John Horton Conway (1937-2020)

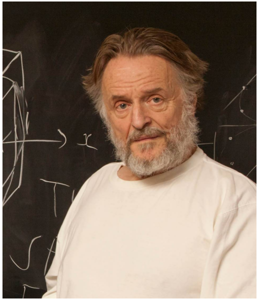
Petr Stehlík

OSMA Ostrava

9. 5. 2023

speciální díky **Václav Vopravil**

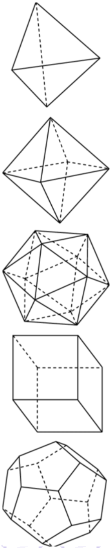
Obsah



1. Pár slov o životě
2. Nadreálná čísla
3. Kombinatorické hry
4. Hra života
5. Závěr

Pár slov o životě - rodinné pozadí

- * 26. prosince 1937 v Liverpoolu,
- „nevzdělaní“ rodiče Cyril a Agnes,
- dvě starší sestry Joan a Sylvia,
- zázračné dítě - 2^n ve čtyř letech,
- osamělý a nešťastný v kolektivu,
- 1955 - první článek pro SŠ časopis o platónských tělesech



Cambridge

- 1956 - nastupuje na Cambridge,
- podprůměrné výsledky, ale jasná originalita
- sociálně šťastný,
- Winnie (Water Initiated Numerical Number Integrating Engine),

Doktorské studium - páté mocniny

Školitel Harlod Davenport (1907-69), mj. předseda Londýnské matematické společnosti

> *Měl jsem dva vynikající studenty — Alana Bakera, kterému jsem zadal problém a on přišel se skvělým řešením a Conwaye, kterému jsem zadal problém a on přišel se skvělým řešením úplně jiné úlohy.*

Vlastní práce

- 1770 - Joseph Louis Lagrange - každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet nejvýše čtyř druhých mocnin celých čísel, např. $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
- 1771 - Edward Warring - hypotéza, každé přirozené číslo k lze vyjádřit jako součet $g(k)$ k-tých mocnin
- 1909 - David Hilbert dokazuje Warringovu hypotézu

Doktorské studium - páté mocniny

Conway ve své práci dokázal

$$g(5) = 37.$$

Každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet nejvýše 37 pátých mocnin a 223 je jediné, pro které je jich potřeba právě 37.
Davenport i Conway nebyli s výsledkemm spokojeni, nepublikován. Výsledek připisován Chenovi Jingrunovi (1964)

Zmatené postdoktorské studium - šedesátá léta

- nesystematičnost,
- „nevhodné“ problémy - hry, uzly x teorie čísel
- „odvádění pozornosti“ mladých studentů
- 1961 - svatba Eileen Howeová, čtyři dcery

Zlaté období kolem roku 1970

Nejvýznamější objevy, mj.

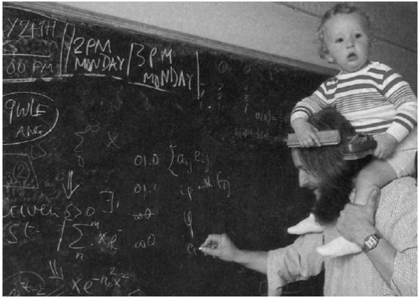
- nadreálná čísla,
- kombinatorické hry,
- hra života,
- symetrie 24rozměrné Leechovy mřížky a klasifikace sporadických grup.

Náhle se stává oblíbeným matematikem

- láska k jednoduchosti,
- úsměvné názvy,
- odkrývání neočekávaných souvislostí,
- „dělám jen to, co mě baví“.

Slavný matematik

- obrovské pracovní vytížení,
- daň v soukromém životě - rozvod
- druhé manželství Larissa Queenová - 2 synové
- 1987 - Princeton
- 1992 - druhý rozvod, infarkt,
- 1993 - pokus o sebevraždu
- 2001 - třetí manželství, sedmé dítě
- 2003 - druhý infarkt
- stále stejný režim na Princetonu
- 2018 - pečovatelský dům,
- 11. 4. 2020 - covid



Nadreálná čísla - pozadí

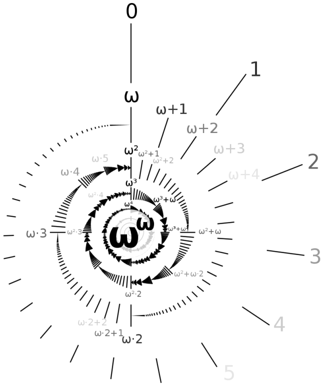
Dedekindovy řezy

- dvojice množin (L, R), $L \cup R = \mathbb{Q}$
- L nemá maximum,
- $1 = (\{x \in \mathbb{Q};\ x < 1\}, \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 1\})$
- $\sqrt{2} =$
  $(\{x \in \mathbb{Q};\ x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 < 2)\}, \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0 \wedge x^2 > 2\})$.

Cantorova kardinalita

- velikost množiny pomocí bijekce
- hypotéza kontinua - neexistence množiny mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$

Cantorova ordinální čísla



Nadreálná čísla - definice

Nadreálné číslo $x \equiv \{L|R\}$ je dvojice uspořádaných (dříve vytvořených nebo prázdných) množin nadreálných čísel takových, že neexistuje dvojice nadreálných čísel $x^L \in L$ a $x^R \in R$ splňující $x^R \leq x^L$.

Jsou-li $x \equiv \{X^L|X^R\}$ a $y \equiv \{Y^L|Y^R\}$ nadreálná čísla, potom platí $x \leq y$ právě tehdy, když neplatí $y \leq x^L$ ani $y^R \leq x$ pro žádné $x^L \in X^L$ a $y^R \in Y^R$.

Nadreálná čísla - příklady čísel a jejich narozenin

nultý den

$$0 \equiv \{\emptyset|\emptyset\}$$

první den

$$1 \equiv \{0|\emptyset\}, -1 \equiv \{\emptyset|0\}$$

druhý den

$$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2,$$

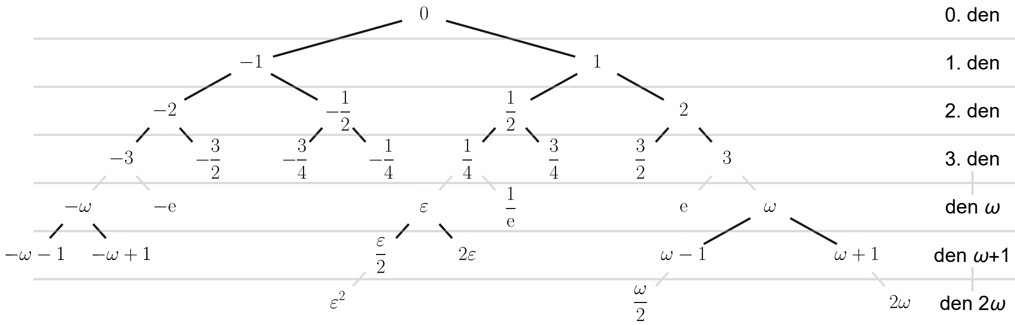
kde např.

$$\frac{1}{2} \equiv \{0|1\}, \quad 2 \equiv \{1|\}$$

Existují kombinace, které nejsou nadreálnými čísly $\{1|-1\}$, resp. ty které jsou již dříve definovanými čísly

$$\{-1|1\} = 0 \equiv \{|\}$$

Nadreálná čísla - schéma vzniku



Nadreálná čísla - poznámky

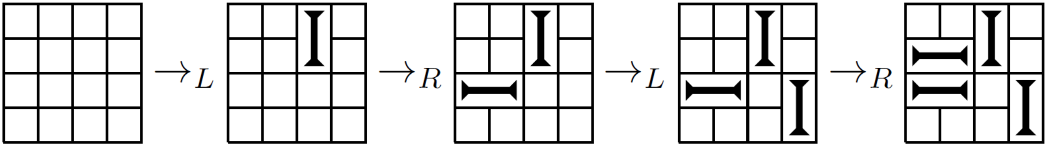
- kromě ordinálních čísel vznikají i infinitezimální (ε)
- vznikají nová nekonečná a neordiánlní čísla $\omega - 1$, $\frac{\omega}{2}$ apod., „zaplňující veškeré mezery“
- reprezenace není jednoznačná
- lze zavést sčítání a násobení se standardními vlastnostmi
- nadreálná čísla nejsou archimédovská $n\epsilon < x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$,
- nadreálná čísla netvoří množinu ale třídu, představme si $\{\mathrm{No}|\}$
- publikace 1972, název z roku 1974 - Donald E. Knuth,
- Kurt Gödel - „první úplná teorie nekonečných čísel“
- Martin Kruskal - diferenciální a integrální počet
- a to nejzajímavější na závěr - vznikly jako speciální případ kombinatorických her...

Kombinatorické hry

- speciální případ obecných her s nulovým součtem
- speciálně vždy pouze dva hráči
- vždy jeden vyhrává, či prohrává
- ohodnocování aktuálního stavu kombinatorických her - NIM 1930
- Conway vášnivým autorem nových her,
- zajímavá nesoutěživá povaha.

Kombinatorické hry - dominové dláždění (Domineering)

- hrací plocha - šachovnice, či její libovolná část
- levý hráč pokládá svislé kameny, pravý hráč vodorovné
- prohrává hráč, který nemůže položit svůj kámen



Kombinatorické hry - formální Conwayova definice

Pokud G označuje hru (aktuální konfiguraci hry), potom levý hráč může táhnout do množiny nových pozic G^L a pravý hráč do množiny nových pozic G^R, píšeme $G \equiv \{G^L | G^R\}$.

Je-li na tahu levý hráč a $G^L = \emptyset$, potom prohrává a pravý vyhrává a obráceně.

Kombinatorické hry - dominové dláždění a nadreálná čísla

Mnohé konfigurace lze identifikovat s nadreálnými čísly

Nultý den

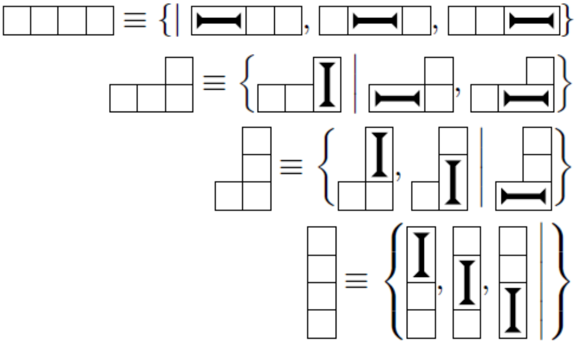
$$\square = \{|\} \equiv 0$$

První den

$$\square\square \equiv \{\,|\ \boxed{\longleftrightarrow}\,\} \equiv \{\,|\ 0\} \equiv -1, \qquad \begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array} \equiv \left\{\boxed{\updownarrow}\ \middle|\ \right\} \equiv \{0\ |\} \equiv 1$$

Kombinatorické hry - dominové dláždění a nadreálná čísla

Druhý den



$$\equiv \{\,|\, -1, 0, -1\} = \{\,|\, -1\} \equiv -2,$$

$$\equiv \{-1 \mid 1, 0\} = \{-1 \mid 0\} \equiv -\frac{1}{2},$$

$$\equiv \{-1, 0 \mid 1\} = \{0 \mid 1\} \equiv \frac{1}{2},$$

$$\equiv \{1, 0, 1 \,|\,\} = \{1 \,|\,\} \equiv 2.$$

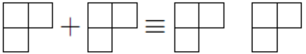
- kladná hodnota - levý hráč má vítěznou strategii
- záporná hodnota - pravý hráč má vítěznou strategii
- hodnota pak odpovídá počtu tahů, který má daný hráč navíc k dispozici

Kombinatorické hry - víc než čísla

Např. následující hra vzniká prvního dne, ale není číslem

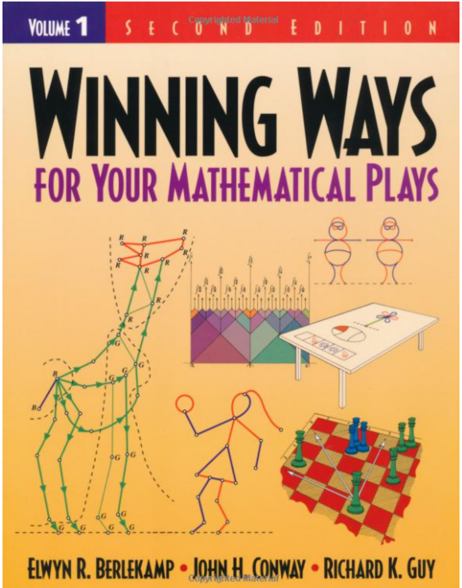
 $\equiv \{0 \mid 0\} \equiv *$

- Vítězná strategie pro začínajícího hráče.
- $* < G$ pro všechny kladné hry, $G < *$ pro všechny záporné hry
- součet

$* + * \equiv$  $= 0$

(nulová hra - naopak výhoda pro nezačínajícího hráče)

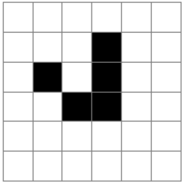
Kombinatorické hry - závěrečné poznámky



- 4 svazky, 1000 stran,
- Encyklopedie více než 100 her,
- organizovaný Berlekamp, živelný Conway a zklidňující Guy
- „Kdyby nebyl tak dobrý, netoleroval bych ho.“

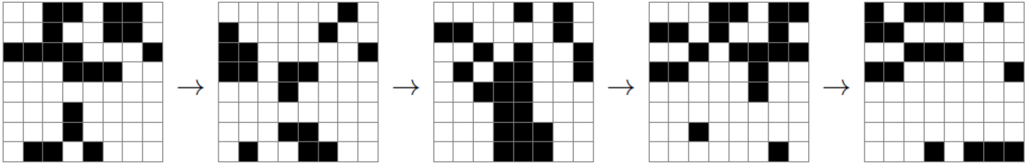
Hra života

- mřížka $\mathbb{Z}^2$, či její část,
- živé (černé) buňky, bílé (neživé) buňky



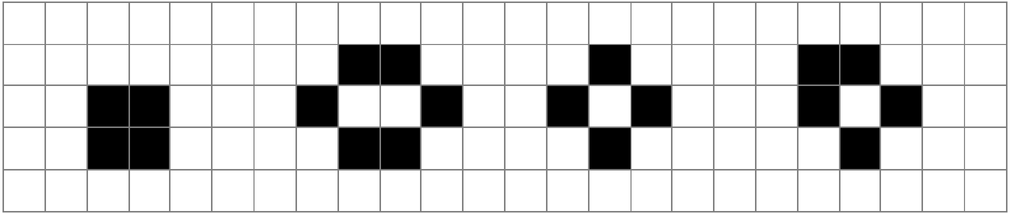
Diskrétní dynamický systém (dokonce buněčný automat):
Pravidlo 1 - narození. Je-li buňka v čase t mrtvá a právě tři sousedé jsou živí, poté je buňka v čase $t+1$ živá.
Pravidlo 2 - umírání. Je-li buňka v čase t živá a méně než dva sousedé jsou živí, je v čase $t+1$ mrtvá z důvodu nemožnosti se rozmnožit. Podobně je v čase $t+1$ mrtvá, jsou-li alespoň čtyři sousedé živí, a to z důvodu nedostatku potravy.
Pravidlo 3 - přežití. Je-li buňka v čase t živá a dva nebo tři sousedé jsou živí, poté je buňka i v čase $t+1$ živá.

Hra života - příklad dynamiky



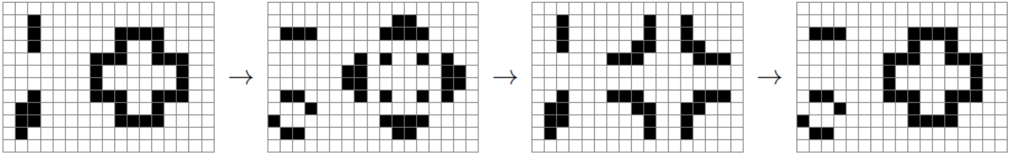
- jednoduchá pravidla, bohatá dynamika,
- každá snaha
- vše na prvních počítačích, či hrací desce s kameny dámy
- každá snaha o charakteristiku vedla k objevu nových struktur

Hra života - stacionární konfigurace - still lifes



blok, úl, vana, loďka...

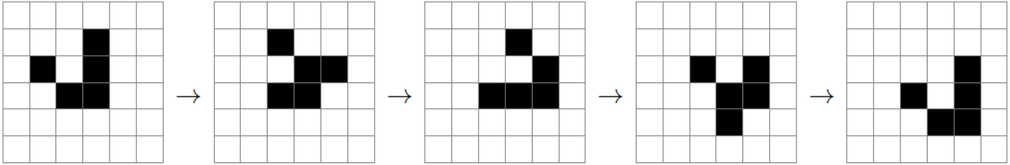
Hra života - periodické konfigurace - oscillators



- dvouperiodický blinker (mrkač)
- dvouperiodická ropucha
- tříperiodický kříž
- celkově šestiperiodická struktura

Hra života - cestující struktura

glider objevený Richardem Guyem (nedozvěděl se od Conwaye, ale od syna studujícího na Cambridge)



1970 - Martin Gardner, Scientific American - lavina zájmu

Gardner byl velkým obdivovatelem Conwaye - jeho dílo označoval za *„hluboké, průlomové, standardy bořící, originální, okouzlující, vtipné a okořeněné hraním s jazykem, za které by se nemusel stydět ani Lewis Carroll“*

Hra života - univerzalita

- Bill Gosper objevil tzv. glider gun, sturkturu, která periodicky rodí nové struktury,
- Conway následně prorokoval, že hra života je univerzální, ekvivalentní s Turingovým strojem,
- důkaz až z devadesátých let, Paul Rendell,
- kromě široké veřejnosti i vědecký zájem o buněčné automaty
  - Greenberg-Hastings,
  - agentní modely v matematické biologii, ekonomii,
  - teorie komplexních systémů
- Stephen Wolfram - charakteristika jednorozměrných buněčných automatů
  - „posedlost důkazy“ vs. „matematici nezakládají firmy a nejsou agresivní“
- Matthew Cook - univerzalita pravidla 110 z roku 2002.

Závěr - další oblasti

Zdaleka neúplný souhrn zájmu Conwaye

- sporadické grupy - přispěl k charakterizaci 26 sporadických grup a důkazu klasifikační věty
  - 3 nové grupy analýzou symetrií Leechovy mřížky,
  - název pro Monstrum, Atlas konečných grup.
- look-and say sequence

$$1, 11, 21, 1221, 111221, 312211, 13112221, \ldots$$

- teorie uzlů,
- klavírní problém - jaký největší objekt lze otočit okolo pravoúhelného rohu v chodbě dané šířky,
- autor nespočtu hádanek,
- atd.

Literatura

- Roberts, S.: Genius at play: the curious mind of John Horton Conway. Bloomsbury, 2015.
- speciální číslo Mathematical Intelligencer, vol. 43, issue 2, červen 2021
- Stehlík, P., Vopravil, V.: J. H. Conway (1937-2020), PMFA, 65 (3), 125–148, 2020.

Děkuji za pozornost.