

Tedy za 8 cyklů má 776 přestupných let.

Takže potřebujeme jednou za 3200 let jeden vyhodit (nepravidelná korekce).

Tento systém by vyprodukoval jednodenní odchylku jednou za 100 000 let.

Pro 500-letý kalendář bychom hledali konvergenty čísla 500×0.24219878.

$$500 \times 0.24219878 = 121 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}$$

$$[121, \frac{1211}{10}, \frac{19497}{161}, \frac{59702}{493}, \frac{138901}{1147}, \frac{337504}{2787}, \ldots].$$

Co nabízejí konvergenty?

Co nabízejí konvergenty?

Druhá konvergenta $\frac{1211}{10}$ nabízí zbrusu nový 5000-letý cyklus s 1211 přestupnými roky.

Co nabízejí konvergenty?

Druhá konvergenta $\frac{1211}{10}$ nabízí zbrusu nový 5000-letý cyklus s 1211 přestupnými roky.

Připomeňme, že 500-letý kalendář by měl 1210 přestupých let za 5000 let.

Co nabízejí konvergenty?

Druhá konvergenta $\frac{1211}{10}$ nabízí zbrusu nový 5000-letý cyklus s 1211 přestupnými roky.

Připomeňme, že 500-letý kalendář by měl 1210 přestupých let za 5000 let.

Takže, kdy se na to společně napijeme?

Co nabízejí konvergenty?

Druhá konvergenta $\frac{1211}{10}$ nabízí zbrusu nový 5000-letý cyklus s 1211 přestupnými roky.

Připomeňme, že 500-letý kalendář by měl 1210 přestupých let za 5000 let.

Takže, kdy se na to společně napijeme?

30. února 5000.

Co nabízejí konvergenty?

Druhá konvergenta $\frac{1211}{10}$ nabízí zbrusu nový 5000-letý cyklus s 1211 přestupnými roky.

Připomeňme, že 500-letý kalendář by měl 1210 přestupých let za 5000 let.

Takže, kdy se na to společně napijeme?

30. února 5000.

Jenže papež dělit neuměl, tak se raději napijme ještě dnes.

Odchylka 5000-letého cyklu

Odchylka 5000-letého cyklu

5000-letý cyklus by vyprodukoval jednodenní chybu jednou za milión let.

Jak to bylo doopravdy?

Jak to bylo doopravdy?

Je pravděpodobné, že buď sám papež, nebo někdo v jeho komisi, dělit uměl.

Jak to bylo doopravdy?

Je pravděpodobné, že buď sám papež, nebo někdo v jeho komisi, dělit uměl.

Možná nebyla astronomická pozorování na potřebné úrovni.

Jak to bylo doopravdy?

Je pravděpodobné, že buď sám papež, nebo někdo v jeho komisi, dělit uměl.

Možná nebyla astronomická pozorování na potřebné úrovni.

Ale mohl mít i jiné důvody.

Jak to bylo doopravdy?

Je pravděpodobné, že buď sám papež, nebo někdo v jeho komisi, dělit uměl.

Možná nebyla astronomická pozorování na potřebné úrovni.

Ale mohl mít i jiné důvody.

Kupříkladu blížící se rok 1600.

Hebrejský kalendář používá tzv. Metónův (19-letý) cyklus.

Hebrejský kalendář používá tzv. Metónův (19-letý) cyklus.

Jméno má po Metónovi Athénském (5. století př.n.l.).

Hebrejský kalendář

Hebrejský kalendář používá tzv. Metónův (19-letý) cyklus.

Jméno má po Metónovi Athénském (5. století př.n.l.).

A je to lunární kalendář, takže se nepoužívá přestupný rok, nýbrž přestupný měsíc.

Hebrejský kalendář

Hebrejský kalendář používá tzv. Metónův (19-letý) cyklus.

Jméno má po Metónovi Athénském (5. století př.n.l.).

A je to lunární kalendář, takže se nepoužívá přestupný rok, nýbrž přestupný měsíc.

Přestupný měsíc trvá od úplňku do úplňku.

Hebrejský kalendář

Hebrejský kalendář používá tzv. Metónův (19-letý) cyklus.

Jméno má po Metónovi Athénském (5. století př.n.l.).

A je to lunární kalendář, takže se nepoužívá přestupný rok, nýbrž přestupný měsíc.

Přestupný měsíc trvá od úplňku do úplňku.

Víme: za rok proběhne 12.368267 lunací.

Hebrejský kalendář

Hebrejský kalendář používá tzv. Metónův (19-letý) cyklus.

Jméno má po Metónovi Athénském (5. století př.n.l.).

A je to lunární kalendář, takže se nepoužívá přestupný rok, nýbrž přestupný měsíc.

Přestupný měsíc trvá od úplňku do úplňku.

Víme: za rok proběhne 12.368267 lunací.

K čemu máme řetězové zlomky?

$$12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17}}}}}}$$

$\frac{1}{2}$ — 2

$\frac{1}{3}$ — 1

$\frac{3}{8}$ — 2

$\frac{4}{11}$ — 1

$\frac{7}{19}$ — 1

$\frac{123}{334}$ — 17

$12 + \frac{123}{334}$

12.368267058

Výsledek

Výsledek

$$12.368267 = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17 + \ddots}}}}}}$$

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334}, \dots$$

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334}, \dots$$

Metónův cyklus odpovídá šesté konvergentě, tedy $\frac{235}{19}$.

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334}, \dots$$

Metónův cyklus odpovídá šesté konvergentě, tedy $\frac{235}{19}$.

Za 19 let proběhne 235 lunací.

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334}, \dots$$

Metónův cyklus odpovídá šesté konvergentě, tedy $\frac{235}{19}$.

Za 19 let proběhne 235 lunací.

Kdyby měl každý rok 12 měsíců, máme za 19 let 228 lunací.

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334}, \dots$$

Metónův cyklus odpovídá šesté konvergentě, tedy $\frac{235}{19}$.

Za 19 let proběhne 235 lunací.

Kdyby měl každý rok 12 měsíců, máme za 19 let 228 lunací.

Tedy potřebujeme přidat dalších 7.

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334}, \dots$$

Metónův cyklus odpovídá šesté konvergentě, tedy $\frac{235}{19}$.

Za 19 let proběhne 235 lunací.

Kdyby měl každý rok 12 měsíců, máme za 19 let 228 lunací.

Tedy potřebujeme přidat dalších 7.

Na to používá hebrejský kalendář následující vzorec:

Která konvergenta definuje Metónův cyklus?

Konvergenty jsou:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334}, \dots$$

Metónův cyklus odpovídá šesté konvergentě, tedy $\frac{235}{19}$.

Za 19 let proběhne 235 lunací.

Kdyby měl každý rok 12 měsíců, máme za 19 let 228 lunací.

Tedy potřebujeme přidat dalších 7.

Na to používá hebrejský kalendář následující vzorec:

rok Y je přestupný právě tehdy, když $7Y + 1 (\mathrm{mod}\, 19) < 7$.

Měsíce hebrejského kalendáře

Měsíce hebrejského kalendáře

Jewish Months		Christian Months in Arabic	
1. תִּשְׁרִי Tišrī	30	10. تِشْرِينُ ٱلْأَوَّلُ Tišrīnu l-ʾawwāl	October
2. חֶשְׁוָן Ḫešwān	29/30	11. تِشْرِينُ ٱلثَّانِي Tišrīnu θ-θānī	November
3. כִּסְלֵו Kislēw	30/29	12. كَانُونُ ٱلْأَوَّلُ Kānūnu l-ʾawwāl	December
4. טֵבֵת Ṭēbēṯ	29	1. كَانُونُ ٱلثَّانِي Kānūnu θ-θānī	January
5. שְׁבָט Šebāṭ	30	2. شُبَاطٌ Šubāṭ	February
6. אֲדָר ʾAdār	29	3. آذَارٌ ʾūðār	March
6. שֵׁנִי אֲדָר ʾAdār Šēnī	30	No intercalations	
7. נִיסָן Nīsān	30	4. نِيسَانٌ Nīsān	April
8. אִיָּר ʾIyyār	29	5. أَيَّارٌ ʾAyyār	May
9. סִיוָן Sīwān	30	6. حَزِيرَانٌ Ḥazīrān	June
10. תַּמּוּז Tammūz	29	7. تَمُّوزٌ Tammūz	July
11. אָב ʾūb	30	8. آبٌ ʾūb	August
12. אֱלוּל ʾElūl	29	9. أَيْلُولٌ ʾAylūl	September

Měsíce muslimského kalendáře

The Months of the Moslem Calendar			
1. ٱلْمُحَرَّم 'al-Muḥarram	30	7. رَجَب Rajab	30
2. صَفَر Ṣafar	29	8. شَعْبَان Šaʿbān	29
3. رَبِيع ٱلْأَوَّل Rabīʿu l-'awwal	30	9. رَمَضَان Ramaḍān	30
4. رَبِيع ٱلثَّانِي Rabīʿu θ-θānī	29	10. شَوَّال Šawwāl	29
5. جُمَادَىٰ ٱلْأُولَىٰ Jumādā l-'ūlā	30	11. ذُو ٱلْقَعْدَة Đū l-Qaʿdah	30
6. جُمَادَىٰ ٱلْآخِرَة Jumādā l-'āḫirah	29	12. ذُو ٱلْحِجَّة Đū l-Ḥijjah	29/30

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Počátek: Hídžra (hegira) - odchod Mohameda do Mediny (1. den měsíce al-muharram roku 1 AH = 16.7. 622 AD).

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Počátek: Hídžra (hegira) - odchod Mohameda do Mediny (1. den měsíce al-muharram roku 1 AH = 16.7. 622 AD).

Kalendář má 12 lunárních měsíců a 354 nebo 355 dnů.

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Počátek: Hídžra (hegira) - odchod Mohameda do Mediny (1. den měsíce al-muharram roku 1 AH = 16.7. 622 AD).

Kalendář má 12 lunárních měsíců a 354 nebo 355 dnů.

Korekce: V 11 letech 30-letého cyklu (v letech 2,5,7,10,13,16,18,21,24,26 a 29) se přidává jeden den na konci roku (měsíc Dhu-al-hijjah má pak 30 místo 29 dnů.

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Počátek: Hídžra (hegira) - odchod Mohameda do Mediny (1. den měsíce al-muharram roku 1 AH = 16.7. 622 AD).

Kalendář má 12 lunárních měsíců a 354 nebo 355 dnů.

Korekce: V 11 letech 30-letého cyklu (v letech 2,5,7,10,13,16,18,21,24,26 a 29) se přidává jeden den na konci roku (měsíc Dhu-al-hijjah má pak 30 místo 29 dnů.

Tento systém vyprodukuje chybu jednoho dne jednou za 2568.5 (muslimských) roků.

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Počátek: Hídžra (hegira) - odchod Mohameda do Mediny (1. den měsíce al-muharram roku 1 AH = 16.7. 622 AD).

Kalendář má 12 lunárních měsíců a 354 nebo 355 dnů.

Korekce: V 11 letech 30-letého cyklu (v letech 2,5,7,10,13,16,18,21,24,26 a 29) se přidává jeden den na konci roku (měsíc Dhu-al-hijjah má pak 30 místo 29 dnů.

Tento systém vyprodukuje chybu jednoho dne jednou za 2568.5 (muslimských) roků.

Srovnej gregoriánskou chybu (3320).

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Počátek: Hídžra (hegira) - odchod Mohameda do Mediny (1. den měsíce al-muharram roku 1 AH = 16.7. 622 AD).

Kalendář má 12 lunárních měsíců a 354 nebo 355 dnů.

Korekce: V 11 letech 30-letého cyklu (v letech 2,5,7,10,13,16,18,21,24,26 a 29) se přidává jeden den na konci roku (měsíc Dhu-al-hijjah má pak 30 místo 29 dnů.

Tento systém vyprodukuje chybu jednoho dne jednou za 2568.5 (muslimských) roků.

Srovnej gregoriánskou chybu (3320).

Výhoda islámské reformy kalendáře: putující Ramadán.

Muslimský kalendář

AH znamená Anno Hegirae.

Počátek: Hídžra (hegira) - odchod Mohameda do Mediny (1. den měsíce al-muharram roku 1 AH = 16.7. 622 AD).

Kalendář má 12 lunárních měsíců a 354 nebo 355 dnů.

Korekce: V 11 letech 30-letého cyklu (v letech 2,5,7,10,13,16,18,21,24,26 a 29) se přidává jeden den na konci roku (měsíc Dhu-al-hijjah má pak 30 místo 29 dnů.

Tento systém vyprodukuje chybu jednoho dne jednou za 2568.5 (muslimských) roků.

Srovnej gregoriánskou chybu (3320).

Výhoda islámské reformy kalendáře: putující Ramadán. (Pozor na jižní pól!)

Porovnání hebrejského a muslimského kalendáře

Porovnání hebrejského a muslimského kalendáře

Jewish Months		ٱلْمُحَرَّم ʾal-Muḥarram	Years AD
1. תִּשְׁרִי Tišrī	30	1438, 1439, 1440 AH	2016, 2017, 2018 AD
2. חֶשְׁוָן Ḫešwān	29/30	1436, 1437 AH	2014, 2015 AD
3. כִּסְלֵו Kislēw	30/29	1433, 1434, 1435 AH	2011, 2012, 2013 AD
4. טֵבֵת Ṭēḇēṯ	29	1430, 1431, 1432 AH	2008, 2009, 2010 AD
5. שְׁבָט Šeḇāṭ	30	1427, 1428, 1429 AH	2006, 2007, 2008 AD
6. אֲדָר ʾAḏār	29	1425, 1426 AH	2004, 2005 AD
6. אֲדָר שֵׁנִי ʾAḏār Šēnī; 30		1424 AH	2003 AD
7. נִיסָן Nīsān	30	1421, 1422, 1423 AH	2000, 2001, 2002 AD
8. אִיָּיר ʾIyyār	29	1418, 1419, 1420 AH	1997, 1998, 1999 AD
9. סִיוָן Sīwān	30	1416, 1417 AH	1995, 1996 AD
10. תַּמּוּז Tammūz	29	1414, 1415, 1446 AH	1993, 1994, 2024 AD
11. אָב ʾūḇ	30	1444, 1445 AH	2022, 2023 AD
12. אֱלוּל ʾElūl	29	1441, 1442, 1443 AH	2019, 2020, 2021 AD

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Začátek 1993, konec 2024 (v obou případech odpovídá Tammuz).

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Začátek 1993, konec 2024 (v obou případech odpovídá Tammuz).

Hebrejský kalendář přidává měsíc každý druhý nebo třetí rok.

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Začátek 1993, konec 2024 (v obou případech odpovídá Tammuz).

Hebrejský kalendář přidává měsíc každý druhý nebo třetí rok. Důsledkem je, že Muharram odpovídá jednotlivým hebrejským měsícům vždy dva až tři roky.

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Začátek 1993, konec 2024 (v obou případech odpovídá Tammuz).

Hebrejský kalendář přidává měsíc každý druhý nebo třetí rok. Důsledkem je, že Muharram odpovídá jednotlivým hebrejským měsícům vždy dva až tři roky.

V roce 2003 odpovídal Muharram přestupnému měsíci.

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Začátek 1993, konec 2024 (v obou případech odpovídá Tammuz).

Hebrejský kalendář přidává měsíc každý druhý nebo třetí rok. Důsledkem je, že Muharram odpovídá jednotlivým hebrejským měsícům vždy dva až tři roky.

V roce 2003 odpovídal Muharram přestupnému měsíci. To se může přihodit jen jednou (další rok tento měsíc zmizí).

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Začátek 1993, konec 2024 (v obou případech odpovídá Tammuz).

Hebrejský kalendář přidává měsíc každý druhý nebo třetí rok. Důsledkem je, že Muharram odpovídá jednotlivým hebrejským měsícům vždy dva až tři roky.

V roce 2003 odpovídal Muharram přestupnému měsíci. To se může přihodit jen jednou (další rok tento měsíc zmizí).

Rok 2008 se vyskytuje dvakrát - odpovídal dvěma různým měsícům.

Posun mezi hebrejským a muslimským kalendářem

Který hebrejský měsíc odpovídá (prvnímu) muslimskému měsíci Muharram?

Začátek 1993, konec 2024 (v obou případech odpovídá Tammuz).

Hebrejský kalendář přidává měsíc každý druhý nebo třetí rok. Důsledkem je, že Muharram odpovídá jednotlivým hebrejským měsícům vždy dva až tři roky.

V roce 2003 odpovídal Muharram přestupnému měsíci. To se může přihodit jen jednou (další rok tento měsíc zmizí).

Rok 2008 se vyskytuje dvakrát - odpovídal dvěma různým měsícům.

V letech 2016, 2017 a 2018 vyšel hebrejský a muslimský Nový rok na stejný den – nechtělo by to společnou oslavu?

Literatura

Literatura

Bernard Rasof: Continued fractions and leap years, The Mathematics Teacher 63 (1970)

Literatura

Bernard Rasof: Continued fractions and leap years, The Mathematics Teacher 63 (1970)

Yuri Grabovski: Modern Calendar and continued fractions, web, Temple University

Literatura

Bernard Rasof: Continued fractions and leap years, The Mathematics Teacher 63 (1970)

Yuri Grabovski: Modern Calendar and continued fractions, web, Temple University

Serge Lang: Introduction to Diophantine approximations, Springer, New York, 1995.

Literatura

Bernard Rasof: Continued fractions and leap years, The Mathematics Teacher 63 (1970)

Yuri Grabovski: Modern Calendar and continued fractions, web, Temple University

Serge Lang: Introduction to Diophantine approximations, Springer, New York, 1995.

William B. Jones and Wolfgang J. Thron: Continued fractions. Analytic theory and applications. Addison-Wesley, 1980.

Literatura

Bernard Rasof: Continued fractions and leap years, The Mathematics Teacher 63 (1970)

Yuri Grabovski: Modern Calendar and continued fractions, web, Temple University

Serge Lang: Introduction to Diophantine approximations, Springer, New York, 1995.

William B. Jones and Wolfgang J. Thron: Continued fractions. Analytic theory and applications. Addison-Wesley, 1980.

Jacques Dutka: On the Gregorian revision of the Julian calendar, Math. Intelligencer 10 (1988), 56–64.

Literatura

Bernard Rasof: Continued fractions and leap years, The Mathematics Teacher 63 (1970)

Yuri Grabovski: Modern Calendar and continued fractions, web, Temple University

Serge Lang: Introduction to Diophantine approximations, Springer, New York, 1995.

William B. Jones and Wolfgang J. Thron: Continued fractions. Analytic theory and applications. Addison-Wesley, 1980.

Jacques Dutka: On the Gregorian revision of the Julian calendar, Math. Intelligencer 10 (1988), 56–64.

V. Frederick Rickey: Mathematics of the Gregorian calendar, Math. Intelligencer 7 (1985), 53–66.

Keep the world beautiful!