Monstra
2. Krize matematiky

Martin Rmoutil

Matematicko-fyzikální fakulta UK

VŠB-TUO, 11. dubna 2023

Osnova

16.–17 stol.

- Renesanční optimismus a pragmatismus.
- Důrazný řecký požadavek rigorózních důkazů matematických tvrzení ustoupil do pozadí.

Christiaan Huygens – 1657

„K získání důvěry odborníků není důležité, zda jim dáme absolutní důkaz, [...] Zdá se proto, že především musíme sledovat tu metodu, pomocí které lze vše pochopit a stručně a jasně vyložit. **Sobě ušetříme práci se sepisováním, jiným pak se čtením.**“

Problém: složitost úvah roste nad možnosti naší intuice.

Od dob starověku první pokroky v integraci:
např. Johannes Kepler (1571–1630).

16.–17 stol.

- Renesanční optimismus a pragmatismus.
- Důrazný řecký požadavek rigorózních důkazů matematických tvrzení ustoupil do pozadí.

Christiaan Huygens – 1657

„K získání důvěry odborníků není důležité, zda jim dáme absolutní důkaz, [...] Zdá se proto, že především musíme sledovat tu metodu, pomocí které lze vše pochopit a stručně a jasně vyložit. **Sobě ušetříme práci se sepisováním, jiným pak se čtením.**“

Problém: složitost úvah roste nad možnosti naší intuice.

Od dob starověku první pokroky v integraci:
např. Johannes Kepler (1571–1630).

16.–17 stol.

- Renesanční optimismus a pragmatismus.
- Důrazný řecký požadavek rigorózních důkazů matematických tvrzení ustoupil do pozadí.

Christiaan Huygens – 1657

„K získání důvěry odborníků není důležité, zda jim dáme absolutní důkaz, [...] Zdá se proto, že především musíme sledovat tu metodu, pomocí které lze vše pochopit a stručně a jasně vyložit. **Sobě ušetříme práci se sepisováním, jiným pak se čtením.**“

Problém: složitost úvah roste nad možnosti naší intuice.

Od dob starověku první pokroky v integraci:
např. Johannes Kepler (1571–1630).

16.–17 stol.

- Renesanční optimismus a pragmatismus.
- Důrazný řecký požadavek rigorózních důkazů matematických tvrzení ustoupil do pozadí.

Christiaan Huygens – 1657

„K získání důvěry odborníků není důležité, zda jim dáme absolutní důkaz, [...] Zdá se proto, že především musíme sledovat tu metodu, pomocí které lze vše pochopit a stručně a jasně vyložit. **Sobě ušetříme práci se sepisováním, jiným pak se čtením.**“

Problém: složitost úvah roste nad možnosti naší intuice.

Od dob starověku první pokroky v integraci: např. Johannes Kepler (1571–1630).

16.–17 stol.

- Renesanční optimismus a pragmatismus.
- Důrazný řecký požadavek rigorózních důkazů matematických tvrzení ustoupil do pozadí.

Christiaan Huygens – 1657

„K získání důvěry odborníků není důležité, zda jim dáme absolutní důkaz, [...] Zdá se proto, že především musíme sledovat tu metodu, pomocí které lze vše pochopit a stručně a jasně vyložit. **Sobě ušetříme práci se sepisováním, jiným pak se čtením.**"

Problém: složitost úvah roste nad možnosti naší intuice.

Od dob starověku první pokroky v integraci:
např. Johannes Kepler (1571–1630).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Pozoroval vztah posloupnosti a příslušné posloupnosti diferencí.

N	0	1	2	3	4	5	6			$\dots$
1. dif.		1	1	1	1	1	1	1		$\dots$
2. dif.			0	0	0	0	0	0	0	$\dots$

N^2	0	1	4	9	16	25	36				$\dots$
1. dif.		1	3	5	7	9	11	13			$\dots$
2. dif.			2	2	2	2	2	2	2		$\dots$
3. dif.				0	0	0	0	0	0	0	$\dots$

Diference a $\int$umace jsou zde navzájem (téměř) inverzní operace.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Pozoroval vztah posloupnosti a příslušné posloupnosti diferencí.

N	0	1	2	3	4	5	6			...
1. dif.		1	1	1	1	1	1	1		...
2. dif.			0	0	0	0	0	0	0	...

N^2	0	1	4	9	16	25	36				...
1. dif.		1	3	5	7	9	11	13			...
2. dif.			2	2	2	2	2	2	2		...
3. dif.				0	0	0	0	0	0	0	...

Diference a $\int$umace jsou zde navzájem (téměř) inverzní operace.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Pozoroval vztah posloupnosti a příslušné posloupnosti diferencí.

N	0	1	2	3	4	5	6			...
1. dif.		1	1	1	1	1	1	1		...
2. dif.			0	0	0	0	0	0	0	...

N^2	0	1	4	9	16	25	36				...
1. dif.		1	3	5	7	9	11	13			...
2. dif.			2	2	2	2	2	2	2		...
3. dif.				0	0	0	0	0	0	0	...

Diference a $\int$umace jsou zde navzájem (téměř) inverzní operace.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Pozoroval vztah posloupnosti a příslušné posloupnosti diferencí.

N	0	1	2	3	4	5	6		...
1. dif.		1	1	1	1	1	1	1	...
2. dif.			0	0	0	0	0	0	0 ...

N^2	0	1	4	9	16	25	36			...
1. dif.		1	3	5	7	9	11	13		...
2. dif.			2	2	2	2	2	2	2	...
3. dif.				0	0	0	0	0	0	0 ...

Diference a $\int$umace jsou zde navzájem (téměř) inverzní operace.

Leibniz: publikace v *Acta Eruditorum* (1686)

- Vyložil základy svého nového kalkulu.
- Práce s nekonečně malými (infinitesimálními) veličinami.
- Problém: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$. Kritika.
- Snaha vysvětlit s pomocí metafyziky (neúspěšná).

Nicméně odvodil řadu výsledků: Vzorce pro derivování.

Základní věta kalkulu – „N.-L. formule“

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

„Důkaz.“ $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$ □

Leibniz: publikace v *Acta Eruditorum* (1686)

- Vyložil základy svého nového kalkulu.
- Práce s nekonečně malými (infinitesimálními) veličinami.
- Problém: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$. Kritika.
- Snaha vysvětlit s pomocí metafyziky (neúspěšná).

Nicméně odvodil řadu výsledků: Vzorce pro derivování.

Základní věta kalkulu – „N.-L. formule“

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

„Důkaz.“ $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$ □

Leibniz: publikace v *Acta Eruditorum* (1686)

- Vyložil základy svého nového kalkulu.
- Práce s nekonečně malými (infinitesimálními) veličinami.
- Problém: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$. Kritika.
- Snaha vysvětlit s pomocí metafyziky (neúspěšná).

Nicméně odvodil řadu výsledků: Vzorce pro derivování.

Základní věta kalkulu – „N.-L. formule"

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

„Důkaz." $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$ □

Leibniz: publikace v *Acta Eruditorum* (1686)

- Vyložil základy svého nového kalkulu.
- Práce s nekonečně malými (infinitesimálními) veličinami.
- Problém: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$. Kritika.
- Snaha vysvětlit s pomocí metafyziky (neúspěšná).

Nicméně odvodil řadu výsledků: Vzorce pro derivování.

Základní věta kalkulu – „N.-L. formule“

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

„Důkaz.“ $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$ □

Leibniz: publikace v *Acta Eruditorum* (1686)

- Vyložil základy svého nového kalkulu.
- Práce s nekonečně malými (infinitesimálními) veličinami.
- Problém: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$. Kritika.
- Snaha vysvětlit s pomocí metafyziky (neúspěšná).

Nicméně odvodil řadu výsledků: Vzorce pro derivování.

Základní věta kalkulu – „N.-L. formule"

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

„Důkaz." $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$ □

Leibniz: publikace v *Acta Eruditorum* (1686)

- Vyložil základy svého nového kalkulu.
- Práce s nekonečně malými (infinitesimálními) veličinami.
- Problém: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$. Kritika.
- Snaha vysvětlit s pomocí metafyziky (neúspěšná).

Nicméně odvodil řadu výsledků: Vzorce pro derivování.

Základní věta kalkulu – „N.-L. formule“

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

„Důkaz.“ $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$ $\square$

Leibniz: publikace v *Acta Eruditorum* (1686)

- Vyložil základy svého nového kalkulu.
- Práce s nekonečně malými (infinitesimálními) veličinami.
- Problém: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0}$. Kritika.
- Snaha vysvětlit s pomocí metafyziky (neúspěšná).

Nicméně odvodil řadu výsledků: Vzorce pro derivování.

Základní věta kalkulu – „N.-L. formule"

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

„Důkaz." $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$ $\square$

Isaac Newton (1643-1727) – 1687 publ. PNPM

Nechť je dána křivka $y = x^2$. [Používal jinou notaci.]

$$\begin{aligned} y + \mathrm{d}y &= (x + \mathrm{d}x)^2 \\ y + \mathrm{d}y &= x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x + \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní zanedbáme $\mathrm{d}x$. Celkem: $\left(x^2\right)' = 2x$.

Newton cítil, že podstatou je limitní proces.
Neuměl to vyjádřit, tak občas něco nechal zmizet.
(Kritika: mj. George Berkeley (1685–1753))

Isaac Newton (1643-1727) – 1687 publ. PNPM

Nechť je dána křivka $y = x^2$. [Používal jinou notaci.]

$$\begin{aligned} y + \mathrm{d}y &= (x + \mathrm{d}x)^2 \\ y + \mathrm{d}y &= x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x + \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní zanedbáme $\mathrm{d}x$. Celkem: $\left(x^2\right)' = 2x$.

Newton cítil, že podstatou je limitní proces.
Neuměl to vyjádřit, tak občas něco nechal zmizet.
(Kritika: mj. George Berkeley (1685–1753))

Isaac Newton (1643-1727) – 1687 publ. PNPM

Nechť je dána křivka $y = x^2$. [Používal jinou notaci.]

$$\begin{aligned} y + \mathrm{d}y &= (x + \mathrm{d}x)^2 \\ y + \mathrm{d}y &= x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x + \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní zanedbáme $\mathrm{d}x$. Celkem: $\left(x^2\right)' = 2x$.

Newton cítil, že podstatou je limitní proces.
Neuměl to vyjádřit, tak občas něco nechal zmizet.
(Kritika: mj. George Berkeley (1685–1753))

Isaac Newton (1643-1727) – 1687 publ. PNPM

Nechť je dána křivka $y = x^2$. [Používal jinou notaci.]

$$\begin{aligned} y + \mathrm{d}y &= (x + \mathrm{d}x)^2 \\ y + \mathrm{d}y &= x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x + \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní zanedbáme $\mathrm{d}x$. Celkem: $\left(x^2\right)' = 2x$.

Newton cítil, že podstatou je limitní proces.
Neuměl to vyjádřit, tak občas něco nechal zmizet.
(Kritika: mj. George Berkeley (1685–1753))

18. Století: Leonhard Euler (1707–1783)

Počátek století: nová metoda na chatrných základech.
Není jasné, co přesně *je* **infinitesimální** veličina.
Navíc není ani jasné, jak přesně se s ní může pracovat.
Zakladatelé sami chyby (skoro) nedělali. Ostatní občas ano.

Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **Funkce** jako centrální pojem MA; značení $f(x)$;
- opatrnost s konvergencí nekonečných řad;
- e, exponenciála, $e^{i\pi} = -1$ atd.

18. Století: Leonhard Euler (1707–1783)

Počátek století: nová metoda na chatrných základech.
Není jasné, co přesně *je* **infinitesimální** veličina.
Navíc není ani jasné, jak přesně se s ní může pracovat.
Zakladatelé sami chyby (skoro) nedělali. Ostatní občas ano.

Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **Funkce** jako centrální pojem MA; značení $f(x)$;
- opatrnost s konvergencí nekonečných řad;
- e, exponenciála, $e^{i\pi} = -1$ atd.

18. Století: Leonhard Euler (1707–1783)

Počátek století: nová metoda na chatrných základech.
Není jasné, co přesně *je* **infinitesimální** veličina.
Navíc není ani jasné, jak přesně se s ní může pracovat.
Zakladatelé sami chyby (skoro) nedělali. Ostatní občas ano.

Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **Funkce** jako centrální pojem MA; značení $f(x)$;
- opatrnost s konvergencí nekonečných řad;
- e, exponenciála, $e^{i\pi} = -1$ atd.

18. Století: Leonhard Euler (1707–1783)

Počátek století: nová metoda na chatrných základech.
Není jasné, co přesně *je* **infinitesimální** veličina.
Navíc není ani jasné, jak přesně se s ní může pracovat.
Zakladatelé sami chyby (skoro) nedělali. Ostatní občas ano.

Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **Funkce** jako centrální pojem MA; značení $f(x)$;
- opatrnost s konvergencí nekonečných řad;
- e, exponenciála, $e^{i\pi} = -1$ atd.

18. Století: Leonhard Euler (1707–1783)

Počátek století: nová metoda na chatrných základech.
Není jasné, co přesně *je* **infinitesimální** veličina.
Navíc není ani jasné, jak přesně se s ní může pracovat.
Zakladatelé sami chyby (skoro) nedělali. Ostatní občas ano.

Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **Funkce** jako centrální pojem MA; značení $f(x)$;
- opatrnost s konvergencí nekonečných řad;
- e, exponenciála, $e^{i\pi} = -1$ atd.

18. Století: Leonhard Euler (1707–1783)

Počátek století: nová metoda na chatrných základech.
Není jasné, co přesně *je* **infinitesimální** veličina.
Navíc není ani jasné, jak přesně se s ní může pracovat.
Zakladatelé sami chyby (skoro) nedělali. Ostatní občas ano.

Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **Funkce** jako centrální pojem MA; značení $f(x)$;
- opatrnost s konvergencí nekonečných řad;
- e, exponenciála, $e^{i\pi} = -1$ atd.

Euler: *Institutiones calculi differentialis* (1755):
První skutečná učebnice, z níž později všichni vychází.

18. Století: Leonhard Euler (1707–1783)

Počátek století: nová metoda na chatrných základech.
Není jasné, co přesně *je* **infinitesimální** veličina.
Navíc není ani jasné, jak přesně se s ní může pracovat.
Zakladatelé sami chyby (skoro) nedělali. Ostatní občas ano.

Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **Funkce** jako centrální pojem MA; značení $f(x)$;
- opatrnost s konvergencí nekonečných řad;
- e, exponenciála, $e^{i\pi} = -1$ atd.

Konec století: velké množství výsledků v MA ...
... která stále stojí na chatrných základech.

2. Krize matematiky – její projevy

- Jean d'Alembert (1717–1783) – *Encyclopédie* – článek *différentiel*: derivace popsána jako **limita** diferenčních podílů. Článek *limite*: popis pojmu limity („proces“).
- Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
  Teorie analytických funkcí. Problém:
  Terminologie ⇒ („spojitá = analytická“) ⇒ (spoj. má der.)
- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857): $e^{-\frac{1}{x^2}}$ není analytická. Nebylo bráno v potaz.

Bylo známo, že MA má problémy. Potřeba upřesnit. Jak?

2. Krize matematiky – její projevy

- Jean d'Alembert (1717–1783) – *Encyclopédie* – článek *différentiel*: derivace popsána jako **limita** diferenčních podílů. Článek *limite*: popis pojmu limity („proces“).
- Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
  Teorie analytických funkcí. Problém:
  Terminologie $\Rightarrow$ („spojitá $=$ analytická“) $\Rightarrow$ (spoj. má der.)
- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857): $e^{-\frac{1}{x^2}}$ není analytická. Nebylo bráno v potaz.

Bylo známo, že MA má problémy. Potřeba upřesnit. Jak?

2. Krize matematiky – její projevy

- Jean d'Alembert (1717–1783) – *Encyclopédie* – článek *différentiel*: derivace popsána jako **limita** diferenčních podílů. Článek *limite*: popis pojmu limity („proces").
- Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
  Teorie analytických funkcí. Problém:
  Terminologie $\Rightarrow$ („spojitá $=$ analytická") $\Rightarrow$ (spoj. má der.)
- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857): $e^{-\frac{1}{x^2}}$ není analytická. Nebylo bráno v potaz.

Bylo známo, že MA má problémy. Potřeba upřesnit. Jak?

2. Krize matematiky – její projevy

- Jean d'Alembert (1717–1783) – *Encyclopédie* – článek *différentiel*: derivace popsána jako **limita** diferenčních podílů. Článek *limite*: popis pojmu limity („proces").
- Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
  Teorie analytických funkcí. Problém:
  Terminologie $\Rightarrow$ („spojitá = analytická") $\Rightarrow$ (spoj. má der.)
- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857): $e^{-\frac{1}{x^2}}$ není analytická. Nebylo bráno v potaz.

Bylo známo, že MA má problémy. Potřeba upřesnit. Jak?

2. Krize matematiky – její projevy

- Jean d'Alembert (1717–1783) – *Encyclopédie* – článek *différentiel*: derivace popsána jako **limita** diferenčních podílů. Článek *limite*: popis pojmu limity („proces").
- Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
  Teorie analytických funkcí. Problém:
  Terminologie ⇒ („spojitá = analytická") ⇒ (spoj. má der.)
- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857): $e^{-\frac{1}{x^2}}$ není analytická.
  Nebylo bráno v potaz.

Bylo známo, že MA má problémy. Potřeba upřesnit. Jak?
Podat přesné **definice**.

2. Krize matematiky – její projevy

- Jean d'Alembert (1717–1783) – *Encyclopédie* – článek *différentiel*: derivace popsána jako **limita** diferenčních podílů. Článek *limite*: popis pojmu limity („proces").
- Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
  Teorie analytických funkcí. Problém:
  Terminologie $\Rightarrow$ („spojitá $=$ analytická") $\Rightarrow$ (spoj. má der.)
- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857): $e^{-\frac{1}{x^2}}$ není analytická. Nebylo bráno v potaz.

Bylo známo, že MA má problémy. Potřeba upřesnit. Jak?
Podat přesné **definice**. A **důkazy**.

Definice funkce

- Johann Bernoulli (1667–1748), počátek 18. stol: *Funkcí proměnné veličiny se nazývá kvantita sestavená libovolným způsobem z této veličiny a z konstant.*
- Euler, 1755: *Když nějaké kvantity závisejí na jiných tak, že při změně posledních se samy také mění, pak se první nazývají funkcemi druhých. Toto pojmenování má mimořádně širokou povahu, zahrne v sobě všechny možné způsoby, jakými lze jednu kvantitu určit pomocí jiných.*
- Sylvestre François Lacroix (1765–1843), 1797: *Každá veličina, která závisí od jedné nebo několika jiných veličin, se nazývá funkcí těch posledně jmenovaných, když známe nebo neznáme, jaké je nutno provést operace, abychom z nich první veličinu dostali.*
- atd.

Definice funkce

- Johann Bernoulli (1667–1748), počátek 18. stol: *Funkcí proměnné veličiny se nazývá kvantita sestavená libovolným způsobem z této veličiny a z konstant.*
- Euler, 1755: *Když nějaké kvantity závisejí na jiných tak, že při změně posledních se samy také mění, pak se první nazývají funkcemi druhých. Toto pojmenování má mimořádně širokou povahu, zahrne v sobě všechny možné způsoby, jakými lze jednu kvantitu určit pomocí jiných.*
- Sylvestre François Lacroix (1765–1843), 1797: *Každá veličina, která závisí od jedné nebo několika jiných veličin, se nazývá funkcí těch posledně jmenovaných, když známe nebo neznáme, jaké je nutno provést operace, abychom z nich první veličinu dostali.*
- atd.

Definice funkce

- Johann Bernoulli (1667–1748), počátek 18. stol: *Funkcí proměnné veličiny se nazývá kvantita sestavená libovolným způsobem z této veličiny a z konstant.*
- Euler, 1755: *Když nějaké kvantity závisejí na jiných tak, že při změně posledních se samy také mění, pak se první nazývají funkcemi druhých. Toto pojmenování má mimořádně širokou povahu, zahrne v sobě všechny možné způsoby, jakými lze jednu kvantitu určit pomocí jiných.*
- Sylvestre François Lacroix (1765–1843), 1797: *Každá veličina, která závisí od jedné nebo několika jiných veličin, se nazývá funkcí těch posledně jmenovaných, když známe nebo neznáme, jaké je nutno provést operace, abychom z nich první veličinu dostali.*
- atd.

Definice funkce

- Johann Bernoulli (1667–1748), počátek 18. stol: *Funkcí proměnné veličiny se nazývá kvantita sestavená libovolným způsobem z této veličiny a z konstant.*
- Euler, 1755: *Když nějaké kvantity závisejí na jiných tak, že při změně posledních se samy také mění, pak se první nazývají funkcemi druhých. Toto pojmenování má mimořádně širokou povahu, zahrne v sobě všechny možné způsoby, jakými lze jednu kvantitu určit pomocí jiných.*
- Sylvestre François Lacroix (1765–1843), 1797: *Každá veličina, která závisí od jedné nebo několika jiných veličin, se nazývá funkcí těch posledně jmenovaných, když známe nebo neznáme, jaké je nutno provést operace, abychom z nich první veličinu dostali.*
- atd.

„Spojitost formy“

V 18. století přetrvalo – navzdory obecné definici – strnulé pojetí pojmu funkce.

„Spojitost formy funkce“

Pro MA jsou vhodné funkce, pro jejichž zadání slouží stálý analytický výraz. (Tj. jeden vzorec.) Nespojitost je tedy chápána jako jistá nestálost popisu vzorcem.

Zaměňováno s dnešním pojmem spojitosti.
Nejasnosti ukončil až P.G. Lejeune Dirichlet (1805–1859) v roce 1837 podáním celkem dobré definice (moderní) spojitosti funkce. Jistě i pod vlivem Fouriera.

„Spojitost formy"

V 18. století přetrvalo – navzdory obecné definici – strnulé pojetí pojmu funkce.

„Spojitost formy funkce"

Pro MA jsou vhodné funkce, pro jejichž zadání slouží stálý analytický výraz. (Tj. jeden vzorec.) Nespojitost je tedy chápána jako jistá nestálost popisu vzorcem.

Zaměňováno s dnešním pojmem spojitosti.
Nejasnosti ukončil až P.G. Lejeune Dirichlet (1805–1859) v roce 1837 podáním celkem dobré definice (moderní) spojitosti funkce. Jistě i pod vlivem Fouriera.

„Spojitost formy"

V 18. století přetrvalo – navzdory obecné definici – strnulé pojetí pojmu funkce.

„Spojitost formy funkce"

Pro MA jsou vhodné funkce, pro jejichž zadání slouží stálý analytický výraz. (Tj. jeden vzorec.) Nespojitost je tedy chápána jako jistá nestálost popisu vzorcem.

Zaměňováno s dnešním pojmem spojitosti.
Nejasnosti ukončil až P.G. Lejeune Dirichlet (1805–1859) v roce 1837 podáním celkem dobré definice (moderní) spojitosti funkce. Jistě i pod vlivem Fouriera.

„Spojitost formy“

V 18. století přetrvalo – navzdory obecné definici – strnulé pojetí pojmu funkce.

„Spojitost formy funkce“

Pro MA jsou vhodné funkce, pro jejichž zadání slouží stálý analytický výraz. (Tj. jeden vzorec.) Nespojitost je tedy chápána jako jistá nestálost popisu vzorcem.

Zaměňováno s dnešním pojmem spojitosti.
Nejasnosti ukončil až P.G. Lejeune Dirichlet (1805–1859) v roce 1837 podáním celkem dobré definice (moderní) spojitosti funkce.
Jistě i pod vlivem Fouriera.

„Spojitost formy“

V 18. století přetrvalo – navzdory obecné definici – strnulé pojetí pojmu funkce.

„Spojitost formy funkce“

Pro MA jsou vhodné funkce, pro jejichž zadání slouží stálý analytický výraz. (Tj. jeden vzorec.) Nespojitost je tedy chápána jako jistá nestálost popisu vzorcem.

Zaměňováno s dnešním pojmem spojitosti.
Nejasnosti ukončil až P.G. Lejeune Dirichlet (1805–1859) v roce 1837 podáním celkem dobré definice (moderní) spojitosti funkce. Jistě i pod vlivem Fouriera.

Trigonometrické řady – spojitá forma & nespojitý součet

J. Fourier (1768–1830): *Theorie analytique de la chaleur* (1822)
Zkoumal vedení tepla, a tedy i Laplaceovu rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in [0,\pi] \times [0,\infty),$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad \text{a} \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

Dospěl k řešení tvaru

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Tento vzorec byl „OK“, ale mohl dát nespojitý součet.

Trigonometrické řady – spojitá forma & nespojitý součet

J. Fourier (1768–1830): *Theorie analytique de la chaleur* (1822)
Zkoumal vedení tepla, a tedy i Laplaceovu rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \infty),$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{a} \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Dospěl k řešení tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Tento vzorec byl „OK“, ale mohl dát nespojitý součet.

Trigonometrické řady – spojitá forma & nespojitý součet

J. Fourier (1768–1830): *Theorie analytique de la chaleur* (1822)
Zkoumal vedení tepla, a tedy i Laplaceovu rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \infty),$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{a} \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Dospěl k řešení tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Tento vzorec byl „OK“, ale mohl dát nespojitý součet.

Trigonometrické řady – spojitá forma & nespojitý součet

J. Fourier (1768–1830): *Theorie analytique de la chaleur* (1822)
Zkoumal vedení tepla, a tedy i Laplaceovu rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \infty),$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{a} \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Dospěl k řešení tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Tento vzorec byl „OK“, ale mohl dát nespojitý součet.

Trigonometrické řady – spojitá forma & nespojitý součet

J. Fourier (1768–1830): *Theorie analytique de la chaleur* (1822)
Zkoumal vedení tepla, a tedy i Laplaceovu rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \infty),$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{a} \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Dospěl k řešení tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Tento vzorec byl „OK“, ale mohl dát nespojitý součet.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – limita

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821): Učebnice MA založená na správné (slovní) definici **limity**.
- „Usmířil infinitesimály s přesností": infin. $\equiv$ veličina $\to 0$.
- Zcela jasná definice **derivace** (pomocí limity).

Slavná chyba! (Protipříklad: N.H. Abel, 1826)

Nechť jsou $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spoj. a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konečná na $\mathbb{R}$. Pak f je spojitá na $\mathbb{R}$.

- Cauchy to opravil r. 1853. Přesně popsal pojem **stejnoměrné konvergence**.
- Do obecného povědomí prosadil až Karl Weierstrass (1815–1897): **aritmetizace MA** („ε-δ gymnastika").

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – limita

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821): Učebnice MA založená na správné (slovní) definici **limity**.
- „Usmířil infinitesimály s přesností": infin. $\equiv$ veličina $\to 0$.
- Zcela jasná definice **derivace** (pomocí limity).

Slavná chyba! (Protipříklad: N.H. Abel, 1826)

Nechť jsou $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spoj. a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konečná na $\mathbb{R}$. Pak f je spojitá na $\mathbb{R}$.

- Cauchy to opravil r. 1853. Přesně popsal pojem **stejnoměrné konvergence**.
- Do obecného povědomí prosadil až Karl Weierstrass (1815–1897): **aritmetizace MA** („ε-δ gymnastika").

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – limita

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821): Učebnice MA založená na správné (slovní) definici **limity**.
- „Usmířil infinitesimály s přesností“: infin. $\equiv$ veličina $\to 0$.
- Zcela jasná definice **derivace** (pomocí limity).

Slavná chyba! (Protipříklad: N.H. Abel, 1826)

Nechť jsou $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spoj. a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konečná na $\mathbb{R}$. Pak f je spojitá na $\mathbb{R}$.

- Cauchy to opravil r. 1853. Přesně popsal pojem **stejnoměrné konvergence**.
- Do obecného povědomí prosadil až Karl Weierstrass (1815–1897): **aritmetizace MA** („ε-δ gymnastika“).

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – limita

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821): Učebnice MA založená na správné (slovní) definici **limity**.
- „Usmířil infinitesimály s přesností“: infin. $\equiv$ veličina $\to 0$.
- Zcela jasná definice **derivace** (pomocí limity).

Slavná chyba! (Protipříklad: N.H. Abel, 1826)

Nechť jsou $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spoj. a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konečná na $\mathbb{R}$. Pak f je spojitá na $\mathbb{R}$.

- Cauchy to opravil r. 1853. Přesně popsal pojem **stejnoměrné konvergence**.
- Do obecného povědomí prosadil až Karl Weierstrass (1815–1897): **aritmetizace MA** („ε-δ gymnastika“).

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – limita

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821): Učebnice MA založená na správné (slovní) definici **limity**.
- „Usmířil infinitesimály s přesností“: infin. $\equiv$ veličina $\to 0$.
- Zcela jasná definice **derivace** (pomocí limity).

Slavná chyba! (Protipříklad: N.H. Abel, 1826)

Nechť jsou $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spoj. a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konečná na $\mathbb{R}$. Pak f je spojitá na $\mathbb{R}$.

- Cauchy to opravil r. 1853. Přesně popsal pojem **stejnoměrné konvergence**.
- Do obecného povědomí prosadil až Karl Weierstrass (1815–1897): **aritmetizace MA** („ε-δ gymnastika“).

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – limita

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821): Učebnice MA založená na správné (slovní) definici **limity**.
- „Usmířil infinitesimály s přesností": infin. $\equiv$ veličina $\to 0$.
- Zcela jasná definice **derivace** (pomocí limity).

Slavná chyba! (Protipříklad: N.H. Abel, 1826)

Nechť jsou $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spoj. a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konečná na $\mathbb{R}$. Pak f je spojitá na $\mathbb{R}$.

- Cauchy to opravil r. 1853. Přesně popsal pojem **stejnoměrné konvergence**.
- Do obecného povědomí prosadil až Karl Weierstrass (1815–1897): **aritmetizace MA** („ε-δ gymnastika").

Další chyby

- Přehazování limitních procesů bylo běžné. Ale:
- Jean-Gaston Darboux (1842–1917): Příklad nestejnoměrně konvergentní řady spoj. fcí se spojitým součtem.
- Pro tuto řadu navíc nelze přehodit sumu a integrál, tj.

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

André-Marie Ampère (1775–1836) – návaznost na Lagrange – 1806

Každá analytická funkce je diferencovatelná.

Tato věta platí. Ovšem kvůli nejasným definicím byla obecně interpretována jako tvrzení diferencovatelnosti libovolné spoj. fce.

Další chyby

- Přehazování limitních procesů bylo běžné. Ale:
- Jean-Gaston Darboux (1842–1917): Příklad nestejnoměrně konvergentní řady spoj. fcí se spojitým součtem.
- Pro tuto řadu navíc nelze přehodit sumu a integrál, tj.

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

André-Marie Ampère (1775–1836) – návaznost na Lagrange – 1806

Každá analytická funkce je diferencovatelná.

Tato věta platí. Ovšem kvůli nejasným definicím byla obecně interpretována jako tvrzení diferencovatelnosti libovolné spoj. fce.

Další chyby

- Přehazování limitních procesů bylo běžné. Ale:
- Jean-Gaston Darboux (1842–1917): Příklad nestejnoměrně konvergentní řady spoj. fcí se spojitým součtem.
- Pro tuto řadu navíc nelze přehodit sumu a integrál, tj.

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

André-Marie Ampère (1775–1836) – návaznost na Lagrange – 1806

Každá analytická funkce je diferencovatelná.

Tato věta platí. Ovšem kvůli nejasným definicím byla obecně interpretována jako tvrzení diferencovatelnosti libovolné spoj. fce.

Další chyby

- Přehazování limitních procesů bylo běžné. Ale:
- Jean-Gaston Darboux (1842–1917): Příklad nestejnoměrně konvergentní řady spoj. fcí se spojitým součtem.
- Pro tuto řadu navíc nelze přehodit sumu a integrál, tj.

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n .$$

André-Marie Ampère (1775–1836) – návaznost na Lagrange – 1806

Každá analytická funkce je diferencovatelná.

Tato věta platí. Ovšem kvůli nejasným definicím byla obecně interpretována jako tvrzení diferencovatelnosti libovolné spoj. fce.

Osnova

Weierstrassovo monstrum: Zde $a = 7, b = \frac{5}{6}$

Karl Weierstrass (1815–1897)

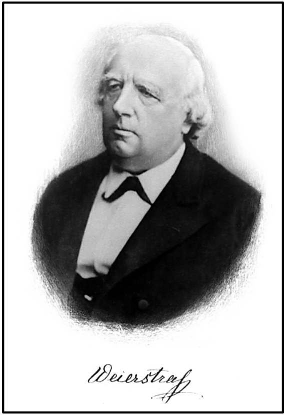
Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *monstrum*, pokud je spojitá a zároveň nemá v žádném bodě konečnou derivaci.

Věta (1872)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ je liché, $b \in (0,1)$ a platí $a \cdot b > 1 + \frac{2\pi}{3}$. Pak W je monstrum.

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$



Weierstrassovo monstrum: Zde $a = 7$, $b = \frac{5}{6}$

Karl Weierstrass (1815–1897)

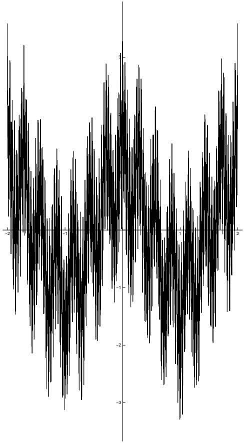
Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *monstrum*, pokud je spojitá a zároveň nemá v žádném bodě konečnou derivaci.

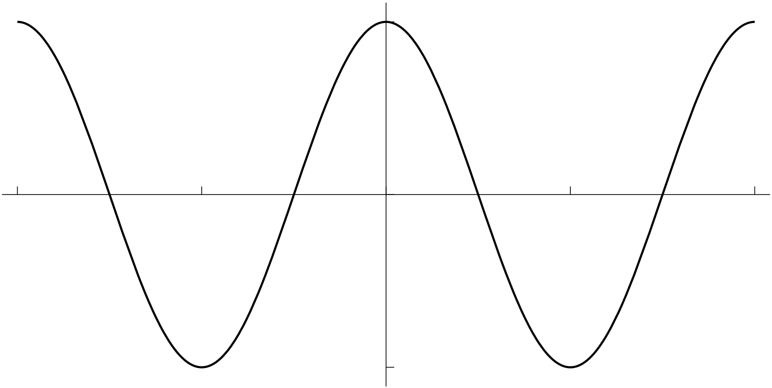
Věta (1872)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ *je liché,* $b \in (0,1)$ *a platí* $a \cdot b > 1 + \frac{2\pi}{3}$. *Pak* W *je monstrum.*

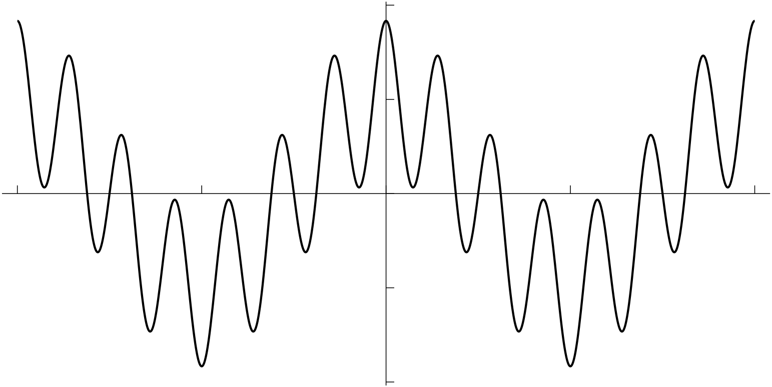
$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$



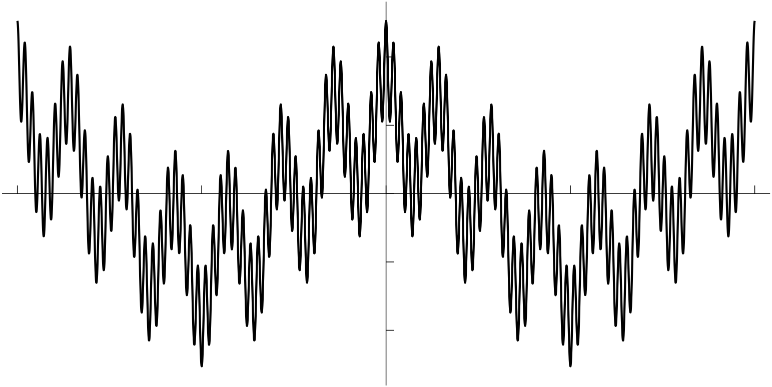
První tři iterace



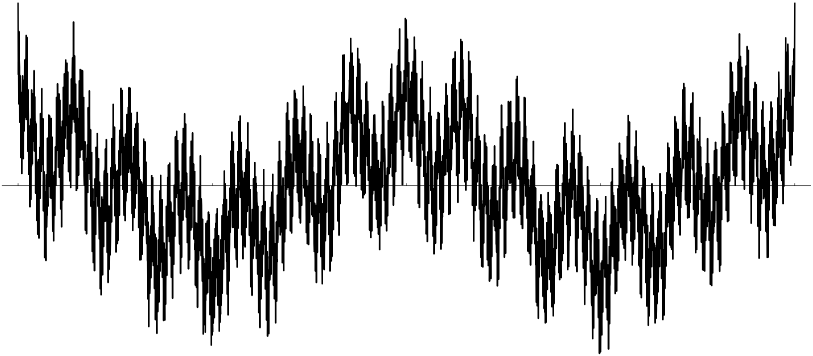
První tři iterace



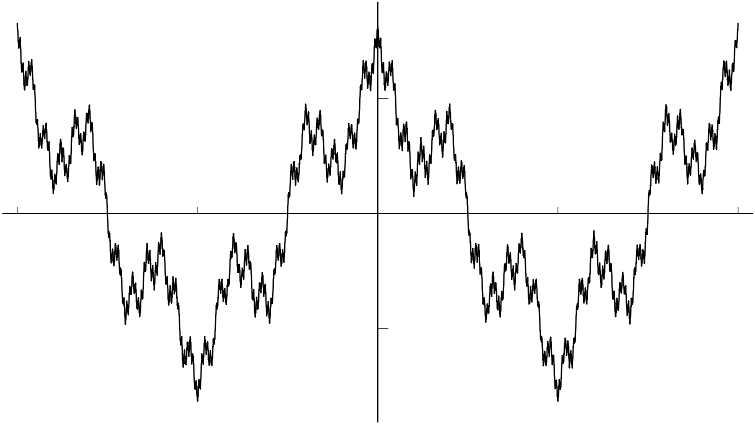
První tři iterace



$a = 7, b = \frac{5}{6}$ — $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$



$a = 5, b = \frac{2}{5}$ — $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$



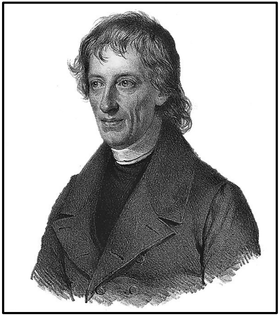
Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

- Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl úplně dokázat, že to je monstrum. Je z jeho nepubl. knihy *Functionenlehre* z roku 1834.
- Zabýval se zpřesňováním důkazů i definic v matematice, principy myšlení.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $f(0) < 0 < f(1)$. *Pak existuje bod* $x_0 \in (0,1)$, *pro nějž* $f(x_0) = 0$.



Bolzano

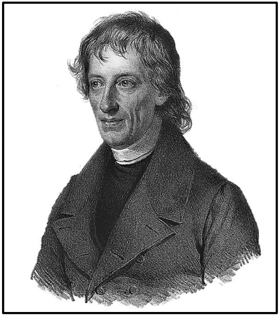
Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

- Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl úplně dokázat, že to je monstrum. Je z jeho nepubl. knihy *Functionenlehre* z roku 1834.
- Zabýval se zpřesňováním důkazů i definic v matematice, principy myšlení.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $f(0) < 0 < f(1)$*. Pak existuje bod* $x_0 \in (0, 1)$*, pro nějž* $f(x_0) = 0$*.*



BOLZANO

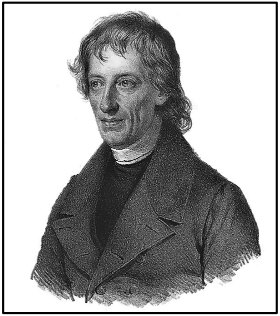
Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

- Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl úplně dokázat, že to je monstrum. Je z jeho nepubl. knihy *Functionenlehre* z roku 1834.
- Zabýval se zpřesňováním důkazů i definic v matematice, principy myšlení.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f: \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $f(0) < 0 < f(1)$. *Pak existuje bod* $x_0 \in (0,1)$, *pro nějž* $f(x_0) = 0$.



BOLZANO

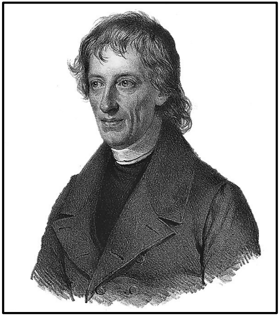
Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

- Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl úplně dokázat, že to je monstrum. Je z jeho nepubl. knihy *Functionenlehre* z roku 1834.
- Zabýval se zpřesňováním důkazů i definic v matematice, principy myšlení.

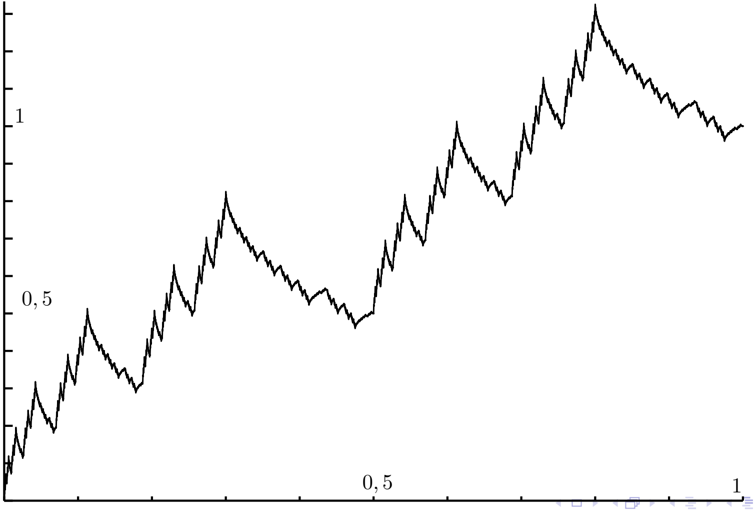
Věta (Bolzanova)

Nechť $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $f(0) < 0 < f(1)$. *Pak existuje bod* $x_0 \in (0,1)$, *pro nějž* $f(x_0) = 0$.



BOLZANO

Bolzanova funkce (1834)



Jsou monstra singulární případy?

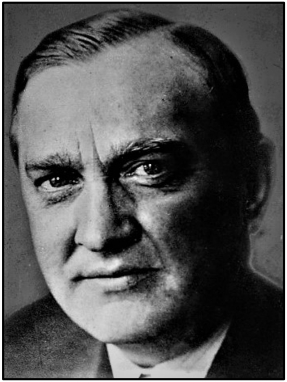
Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina“ spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina“? Je potřeba naučit se nějak „měřit“ velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.



Banach

Jsou monstra singulární případy?

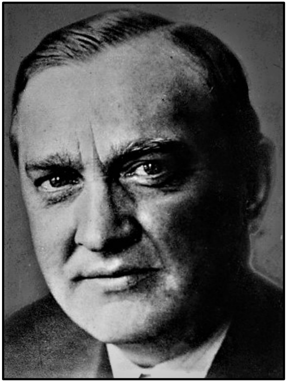
Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina" spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina"? Je potřeba naučit se nějak „měřit" velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.



BANACH

Jsou monstra singulární případy?

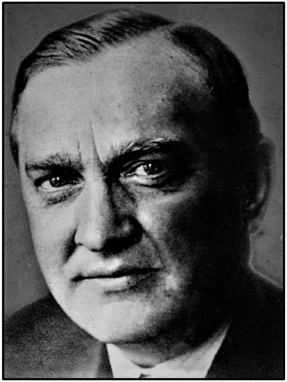
Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina" spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina"? Je potřeba naučit se nějak „měřit" velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.



BANACH

Jsou monstra singulární případy?

Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

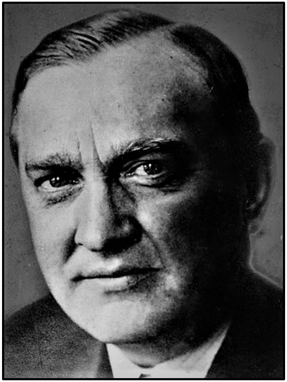
Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina“ spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina“? Je potřeba naučit se nějak „měřit“ velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.

Pro naši intuici velká rána.



BANACH

René-Louis Baire (1874–1932)

Baireova věta

Buď X úplný metrický prostor a $G_n \subseteq X$ otevřené husté.
Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$ (dokonce hustá v X).

Alternativní formulace používá množiny 1. kategorie:

Definice

Buď X MP. Pak $F \subseteq X$ je *řídká*, pokud $X \setminus \overline{F}$ je hustá v X.
Množina $M \subseteq X$ je *1. kategorie*, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou řídké.

Baireova věta (2. formulace)

Úplný MP X není 1. kategorie v sobě.

René-Louis Baire (1874–1932)

Baireova věta

Buď X úplný metrický prostor a $G_n \subseteq X$ otevřené husté.
Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$ (dokonce hustá v X).

Alternativní formulace používá množiny 1. kategorie:

Definice

Buď X MP. Pak $F \subseteq X$ je *řídká*, pokud $X \setminus \overline{F}$ je hustá v X.
Množina $M \subseteq X$ je *1. kategorie*, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou řídké.

Baireova věta (2. formulace)

Úplný MP X není 1. kategorie v sobě.

René-Louis Baire (1874–1932)

Baireova věta

Buď X úplný metrický prostor a $G_n \subseteq X$ otevřené husté.
Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$ (dokonce hustá v X).

Alternativní formulace používá množiny 1. kategorie:

Definice

Buď X MP. Pak $F \subseteq X$ je *řídká*, pokud $X \setminus \overline{F}$ je hustá v X.
Množina $M \subseteq X$ je *1. kategorie*, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou řídké.

Baireova věta (2. formulace)

Úplný MP X není 1. kategorie v sobě.

René-Louis Baire (1874–1932)

Baireova věta

Buď X úplný metrický prostor a $G_n \subseteq X$ otevřené husté. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$ (dokonce hustá v X).

Alternativní formulace používá množiny 1. kategorie:

Definice

Buď X MP. Pak $F \subseteq X$ je *řídká*, pokud $X \setminus \overline{F}$ je hustá v X. Množina $M \subseteq X$ je *1. kategorie*, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou řídké.

Baireova věta (2. formulace)

Úplný MP X není 1. kategorie v sobě.

René-Louis Baire (1874–1932)

Baireova věta

Buď X úplný metrický prostor a $G_n \subseteq X$ otevřené husté.
Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$ (dokonce hustá v X).

Alternativní formulace používá množiny 1. kategorie:

Definice

Buď X MP. Pak $F \subseteq X$ je *řídká*, pokud $X \setminus \overline{F}$ je hustá v X.
Množina $M \subseteq X$ je *1. kategorie*, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou řídké.

Baireova věta (2. formulace)

Úplný MP X není 1. kategorie v sobě.

Věta

Existuje spojitá $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.*

Důkaz. Pracujeme v úplném MP $C[0,1]$ s maximovou normou: $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Položíme

$$S_n = \{f \in C[0,1]\colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|\}$$

a dokážeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

a. S_n je uzavřená;
b. doplněk S_n je hustý;
c. pokud pro nějaké $x \in [0,1]$ existuje $f'(x)$, pak $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

První dva body dávají, že S_n jsou řídké. Podle Baireovy věty tedy

$$C[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Věta

Existuje spojitá $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.*

Důkaz. Pracujeme v úplném MP $C[0,1]$ s maximovou normou: $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Položíme

$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y)-f(x)| \leqslant n|y-x|\}$

a dokážeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

- a S_n je uzavřená;
- b doplněk S_n je hustý;
- c pokud pro nějaké $x \in [0,1]$ existuje $f'(x)$, pak $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

První dva body dávají, že S_n jsou řídké. Podle Baireovy věty tedy

$$C[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Věta

Existuje spojitá $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.*

Důkaz. Pracujeme v úplném MP $C[0,1]$ s maximovou normou: $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Položíme

$$S_n = \{f \in C[0,1]\colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y)-f(x)| \leqslant n|y-x|\}$$

a dokážeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

a) S_n je uzavřená;
b) doplněk S_n je hustý;
c) pokud pro nějaké $x \in [0,1]$ existuje $f'(x)$, pak $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

První dva body dávají, že S_n jsou řídké. Podle Baireovy věty tedy

$$C[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Věta

Existuje spojitá $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.*

Důkaz. Pracujeme v úplném MP $C[0,1]$ s maximovou normou: $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Položíme

$$S_n = \{f \in C[0,1]\colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y)-f(x)| \leqslant n|y-x|\}$$

a dokážeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

a. S_n je uzavřená;
b. doplněk S_n je hustý;
c. pokud pro nějaké $x \in [0,1]$ existuje $f'(x)$, pak $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

První dva body dávají, že S_n jsou řídké. Podle Baireovy věty tedy

$$C[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Věta

Existuje spojitá $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.

Důkaz. Pracujeme v úplném MP $C[0,1]$ s maximovou normou: $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Položíme

$$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$$

a dokážeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

- a S_n je uzavřená;
- b doplněk S_n je hustý;
- c pokud pro nějaké $x \in [0,1]$ existuje $f'(x)$, pak $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

První dva body dávají, že S_n jsou řídké. Podle Baireovy věty tedy

$$C[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Věta

Existuje spojitá $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.

Důkaz. Pracujeme v úplném MP $C[0,1]$ s maximovou normou: $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Položíme

$$S_n = \{f \in C[0,1]\colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y)-f(x)| \leqslant n|y-x|\}$$

a dokážeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

- a S_n je uzavřená;
- b doplněk S_n je hustý;
- c pokud pro nějaké $x \in [0,1]$ existuje $f'(x)$, pak $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

První dva body dávají, že S_n jsou řídké. Podle Baireovy věty tedy

$$C[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Věta

Existuje spojitá $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.*

Důkaz. Pracujeme v úplném MP $C[0,1]$ s maximovou normou: $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Položíme

$$S_n = \{f \in C[0,1]\colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y)-f(x)| \leqslant n|y-x|\}$$

a dokážeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

- a) S_n je uzavřená;
- b) doplněk S_n je hustý;
- c) pokud pro nějaké $x \in [0,1]$ existuje $f'(x)$, pak $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

První dva body dávají, že S_n jsou řídké. Podle Baireovy věty tedy

$$C[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Ad a) S_n je uzavřená.

$$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$$

S_n je uzavřená: Nechť $f_k \in S_n$, $f_k \to f$. Najdeme $x_k \in [0,1]$, že

$$(\forall y \in [0,1])\ |f_k(y) - f_k(x)| \leqslant n|y - x_k|.$$

BŮNO $x_k \to x \in [0,1]$. Nyní pro libovolné $y \in [0,1]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f_k(y) - f_k(x_k)| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant n|y - x_k| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\to n|y - x|. \end{aligned}$$

Dotáváme $|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|$, takže $f \in S_n$, a S_n je uzavřená.

Ad a) S_n je uzavřená.

$$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$$

S_n je uzavřená: Nechť $f_k \in S_n$, $f_k \to f$. Najdeme $x_k \in [0,1]$, že

$$(\forall y \in [0,1])\ |f_k(y) - f_k(x)| \leqslant n|y - x_k|.$$

BŮNO $x_k \to x \in [0,1]$. Nyní pro libovolné $y \in [0,1]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f_k(y) - f_k(x_k)| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant n|y - x_k| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\to n|y - x|. \end{aligned}$$

Dotáváme $|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|$, takže $f \in S_n$, a S_n je uzavřená.

Ad a) S_n je uzavřená.

$$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$$

S_n je uzavřená: Nechť $f_k \in S_n$, $f_k \to f$. Najdeme $x_k \in [0,1]$, že

$$(\forall y \in [0,1])\ |f_k(y) - f_k(x)| \leqslant n|y - x_k|.$$

BŮNO $x_k \to x \in [0,1]$. Nyní pro libovolné $y \in [0,1]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f_k(y) - f_k(x_k)| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant n|y - x_k| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\to n|y - x|. \end{aligned}$$

Dotáváme $|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|$, takže $f \in S_n$, a S_n je uzavřená.

Ad a) S_n je uzavřená.

$$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$$

S_n je uzavřená: Nechť $f_k \in S_n$, $f_k \to f$. Najdeme $x_k \in [0,1]$, že

$$(\forall y \in [0,1])\ |f_k(y) - f_k(x)| \leqslant n|y - x_k|.$$

BŮNO $x_k \to x \in [0,1]$. Nyní pro libovolné $y \in [0,1]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f_k(y) - f_k(x_k)| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant n|y - x_k| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\to n|y - x|. \end{aligned}$$

Dotáváme $|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|$, takže $f \in S_n$, a S_n je uzavřená.

Ad a) S_n je uzavřená.

$S_n = \{f \in C[0,1]\colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$

S_n je uzavřená: Nechť $f_k \in S_n$, $f_k \to f$. Najdeme $x_k \in [0,1]$, že

$$(\forall y \in [0,1])\ |f_k(y) - f_k(x)| \leqslant n|y - x_k|.$$

BŮNO $x_k \to x \in [0,1]$. Nyní pro libovolné $y \in [0,1]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f_k(y) - f_k(x_k)| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant n|y - x_k| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\to n|y - x|. \end{aligned}$$

Dotáváme $|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|$, takže $f \in S_n$, a S_n je uzavřená.

Ad a) S_n je uzavřená.

$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1]) \ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$

S_n je uzavřená: Nechť $f_k \in S_n$, $f_k \to f$. Najdeme $x_k \in [0,1]$, že

$$(\forall y \in [0,1]) \ |f_k(y) - f_k(x)| \leqslant n|y - x_k|.$$

BŮNO $x_k \to x \in [0,1]$. Nyní pro libovolné $y \in [0,1]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f_k(y) - f_k(x_k)| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant n|y - x_k| + 2\|f - f_k\| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\to n|y - x|. \end{aligned}$$

Dotáváme $|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|$, takže $f \in S_n$, a S_n je uzavřená.

Ad b) $C[0,1] \setminus S_n$ je hustá.

$$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1]) \; |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$$

Nechť $g \in C[0,1]$ a $0 < \varepsilon < 1$. Máme ukázat $B(g,\varepsilon) \setminus S_n \neq \emptyset$.
Z kompaktnosti: g je stejnoměrně spojitá, a tedy najdeme $\delta > 0$:

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nyní zvolme $k \in \mathbb{N}$, $k > \max(1/\delta, 4n/\varepsilon)$ a definujme

$$f(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2} \sin(2k\pi x). \quad (\text{Pak } f \in B(g,\varepsilon).)$$

Snadné: Pro libovolné x existuje $y \in [0,1]$, $|y - x| \leqslant 1/k$, že $|\sin(2k\pi y) - \sin(2k\pi x)| = 1$. Pak ale

$$|f(y) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - |g(y) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} > \frac{n}{k} \geqslant n|y - x|.$$

Tedy $f \in B(g,\varepsilon) \setminus S_n$, jak jsme chtěli.

Ad b) $C[0,1] \setminus S_n$ je hustá.

$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|\}$

Nechť $g \in C[0,1]$ a $0 < \varepsilon < 1$. Máme ukázat $B(g,\varepsilon) \setminus S_n \neq \emptyset$.

Z kompaktnosti: g je stejnoměrně spojitá, a tedy najdeme $\delta > 0$:

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nyní zvolme $k \in \mathbb{N}$, $k > \max(1/\delta, 4n/\varepsilon)$ a definujme

$$f(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\sin(2k\pi x). \quad (\text{Pak } f \in B(g,\varepsilon).)$$

Snadné: Pro libovolné x existuje $y \in [0,1]$, $|y-x| \leqslant 1/k$, že $|\sin(2k\pi y) - \sin(2k\pi x)| = 1$. Pak ale

$$|f(y) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - |g(y) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} > \frac{n}{k} \geqslant n|y-x|.$$

Tedy $f \in B(g,\varepsilon) \setminus S_n$, jak jsme chtěli.

Ad b) $C[0,1] \setminus S_n$ je hustá.

$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|\}$

Nechť $g \in C[0,1]$ a $0 < \varepsilon < 1$. Máme ukázat $B(g,\varepsilon) \setminus S_n \neq \emptyset$.
Z kompaktnosti: g je stejnoměrně spojitá, a tedy najdeme $\delta > 0$:

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nyní zvolme $k \in \mathbb{N}$, $k > \max(1/\delta, 4n/\varepsilon)$ a definujme

$$f(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\sin(2k\pi x). \quad (\text{Pak } f \in B(g,\varepsilon).)$$

Snadné: Pro libovolné x existuje $y \in [0,1]$, $|y-x| \leqslant 1/k$, že $|\sin(2k\pi y) - \sin(2k\pi x)| = 1$. Pak ale

$$|f(y) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - |g(y) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} > \frac{n}{k} \geqslant n|y-x|.$$

Tedy $f \in B(g,\varepsilon) \setminus S_n$, jak jsme chtěli.

Ad b) $C[0,1] \setminus S_n$ je hustá.

$S_n = \{f \in C[0,1]\colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$

Nechť $g \in C[0,1]$ a $0 < \varepsilon < 1$. Máme ukázat $B(g,\varepsilon) \setminus S_n \neq \emptyset$.
Z kompaktnosti: g je stejnoměrně spojitá, a tedy najdeme $\delta > 0$:

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nyní zvolme $k \in \mathbb{N}$, $k > \max(1/\delta, 4n/\varepsilon)$ a definujme

$$f(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\sin(2k\pi x). \quad (\text{Pak } f \in B(g,\varepsilon).)$$

Snadné: Pro libovolné x existuje $y \in [0,1]$, $|y - x| \leqslant 1/k$, že $|\sin(2k\pi y) - \sin(2k\pi x)| = 1$. Pak ale

$$|f(y) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - |g(y) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} > \frac{n}{k} \geqslant n|y - x|.$$

Tedy $f \in B(g,\varepsilon) \setminus S_n$, jak jsme chtěli.

Ad b) $C[0,1] \setminus S_n$ je hustá.

$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$

Nechť $g \in C[0,1]$ a $0 < \varepsilon < 1$. Máme ukázat $B(g,\varepsilon) \setminus S_n \neq \emptyset$.
Z kompaktnosti: g je stejnoměrně spojitá, a tedy najdeme $\delta > 0$:

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nyní zvolme $k \in \mathbb{N}$, $k > \max(1/\delta, 4n/\varepsilon)$ a definujme

$$f(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\sin(2k\pi x). \quad (\text{Pak } f \in B(g,\varepsilon).)$$

Snadné: Pro libovolné x existuje $y \in [0,1]$, $|y - x| \leqslant 1/k$, že $|\sin(2k\pi y) - \sin(2k\pi x)| = 1$. Pak ale

$$|f(y) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - |g(y) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} > \frac{n}{k} \geqslant n|y - x|.$$

Tedy $f \in B(g,\varepsilon) \setminus S_n$, jak jsme chtěli.

Ad b) $C[0,1] \setminus S_n$ je hustá.

$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$

Nechť $g \in C[0,1]$ a $0 < \varepsilon < 1$. Máme ukázat $B(g,\varepsilon) \setminus S_n \neq \emptyset$.
Z kompaktnosti: g je stejnoměrně spojitá, a tedy najdeme $\delta > 0$:

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nyní zvolme $k \in \mathbb{N}$, $k > \max(1/\delta, 4n/\varepsilon)$ a definujme

$$f(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\sin(2k\pi x). \quad (\text{Pak } f \in B(g,\varepsilon).)$$

Snadné: Pro libovolné x existuje $y \in [0,1]$, $|y - x| \leqslant 1/k$, že $|\sin(2k\pi y) - \sin(2k\pi x)| = 1$. Pak ale

$$|f(y) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - |g(y) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} > \frac{n}{k} \geqslant n|y - x|.$$

Tedy $f \in B(g,\varepsilon) \setminus S_n$, jak jsme chtěli.

Ad b) $C[0,1] \setminus S_n$ je hustá.

$S_n = \{f \in C[0,1] \colon (\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1])\ |f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|\}$

Nechť $g \in C[0,1]$ a $0 < \varepsilon < 1$. Máme ukázat $B(g,\varepsilon) \setminus S_n \neq \emptyset$.
Z kompaktnosti: g je stejnoměrně spojitá, a tedy najdeme $\delta > 0$:

$$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nyní zvolme $k \in \mathbb{N}$, $k > \max(1/\delta, 4n/\varepsilon)$ a definujme

$$f(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\sin(2k\pi x). \quad (\text{Pak } f \in B(g,\varepsilon).)$$

Snadné: Pro libovolné x existuje $y \in [0,1]$, $|y-x| \leqslant 1/k$, že $|\sin(2k\pi y) - \sin(2k\pi x)| = 1$. Pak ale

$$|f(y) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - |g(y) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} > \frac{n}{k} \geqslant n|y-x|.$$

Tedy $f \in B(g,\varepsilon) \setminus S_n$, jak jsme chtěli.

Ad c) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow$ $f \in S_n$ pro nějaké n.

Nechť ex. $f'(x)$. Najdi $\delta > 0$ tak, že $\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y} - f'(x)\right| < 1$, kdykoliv $0 < |y-x| < \delta$.

Zvolme $n \geqslant \max\left(1 + |f'(x)|, \frac{2\|f\|}{\delta}\right)$. Pro $y \in [0,1]$ ukážeme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|.$$

To je jasné pro $y = x$. Pro $0 < |y-x| < \delta$ máme

$$|f(y)-f(x)| \leqslant |y-x| \cdot \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| + |y-x| \cdot |f'(x)|$$
$$\leqslant \left(1 + |f'(x)|\right) |y-x| \leqslant n|y-x|.$$

Pokud naopak $|y-x| \geqslant \delta$, potom

$$|f(y)-f(x)| \leqslant 2\|f\| = \frac{2\|f\|}{\delta}\delta \leqslant \frac{2\|f\|}{\delta}|y-x| \leqslant n|y-x|. \quad \square$$

Ad c) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow$ $f \in S_n$ pro nějaké n.

Nechť ex. $f'(x)$. Najdi $\delta > 0$ tak, že $\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y} - f'(x)\right| < 1$, kdykoliv $0 < |y-x| < \delta$.

Zvolme $n \geqslant \max\left(1 + |f'(x)|, \frac{2\|f\|}{\delta}\right)$. Pro $y \in [0,1]$ ukážeme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|.$$

To je jasné pro $y = x$. Pro $0 < |y-x| < \delta$ máme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |y-x| \cdot \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| + |y-x| \cdot |f'(x)|$$
$$\leqslant \left(1 + |f'(x)|\right) |y-x| \leqslant n|y-x|.$$

Pokud naopak $|y-x| \geqslant \delta$, potom

$$|f(y) - f(x)| \leqslant 2\|f\| = \frac{2\|f\|}{\delta}\delta \leqslant \frac{2\|f\|}{\delta}|y-x| \leqslant n|y-x|. \quad \square$$

Ad c) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow$ $f \in S_n$ pro nějaké n.

Nechť ex. $f'(x)$. Najdi $\delta > 0$ tak, že $\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y} - f'(x)\right| < 1$, kdykoliv $0 < |y-x| < \delta$.

Zvolme $n \geqslant \max\left(1 + |f'(x)|, \frac{2\|f\|}{\delta}\right)$. Pro $y \in [0,1]$ ukážeme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|.$$

To je jasné pro $y = x$. Pro $0 < |y-x| < \delta$ máme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |y-x| \cdot \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| + |y-x| \cdot |f'(x)|$$
$$\leqslant \left(1 + |f'(x)|\right) |y-x| \leqslant n|y-x|.$$

Pokud naopak $|y-x| \geqslant \delta$, potom

$$|f(y) - f(x)| \leqslant 2\|f\| = \frac{2\|f\|}{\delta}\delta \leqslant \frac{2\|f\|}{\delta}|y-x| \leqslant n|y-x|. \quad \square$$

Ad c) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow$ $f \in S_n$ pro nějaké n.

Nechť ex. $f'(x)$. Najdi $\delta > 0$ tak, že $\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y} - f'(x)\right| < 1$, kdykoliv $0 < |y-x| < \delta$.

Zvolme $n \geqslant \max\left(1 + |f'(x)|, \frac{2\|f\|}{\delta}\right)$. Pro $y \in [0,1]$ ukážeme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|.$$

To je jasné pro $y = x$. Pro $0 < |y-x| < \delta$ máme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |y-x| \cdot \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| + |y-x| \cdot |f'(x)|$$

$$\leqslant \left(1 + |f'(x)|\right) |y-x| \leqslant n|y-x|.$$

Pokud naopak $|y-x| \geqslant \delta$, potom

$$|f(y) - f(x)| \leqslant 2\|f\| = \frac{2\|f\|}{\delta}\delta \leqslant \frac{2\|f\|}{\delta}|y-x| \leqslant n|y-x|. \qquad \square$$

Ad c) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow$ $f \in S_n$ pro nějaké n.

Nechť ex. $f'(x)$. Najdi $\delta > 0$ tak, že $\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y} - f'(x)\right| < 1$, kdykoliv $0 < |y-x| < \delta$.

Zvolme $n \geqslant \max\left(1 + |f'(x)|, \frac{2\|f\|}{\delta}\right)$. Pro $y \in [0,1]$ ukážeme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|.$$

To je jasné pro $y = x$. Pro $0 < |y-x| < \delta$ máme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |y-x| \cdot \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| + |y-x| \cdot |f'(x)|$$
$$\leqslant \left(1 + |f'(x)|\right) |y-x| \leqslant n|y-x|.$$

Pokud naopak $|y-x| \geqslant \delta$, potom

$$|f(y) - f(x)| \leqslant 2\|f\| = \frac{2\|f\|}{\delta}\delta \leqslant \frac{2\|f\|}{\delta}|y-x| \leqslant n|y-x|. \quad \square$$

Ad c) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow$ $f \in S_n$ pro nějaké n.

Nechť ex. $f'(x)$. Najdi $\delta > 0$ tak, že $\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y} - f'(x)\right| < 1$, kdykoliv $0 < |y-x| < \delta$.

Zvolme $n \geqslant \max\left(1 + |f'(x)|, \frac{2\|f\|}{\delta}\right)$. Pro $y \in [0,1]$ ukážeme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|.$$

To je jasné pro $y = x$. Pro $0 < |y-x| < \delta$ máme

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |y-x| \cdot \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| + |y-x| \cdot |f'(x)|$$
$$\leqslant \left(1 + |f'(x)|\right) |y-x| \leqslant n|y-x|.$$

Pokud naopak $|y-x| \geqslant \delta$, potom

$$|f(y) - f(x)| \leqslant 2\|f\| = \frac{2\|f\|}{\delta}\delta \leqslant \frac{2\|f\|}{\delta}|y-x| \leqslant n|y-x|. \qquad \square$$

Diferencovatelné monstrum

Též známé jako köpckeovská funkce.

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve diferencovatelné monstrum, pokud má ve všech bodech vlastní derivaci a není na žádném intervalu monotónní.

Fakt: Je-li f diferencovatelné monstrum, pak

- Množiny $\{x\colon f'(x) > 0\}$ a $\{x\colon f'(x) < 0\}$ jsou obě husté.
- f' není v žádném bodě spojitá.

Existenci dif. monstra lze dokázat pomocí Baireovy věty podobně, jako jsme to provedli pro (běžné) monstrum. (Clifford Weil)
Je ovšem potřeba pracovat v jistém úplném **podprostoru** $C[0,1]$.

Diferencovatelné monstrum

Též známé jako köpckeovská funkce.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve diferencovatelné monstrum, pokud má ve všech bodech vlastní derivaci a není na žádném intervalu monotónní.

Fakt: Je-li f diferencovatelné monstrum, pak

- Množiny $\{x : f'(x) > 0\}$ a $\{x : f'(x) < 0\}$ jsou obě husté.
- f' není v žádném bodě spojitá.

Existenci dif. monstra lze dokázat pomocí Baireovy věty podobně, jako jsme to provedli pro (běžné) monstrum. (Clifford Weil) Je ovšem potřeba pracovat v jistém úplném **podprostoru** $C[0, 1]$.

Diferencovatelné monstrum

Též známé jako köpckeovská funkce.

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve diferencovatelné monstrum, pokud má ve všech bodech vlastní derivaci a není na žádném intervalu monotónní.

Fakt: Je-li f diferencovatelné monstrum, pak

- Množiny $\{x\colon f'(x) > 0\}$ a $\{x\colon f'(x) < 0\}$ jsou obě husté.
- f' není v žádném bodě spojitá.

Existenci dif. monstra lze dokázat pomocí Baireovy věty podobně, jako jsme to provedli pro (běžné) monstrum. (Clifford Weil)
Je ovšem potřeba pracovat v jistém úplném **podprostoru** $C[0,1]$.

Diferencovatelné monstrum

Též známé jako köpckeovská funkce.

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve diferencovatelné monstrum, pokud má ve všech bodech vlastní derivaci a není na žádném intervalu monotónní.

Fakt: Je-li f diferencovatelné monstrum, pak

- Množiny $\{x\colon f'(x) > 0\}$ a $\{x\colon f'(x) < 0\}$ jsou obě husté.
- f' není v žádném bodě spojitá.

Existenci dif. monstra lze dokázat pomocí Baireovy věty podobně, jako jsme to provedli pro (běžné) monstrum. (Clifford Weil)
Je ovšem potřeba pracovat v jistém úplném **podprostoru** $C[0,1]$.

Diferencovatelné monstrum

Též známé jako köpckeovská funkce.

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve diferencovatelné monstrum, pokud má ve všech bodech vlastní derivaci a není na žádném intervalu monotónní.

Fakt: Je-li f diferencovatelné monstrum, pak

- Množiny $\{x\colon f'(x) > 0\}$ a $\{x\colon f'(x) < 0\}$ jsou obě husté.
- f' není v žádném bodě spojitá.

Existenci dif. monstra lze dokázat pomocí Baireovy věty podobně, jako jsme to provedli pro (běžné) monstrum. (Clifford Weil)

Je ovšem potřeba pracovat v jistém úplném **podprostoru** $C[0,1]$.

Diferencovatelné monstrum

Též známé jako köpckeovská funkce.

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve diferencovatelné monstrum, pokud má ve všech bodech vlastní derivaci a není na žádném intervalu monotónní.

Fakt: Je-li f diferencovatelné monstrum, pak

- Množiny $\{x\colon f'(x) > 0\}$ a $\{x\colon f'(x) < 0\}$ jsou obě husté.
- f' není v žádném bodě spojitá.

Existenci dif. monstra lze dokázat pomocí Baireovy věty podobně, jako jsme to provedli pro (běžné) monstrum. (Clifford Weil)
Je ovšem potřeba pracovat v jistém úplném **podprostoru** $C[0,1]$.

Diferencovatelné monstrum

Též známé jako köpckeovská funkce.

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve diferencovatelné monstrum, pokud má ve všech bodech vlastní derivaci a není na žádném intervalu monotónní.

Fakt: Je-li f diferencovatelné monstrum, pak

- Množiny $\{x\colon f'(x) > 0\}$ a $\{x\colon f'(x) < 0\}$ jsou obě husté.
- f' není v žádném bodě spojitá.

Existenci dif. monstra lze dokázat pomocí Baireovy věty podobně, jako jsme to provedli pro (běžné) monstrum. (Clifford Weil)
Je ovšem potřeba pracovat v jistém úplném **podprostoru** $C[0,1]$.

Děkuji za pozornost!

Osnova

Pompeiova funkce (1906)

Definice

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x - a_n)^{\frac{1}{3}},$$

kde $A_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ a $\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá v intervalu $[0,1]$.

Pak $\mathcal{P}$ je rostoucí a diferencovatelná se zdola omezenou derivací. Navíc $\forall n \in \mathbb{N}\colon \mathcal{P}'(a_n) = \infty$.

Snadno se odovodí: $p := \mathcal{P}^{-1}$ je rostoucí, diferencovatelná, má omezenou derivaci a na husté množině má derivaci 0. BÚNO $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pompeiova funkce (1906)

Definice

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x - a_n)^{\frac{1}{3}},$$

kde $A_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ a $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá v intervalu $[0, 1]$.

Pak $\mathcal{P}$ je rostoucí a diferencovatelná se zdola omezenou derivací.
Navíc $\forall n \in \mathbb{N} \colon \mathcal{P}'(a_n) = \infty$.
Snadno se odovodí: $p := \mathcal{P}^{-1}$ je rostoucí, diferencovatelná, má omezenou derivaci a na husté množině má derivaci 0.
BÚNO $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pompeiova funkce (1906)

Definice

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x - a_n)^{\frac{1}{3}},$$

kde $A_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ a $\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá v intervalu $[0, 1]$.

Pak $\mathcal{P}$ je rostoucí a diferencovatelná se zdola omezenou derivací. Navíc $\forall n \in \mathbb{N}\colon \mathcal{P}'(a_n) = \infty$.

Snadno se odovodí: $p := \mathcal{P}^{-1}$ je rostoucí, diferencovatelná, má omezenou derivaci a na husté množině má derivaci 0.
BÚNO $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pompeiova funkce (1906)

Definice

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x - a_n)^{\frac{1}{3}},$$

kde $A_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ a $\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá v intervalu $[0,1]$.

Pak $\mathcal{P}$ je rostoucí a diferencovatelná se zdola omezenou derivací. Navíc $\forall n \in \mathbb{N} \colon \mathcal{P}'(a_n) = \infty$.

Snadno se odovodí: $p := \mathcal{P}^{-1}$ je rostoucí, diferencovatelná, má omezenou derivaci a na husté množině má derivaci 0.

BÚNO $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pompeiova funkce (1906)

Definice

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x - a_n)^{\frac{1}{3}},$$

kde $A_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ a $\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá v intervalu $[0, 1]$.

Pak $\mathcal{P}$ je rostoucí a diferencovatelná se zdola omezenou derivací. Navíc $\forall n \in \mathbb{N}\colon \mathcal{P}'(a_n) = \infty$.

Snadno se odovodí: $p := \mathcal{P}^{-1}$ je rostoucí, diferencovatelná, má omezenou derivaci a na husté množině má derivaci 0.
BÚNO $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Prostory derivací

Definujme následující množiny funkcí:

$$D := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon\ f \text{ omez. a má PF na } \mathbb{R}\};$$
$$D_0 := \left\{f \in D \colon\ \{x \colon f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\right\}.$$

- Metrika $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ dělá z D úplný MP.
- $D_0 \subseteq D$ je uzavřená podmnožina. Proto i (D_0, ρ_∞) je úplný.
- Navíc $D_0 \neq \{0\}$, protože $p \in D_0$, kde $p = \mathcal{P}^{-1}$.
- D_0 je vektorový prostor (uz. na sčítání a násobení skalárem).

Prostory derivací

Definujme následující množiny funkcí:

$$D := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon\ f \text{ omez. a má PF na } \mathbb{R}\};$$
$$D_0 := \big\{f \in D \colon\ \{x \colon f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\big\}.$$

- Metrika $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ dělá z D úplný MP.
- $D_0 \subseteq D$ je uzavřená podmnožina. Proto i (D_0, ρ_∞) je úplný.
- Navíc $D_0 \neq \{0\}$, protože $p \in D_0$, kde $p = \mathcal{P}^{-1}$.
- D_0 je vektorový prostor (uz. na sčítání a násobení skalárem).

Prostory derivací

Definujme následující množiny funkcí:

$$D := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ f \text{ omez. a má PF na } \mathbb{R}\};$$
$$D_0 := \big\{f \in D\colon\ \{x\colon f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\big\}.$$

- Metrika $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ dělá z D úplný MP.
- $D_0 \subseteq D$ je uzavřená podmnožina. Proto i (D_0, ρ_∞) je úplný.
- Navíc $D_0 \neq \{0\}$, protože $p \in D_0$, kde $p = \mathcal{P}^{-1}$.
- D_0 je vektorový prostor (uz. na sčítání a násobení skalárem).

Prostory derivací

Definujme následující množiny funkcí:

$$D := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ f \text{ omez. a má PF na } \mathbb{R}\};$$
$$D_0 := \left\{f \in D\colon\ \{x\colon f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\right\}.$$

- Metrika $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ dělá z D úplný MP.
- $D_0 \subseteq D$ je uzavřená podmnožina. Proto i (D_0, ρ_∞) je úplný.
- Navíc $D_0 \neq \{0\}$, protože $p \in D_0$, kde $p = \mathcal{P}^{-1}$.
- D_0 je vektorový prostor (uz. na sčítání a násobení skalárem).

Prostory derivací

Definujme následující množiny funkcí:

$$D := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \ f \text{ omez. a má PF na } \mathbb{R}\};$$
$$D_0 := \big\{f \in D: \ \{x: \ f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\big\}.$$

- Metrika $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ dělá z D úplný MP.
- $D_0 \subseteq D$ je uzavřená podmnožina. Proto i (D_0, ρ_∞) je úplný.
- Navíc $D_0 \neq \{0\}$, protože $p \in D_0$, kde $p = \mathcal{P}^{-1}$.
- D_0 je vektorový prostor (uz. na sčítání a násobení skalárem).

Prostory derivací

Definujme následující množiny funkcí:

$$D := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ f \text{ omez. a má PF na } \mathbb{R}\};$$
$$D_0 := \big\{f \in D\colon\ \{x\colon f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\big\}.$$

- Metrika $\rho_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ dělá z D úplný MP.
- $D_0 \subseteq D$ je uzavřená podmnožina. Proto i (D_0, ρ_∞) je úplný.
- Navíc $D_0 \neq \{0\}$, protože $p \in D_0$, kde $p = \mathcal{P}^{-1}$.
- D_0 je vektorový prostor (uz. na sčítání a násobení skalárem).

Diferencovatelné monstrum existuje

Věta (Clifford Weil (1976))

Nechť $E = \{f \in D_0\colon \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ interval}\colon f \text{ nemění zn. na } I\}$.
Pak E *je první kategorie v* D_0, *a tedy* $D_0 \setminus E \neq \emptyset$. *Libovolný prvek* $D_0 \setminus E$ *je diferencovatelné monstrum.*

Buď $\{I_n\}$ posloupnost všech intervalů $I_n = (a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$. Položme

$$E_n := \{f \in D_0\colon\ f \geqslant 0 \text{ na } I_n\}, \quad F_n := \{f \in D_0\colon\ f \leqslant 0 \text{ na } I_n\}.$$

Stačí ukázat, že E_n, F_n jsou řídké.

Diferencovatelné monstrum existuje

Věta (Clifford Weil (1976))

Nechť $E = \{f \in D_0 \colon\ \exists I \subseteq \mathbb{R}$ *interval*$\colon f$ *nemění zn. na* $I\}$.
Pak E *je první kategorie v* D_0, *a tedy* $D_0 \setminus E \neq \emptyset$. *Libovolný prvek* $D_0 \setminus E$ *je diferencovatelné monstrum.*

Buď $\{I_n\}$ posloupnost všech intervalů $I_n = (a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$. Položme

$$E_n := \{f \in D_0 \colon\ f \geqslant 0 \text{ na } I_n\}, \quad F_n := \{f \in D_0 \colon\ f \leqslant 0 \text{ na } I_n\}.$$

Stačí ukázat, že E_n, F_n jsou řídké.

Diferencovatelné monstrum existuje

Věta (Clifford Weil (1976))

Nechť $E = \{f \in D_0 \colon \exists I \subseteq \mathbb{R}$ *interval*: f *nemění zn. na* $I\}$.
Pak E *je první kategorie v* D_0, *a tedy* $D_0 \setminus E \neq \emptyset$. *Libovolný prvek* $D_0 \setminus E$ *je diferencovatelné monstrum.*

Buď $\{I_n\}$ posloupnost všech intervalů $I_n = (a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$. Položme

$$E_n := \{f \in D_0 \colon\ f \geqslant 0 \text{ na } I_n\}, \quad F_n := \{f \in D_0 \colon\ f \leqslant 0 \text{ na } I_n\}.$$

Stačí ukázat, že E_n, F_n jsou řídké.

Diferencovatelné monstrum existuje

Věta (Clifford Weil (1976))

Nechť $E = \{f \in D_0\colon\ \exists I \subseteq \mathbb{R}$ *interval*$\colon f$ *nemění zn. na* $I\}$.
Pak E *je první kategorie v* D_0, *a tedy* $D_0 \setminus E \neq \emptyset$. *Libovolný prvek* $D_0 \setminus E$ *je diferencovatelné monstrum.*

Buď $\{I_n\}$ posloupnost všech intervalů $I_n = (a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$. Položme

$$E_n := \{f \in D_0\colon\ f \geqslant 0 \text{ na } I_n\}, \quad F_n := \{f \in D_0\colon\ f \leqslant 0 \text{ na } I_n\}.$$

Stačí ukázat, že E_n, F_n jsou řídké.