Jak vylepshit matematiku

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA
VŠB-TUO Ostrava, 19.11. 2024

O čem je přednáška:

- představíme několik nápadů, jak vylepšit matematiku
- výklad je rozdělen do několika zastavení
- v řazení není téměř žádný systém

Otázky kolem vylepšování matematiky

- proč?
- jak?
- kdo?

Kdo vylepšuje nebo by měl vylepšovat matematiku

- vědci
- amatéři
- křankové (crank mathematicians)

Typická ukázka křankovy práce - zde Austin Wilkinson

WORLD'S MOST COMPLETE
MATHEMATICS LIBRARY
is the
KNOWLEDGE
for
use
in
ALL INDUSTRIES

It goes on:

ENOUGH MATHEMATICS TO DO
ANYTHING THAT CAN BE DONE

and concludes:

> The nation, that makes total use of this COMPLETE MATHEMATICS KNOWLEDGE, can stay ALWAYS AHEAD of all military rivals, and ALWAYS AHEAD of all competitors for the world markets.

Most of his sheets contain material similar to the following, copied from one headed "1 RELATIONS"

> MATTER changes continuously, from CUBES to SPHERES, and from SPHERES back to CUBES. PARTICLES from the breaking can be measured or weighed as 1, or as multiples or as fractions of 1. The 1 of a given formula can become 10^x or 10^{-x} in some other formula.
>
> In its ultimate analysis, 1 is the accumulation from $\pi - 3 = Z$ (See PURE WATER and GAS.); and 72 is less than 1:

Křankova argumentace

- Poslal jsem to na nejlepší matematická pracoviště světa a ještě mi v tom nikdo nenašel chybu!

x	x^3	d_1		**R**	
1	1				
2	8	7	$(1 \times 6) + 1 = 7$	x	$x^3 - x^2$ — d
3	27	19	$(3 \times 6) + 1 = 19$	3	$27 - 9 \quad = 18$ **A**
6	36	26	$H_3O^{+1} \quad = 19$	**F**	$H_2O = 18$

C

$(d_x = 3$ ——— $d_2 = 18)$ ———

H_2O is 3 ATOMS. H_2O WEIGHT = 18. H_2O DENSITY = 1.

	x	x^2	d_1	x	x^2		EVEN NUMBER SUM
	2	4		20	400	HYPOTENUSE	$2 + 4 + 6 + 8 = 20$
	5	25	21	21	441	29	$4 \times 5 = 20$
R	7	29		41	841	**D**	$(20 \times 10^3$ = EQUATOR/2 in kiloMETERS

$7^2 = 49$ ——— $49 - 3^2 = 40$ ——— $40/2 = 20$

x	x^2	d_1	x	x^2	**H**		
5	25		39	1521	HYPOTENUSE	$39 - 20 = 19$	$(19 - 18 = 1)$
8	64	39	80	6400	89	$80 - 21 = 59$	$59 + 1 = 60$
13	89		119	7921	**S**	$89 - 29 = 60$	**D**

(See 6 RELATIONS.).
13, 39, 40, 41, 42

$13^2 = 169$ ——— $169 - 3^2 = 160$ ——— $160/2 = 80$

$x = 3, 4$ ——— RIGHT TRIANGLE 7, 24, 25

CUBES

EARTH EQUATOR = 24000 MILES

	x	x^3	d_1	
	24	13824		
R	25	15625	1801	1801
$7^2 = 49$		29449		1800
				1

FIFTH POWER

x	x^5	SUM	d_1	d_2	d_3	d_4	**A**
5	3125						
6	7776	10901					
7	16807	24583	13682				
8	32768	49575	24992	11310			
9	59049	91817	42242	17250	5940		
10	100000	159049	67232	24990	7740	1800	
45	219525	335925	148148	53550	13680		

$(900/10^2 = 9)$ **F**

(45 is DIGIT SUM.). ———

Z dopisu pro 'Secretary to the Department of Mathematics'

AHMOSELITE
1600 B.C. Circa
PROJECT GAS LIGHT PURPLE 96–97

MAXIMUM $50.00 charge
ON US ARMY SURPLUS SUGGESTED

equation 40 x = y

function SS 20 left rotary cosine

OE_2 ZETA $7R_b$ DELTA x, y, Zero, C 2 E

++ 1, 2, 3, 4, inf

4 xk = Y SS = wave theory 4 xk = y

40 x = y magnitude of 60 20 = ionized molecule

magnitude of = 40 MAGNITUDE OF 60

Minus 40 plus 60

wave theory

amplitude −40, +60

ANNE BOLEYN CHEMICALS G.M.B.H. DUESSELDORF

Zastavení první: obvod elipsy

Úloha a její řešení

Spočtěte obvod elipsy dané (například) rovnicí

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Řešení vede na výpočet integrálu

$$s = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1+3x^2}{1-x^2}}\,dx,$$

případně, po (přirozené) substituci $x = \sin\theta$,

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\sin^2\theta}\,d\theta.$$

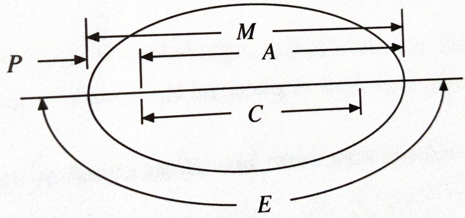
Poznámky

- Zdá se, že obvod elipsy není pro křanky tolik přitažlivý, jako například kvadratura kruhu, ač jsou si tyto úlohy velmi podobné.
- Důvodem je patrně to, že o kruzích slyšel ve škole každý, zatímco elipsám a zejména eliptickým integrálům se učitelé vyhýbají.
- Dalším důvodem je to, že kvadratura kruhu obsahuje magickou konstantu π, která u obvodu elipsy není vidět.
- Nicméně platí poučka:

  Kde je neřešitelná úloha, tam přijde křank s řešením.

'The first mathematical formula for circumference of ellipse' (J.W., undated)

$$\text{Circumference} = \frac{2C}{S}$$



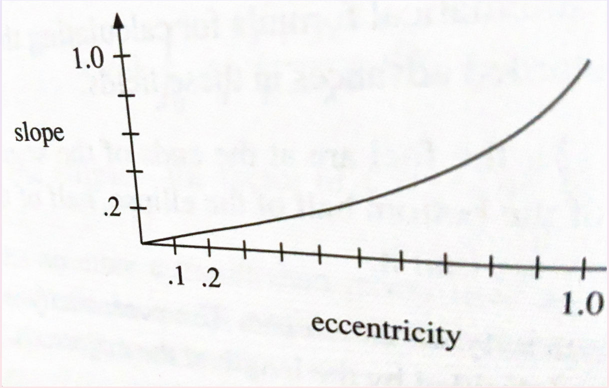
Argumentace křankova

- najdi excentricitu elipsy (zde $\frac{C}{M}$)
- z grafu závislosti *sklonu* na excentricitě urči *sklon elipsy*
- sklon je vzdálenost ohnisek dělená polovinou obvodu, tedy $S = \frac{C}{E}$
- vyděl vzdálenost mezi ohnisky sklonem
- vynásob výsledek dvěmi, vyjde obvod $= 2\frac{C}{S}$

A skutečnost:

$$\frac{2C}{C/E} = 2E.$$

‘The first mathematical formula for circumference of ellipse’ (J.W., undated)



Zásadní přínos křankův:

- objev sklonu elipsy
- sklon je pro excentricity menší než $\frac{1}{2}$ téměř lineární
- idea by se možná dala využít pro odvození vzorce pro dobrou aproximaci obvodu

Zastavení druhé: FLT

Poznámky

- FLT je double misnomer.
- Návrh na nový název: 'One of Fermat's Early Wrong Guesses'.

Postup pro $n = 2$

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y),$$

součin je kvadrát, jsou-li oba členy kvadráty,

$$z - y = b^2, \quad z + y = a^2,$$

tedy

$$z = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad x = ab.$$

Polož $a = 3$, $b = 1$, dostaneš $[x, y, z] = [3, 4, 5]$.

Polož $a = 27$, $b = 17$, dostaneš $[x, y, z] = [459, 220, 509]$, přičemž

$$459^2 + 220^2 = 210681 + 48400 = 259081 = 509^2.$$

Tentýž postup pro $n = 4$

Úprava

$$x^4 = z^4 - y^4 = (z^2 - y^2)(z^2 + y^2),$$

vede po úpravách na

$$4r^4 + s^4 = 4z^4,$$

což vzorec pro z nedává.

Vede ale k důkazu tvrzení pro $n = 4$ technikou infinite descent.

První kroky

- $n = 3$ 1770 Euler
- $n = 5$ 1825 Dirichlet, Legendre
- $n = 7$ 1839 Lamé
- hodně n 1847 Kummer

Klan fermatistů

- fermatistů je zdaleka nejvíce (srovnej Goldbach, dvojčata, Riemann, ...)
- jednou z příčin je (byla) pravděpodobně Wolfskehlova cena (1908)
- pokračovali by fermatisté v práci po 13.9.2007?
- filosofická teze: Paul Wolfskehl významně přispěl k utrpení lidstva, což asi nezamýšlel

Z dopisu dr. F. Schlichtinga (Göttingen), publikovaného v '13 Lectures on FLT', Paulo Ribenboim (1974)

- 'řešení' neberou konce
- první rok (1907–1908) jich bylo zaregistrováno 621
- nyní (1974): tři metry korespondence
- postup: absolutní nesmysl versus něco, co vypadá jako matematika
- speciální mladý asistent
- nabídky: 1000DM za 'druhou půlku řešení', 10% všech výnosů, až budu slavný ...
- výhrůžky: pošlu to do Ruska a přijdete o slávu ...
- občas se někdo objeví v Göttingenu osobně a trvá na pohovoru
- autoři většinou mají technické vzdělání a padlou kariéru
- na základě některých rukopisů byla diagnostikována těžká schizofrenie

Kam by v Göttingenu zařadili výtvor R.B. (1983)?

Lemma 1

Consider

$$\sum_{i=1}^{R-t} \binom{R}{i} (2x^{cm}U_1)^{R-i} (2^c U_2)^i \qquad \text{I}$$

and

$$\sum_{i=t}^{R-1} \binom{R}{i} (2^c U_3)^{R-i} (2^{cm} U_4)^i \qquad \text{II}$$

where

$$\mathcal{P}U_1 = \mathcal{P}U_2 = \mathcal{P}U_3 = \mathcal{P}U_4 = 0 \qquad (65)$$

and $\mathcal{P}_a$ means par of sigma-term for $i = a$.

For any t in I,

$$\Delta_1 = \mathcal{P}_{R-t-1} - \mathcal{P}_{R-t} \quad [R > 2]$$

$$= \mathcal{P}\binom{R}{t+1} + cm(t+1) + c(R-t-1) - \mathcal{P}\binom{R}{t} - cmt - c(R-t)$$

And for any t in II,

$$\Delta_2 = \mathcal{P}_{t+1} - \mathcal{P}_t$$

$$= \mathcal{P}\binom{R}{t+1} + c(R-t-1) + cm(t+1) - \mathcal{P}\binom{R}{t} - c(R-t) - cmt$$

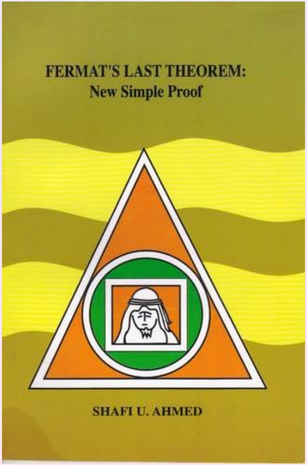
Thus, in either case,

$$\begin{aligned}\Delta \equiv \{cm - c + \mathcal{P}[(R-t)!] + \mathcal{P}(t!)\}\\ - \{\mathcal{P}[(R-t-1)!] + \mathcal{P}[(t+1)!]\} \equiv \mu_1 - \mu_2\\ \Rightarrow \Delta_{\min} = (\mu_1)_{\min} - (\mu_2)_{\max}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(\mu_1)_{\min} &= m - 1 + \{\mathcal{P}[(R-t)!] + \mathcal{P}(t!)\}_{\min}\\ &\equiv m - 1 + \xi_{\min} \qquad [1 \le t \le R-1]\end{aligned}$$

Jiný typ fermatisty - Shafi U. Ahmed (12-stránková brožurka - 1972)



K mání na Amazonu za USD 25.

Důkaz

Důkaz je založen na úvaze, že negace výroku

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{pro každé } n > 2$$

je

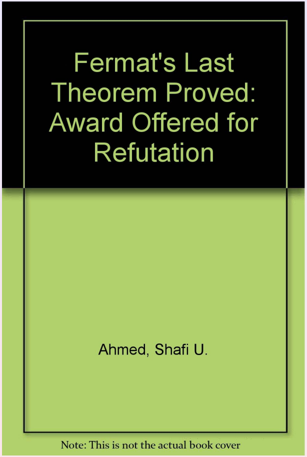
$$x^n + y^n \neq z^n \quad \text{pro každé } n > 2$$

(což není).

Pan Ahmed rozeslal svůj důkaz mnoha matematikům a obdržel mnoho negativních odpovědí.

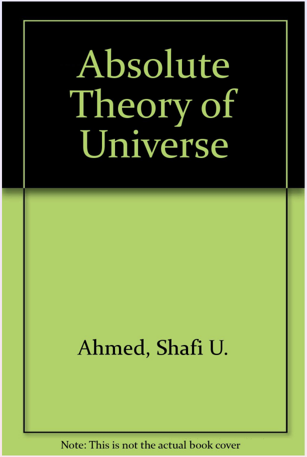
V jeho přesvědčení jej žádná nezviklala.

Vylepšená verse



Na Amazonu vyprodáno. Moc bych si od toho ale nesliboval.

Jiná kniha, jiná věda



Není k mání na Amazonu (currently unavailable).

Hlavní výsledek: všechny hvězdy jsou odrazem našeho Slunce.

Křank v novinách

12. ledna 1984 otiskl Guardian (!) na první stánce (na první stránce!) důkaz Fermatovy věty od Arnolda Arnolda.

Článek měl znepokojivý titulek: 'Codes at risk in maths advance'.

Obsah ve zkratce: *Předkládám jednoduchý důkaz FLT. Najdu snadno libovolně velké prvočíslo. Například $2^{214313833} - 1$. Jakkoli velké číslo velice rychle rozložím na prvočinitele.*

Tři námitky:

- Za prvé, prvočíslo $2^{214313833} - 1$, které A.A. podal k ilustraci svých mentálních schopností, není prvočíslo, neboť je dělitelno číslem
$$295\,753\,090\,783.$$
- Za druhé, důkaz nedával smysl.
- Za třetí, není jasná spojitost s FLT.

Jak se k tomu dostal Guardian?

Science writers should recognize crankery when facing it.

Jedna z mnoha reakcí:

More distressing than the factual errors is the whole tone of the article,which displays numerous symptoms of crankiness: historical errors, vagueness and lack of clarity, an unduly simple answer to a complex problem, confusing notation, grandiose claims for the significance of the result, secrecy about some key ideas, private publication, persecution mania, rejection of standard mathematics, truisms presented as profundities, etc. I am dismayed that a journalist as experienced as [the reporter] should have been taken in by such rubbish.

Záhada: co je to 'etc.'?

Další vývoj

Guardian uznal chybu 26. ledna 1984 a provedl semiretrakci.
Vyjádření odpovědného redaktora:

Many mathematicians have pointed out, with great vigour, that what we published of Mr. [A.]'s work did not offer a solution to Fermat's Last Theorem, and although like many humans, most journalists and even a few scientists, we cling wistfully to the thought that what we have believed to be true must have had some truth in it, we can hardly go on claiming to have printed a true solution. In our quantum world we find ourselves at the increasingly opaque end of a probability curve. We are therefore repentant.

Ale pozor:

We are not quite so repentant of the real point of the story - that techniques of encryption are at risk.

Křank a polynomy

Čas od času křank objeví něco nového zajímavého.

Pojednání A Proof of Fermat's Last Theorem (A.C., 1980) začíná binomickým rozkladem výrazu $(x+y)^n$. V průběhu důkazu definuje posloupnost polynomů

$$s_0 = 2, \quad s_1 = x, \quad s_{n+1} = x(s_n - s_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

takže

$$\begin{aligned} s_2 &= x^2 - 2x, \\ s_3 &= x^3 - 3x^2, \\ s_4 &= x^4 - 4x^3 + 2x^2, \\ s_5 &= x^5 - 5x^4 + 5x^5, \\ s_6 &= x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 2x^3, \end{aligned}$$

atd. Autor dále tvrdí, že součet koeficientů každého polynomu je roven $2\cos(n\pi/3)$.

Křank a logika

V A Proof of Fermat's Last Theorem (L.A., 1982) začíná takto: předpokládejme, že

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{a} \quad x^n + y^n = z^n.$$

Položme

$$V = x^2 + y^2 \quad \text{a} \quad W = x^n + y^n.$$

Pro $x = y = 1$ odtud plyne $W = V = 2$. Ze vztahu $V = W$ dostaneme

$$x^2 + y^2 = x^n + y^n.$$

Tedy

$$z^n = z^2.$$

Protože $n > 2$, plyne odtud, že buď $z = 0$, nebo $z = 1$. To ale není možné, protože

$$z^n = z^2 = V = W = 2.$$

Correa Moylan Walsh (1862–1936)

An Attempted Proof of Fermat's Last Theorem, G.E.Stechert & Co., 1932

Další publikace stejného vydavatele

- Bolza: *Lectures on the Calculus of Variations*
- Boole: *Treatise on the Calculus of Finite Differences*
- Gow: *A short History of Greek Mathematics*
- Whitworth: *Choice and Chance*

Další publikace stejného autora

- *The Measurement of General Exchange-Value*
- *The Fundamental Problem in Monetary Science*
- *Shakespeare's Complete Sonnets: A New Arrangement With Introduction and Notes*
- *The Doctrine of Creation*
- *The Political Science of John Adams: A Study in the Theory of Mixed Government and the Bicameral System*
- *The Climax of Civilisation*
- *Socialism*
- *Feminism*

Důkaz FLT

Vyjdeme z předpokladu, že pro nějaké liché číslo n

$$x^n + y^n = z^n.$$

Faktorisací dostaneme

$$(z^{\frac{n}{2}} + y^{\frac{n}{2}})(z^{\frac{n}{2}} - y^{\frac{n}{2}}) = x^n$$

Položme

$$z^{\frac{n}{2}} + y^{\frac{n}{2}} = p, \quad z^{\frac{n}{2}} - y^{\frac{n}{2}} = q.$$

Potom

$$x^n = pq, \quad y^n = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2, \quad z^n = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2$$

A teď předpokládejme, že $[x, y, z]$ je celočíselné řešení. Pak jsou tři možnosti: p i q jsou obě racionální, obě iracionální, nebo jedno a jedno. W. tvrdí, že z první možnosti plyne, že p, q jsou celá. Tedy y a z umocněná na lichou mocninu jsou kvadráty, takže jsou samy kvadráty.

Důkaz FLT - pokračování

Tudíž

$$r^{2n} - s^{2n} = x^n,$$

to jest

$$(r^n - s^n)(r^n + s^n) = x^n$$

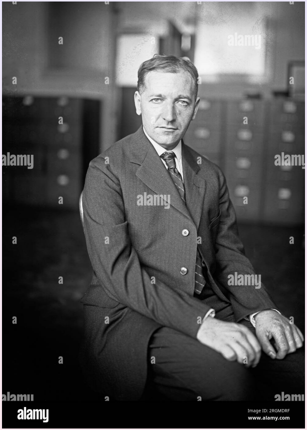
Za obvyklého předpokladu, že x, y a z jsou nesoudělná, odtud plyne, že oba faktory vlevo jsou nesoudělné, a tedy opět n-té mocniny. Tedy

$$r^n + s^n = t^n \quad \text{a} \quad r^n - s^n = u^n.$$

První z těchto rovnic je pak celočíselným řešením s menšími čísly.

Je možné, že tento důkaz měl Fermat a nevešel se mu na záložku.

Max Michael Munk (1890–1986)



Congruence Surds and Fermat's Last Theorem, Vantage Press, New York, 1977

Pozoruhodná kariéra

- *Inženýrský diplom z Hannover Polytechnic School*
- *Doktoráty ve fyzice a v matematice z Göttingenu*
- *od 1920 práce pro NACA - více než 40 článků a objev nového vzdušného tunelu*
- *práce pro vládu USA na základě glejtu Woodrowa Wilsona*
- *profesor aeronautiky*

Z předmluvy křankovy

The relentless but unsuccessful search by the mathematical profession for the rediscovery of Fermat's 'marvelous proof' of his Last Theorem has gone now for 300 years. The simplicity of the rediscovered proof is commensurate with the simplicity of the theorem. But the proof is far from obvious.

It appears that the mathematicians look too high, higher and higher, instead of looking down at the humble digital writing of numbers. Such writing is so well understood, everything about it has already been said. So it seems. But not so. There is never limit to more clarity and to even more profound understanding.

Na závěr ještě jeden důkaz FLT (J.R.,1980

Položme

$$x = J + s, \quad y = J + a, \quad z = J + b,$$

takže $x^n + y^n = z^n$ přejde v

$$(J + s)^n + (J + a)^n = (J + b)^n.$$

Tedy z binomické věty plyne, že

$$J^n + nsJ^{n-1} + \binom{n}{2} s^2 J^{n-2} + \cdots + s^n$$

$$n(b - a)J^{n-1} + \binom{n}{2} (b^2 - a^2) + \cdots + (b^n - a^n).$$

A teď: protože J, s, n jsou racionální, můžeme hledat řešení porovnáním koeficientů obou polynomů.

Důkaz FLT - pokračování (J.R.,1980)

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} s &= b - a \\ s^2 &= b^2 - a^2 \\ s^3 &= b^3 - a^3 \\ &\vdots \\ J^n + s^n &= b^n - a^n \end{aligned}$$

To nemá celočíselné řešení. (Jasně že ne, už z prvních dvou plyne $a = 0$.)

Odtud plyne tvrzení FLT. (Bohužel nikoli.)

Argumentace křankova a co je na ní špatně

Stejná metoda uplatněna na dvojici polynomů

$$x^2 + 1 = x + 1$$

vede na

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x &= 0 \\ 1 &= 1, \end{aligned}$$

takže jediné řešení je $x = 0$. Polynomy se ale rovnají pro $x = 1$.

Fermatisté často nechápou rozdíl mezi algebraickou a aritmetickou identitou polynomů.

Zastavení třetí: číselné soustavy

Diskuse o číselné soustavě

- Zepejte se kohokoli: "Jaká je naše číselná soustava?"
- Odpověď věšinou zní: "Cože?"
- Avšak po vysvětlení "No jako že třeba 1989 je jedna tisícovka, devět stovek, osm desítek devět jednotek" se po čase dobereme výsledku 10.
- Počítání v desítkové soustavě je přirozené jako dýchání.
- A je stejným způsobem polouvědomělé.

Poziční systém zápisu čísel

- Náš zápis čísel ale není přirozený, jak vyplývá z historie.
- Dvě devítky v 1989 znamenají něco jiného díky své pozici.
- Egyptská matematika nepoužívala poziční systém.
- K zápisu čísla 1989 by potřebovali $1+9+8+9=27$ symbolů.
- Římanům by stačilo devět: MCMLXXXIX.

Babylónský zápis čísla

- smíšený systém: symboly pro 1 a 10 pro čísla od 1 do 59
- od 60 výše: poziční systém, šedesátková soustava
- poziční systém umožňuje vyjádřit zlomky desetinným zápisem
- Babylónský zápis čísla $\sqrt{2}$ po nahrazení jejich symbolů našimi:

$$\sqrt{2} = 1.(24)(51)(10)$$

to jest

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{(60)^2} + \frac{10}{(60)^3} = 1.414212962\ldots$$

- což je velmi blízko skutečné hodnotě $1.41421356237\ldots$
- Římané a Egypťané měli se zlomky potíže a vyhýbali se jim jak to jen šlo.

Indové

- Poziční systém je důvod, proč byla Babylónská matematika o mnoho úspěšnější než jakákoli jiná starověká.
- Systém převzali Indové a provedli dvě zlepšení:
  - desítkovou soustavu (chytré, ale i tak překvapivé),
  - přidali nulu (kolem 500 AD).
- Důvod pro desítkovou soustavu je takříkajíc 'na hnátě'.
- Otázka: co kdyby na ruce bylo šest prstů?

Šestiprstá aritmetika

- počítalo by se po tuctech místo desítek
- soustava by byla dvanáctková
- existence slova 'tucet' dokazuje, že má svůj význam
- stopa má dvanáct palců, rok dvanáct měsíců, den dva tucty hodin, kruh 30 tuctů stupňů, pivo přichází v sixpacku, ...
- 12 má více a lepších dělitelů než 10
- třetinu a čtvrtinu potřebujeme mnohem častěji než pětinu (tři šichty, čtyři kvartály, ...)

Zlomky

- posuďme jednu třetinu v soustavě desítkové

$$\frac{1}{3} = 0.3333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{(10)^2} + \frac{3}{(10)^3} + \frac{3}{(10)^4} + \dots$$

  a dvanáctkové

$$\frac{1}{3} = 0;4 = \frac{4}{12}.$$

- Jedna šestina by se rovnala $0;2$. Jedna osmina by byla

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{12} + \frac{6}{144} = 0;16.$$

- Dvě třetiny by tvořily 80 procent (srovnej 66.66667).

Šestiprsté výhody neunikly pozornosti křanků

- Frank Emerson Andrews (1902–1978) byl zapálený propagátor dvanáctkové soustavy.
- V článku *An Excursion in Numbers* (Atlantic Monthly, 1934), navrhuje upuštění od desítkové soustavy ve prospěch dvanáctkové.
- Navrhl dva nové symboly:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \chi, \varepsilon,$$

  poslední dva vyslovuj 'del' a 'el'.
- Následující číslo bude 10 (jeden tucet a žádné jednotky) - čti 'doo'.
- 100 byde veletucet, 1000 bude naše 1728 atd.

Světlá budoucnost světa podle F.E. Andrewse

- Každý si rychle osvojí nové sčítání a novou násobilku.
- Úkony typu $9 + 5 = 12$ nebo $7 \times 8 = 46$ bude mít každý brzy v malíčku.
- Žáčkové budou zpaměti chroustat výpočty typu

$$
\begin{array}{r}
76 \\
87 \\
125 \\
+\ 59 \\
\hline
303
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
216 \\
\times\ \ 73 \\
\hline
646 \\
12\chi 6 \\
\hline
134\chi 6
\end{array}
$$

- Osoby příliš staré či neschopné jít s dobou dostanou zdarma dvanáctkové kalkulačky.
- Přechod se dokončí během maximálně jedné generace.
- Všichni politují své nešťastné předky, kteří kdysi počítali v χ-ové soustavě.

Myšlenka se ujala

- Vznikla *Duodecimal Society of America*.
- Byl vydáván *The Duodecimal Bulletin*.
- Vycházely jeho verse v esperantu: *Ekskurso en Nombroj* a *Antipatio al Arithmetiko*.
- Volba esperanta byla přirozená:
  - je to logické,
  - mělo by to své výhody,
  - a nikdy se to neprosadí.

Další křank na scéně

- Prací Franka Emersona Andrewse se inspiroval George S. Terry.
- Napsal knihu *The Dozen System - An Easier Method of Arithmetics*, Logmans, Gree, Londýn 1941.
- Kniha měla 56 stran (tedy samozřejmě 5 tuctů a 6 jednotek).

Rozbor

- Terry posuzuje soustavy o základech 6,8,12 a 16.
- Nejlepší je 12.
- 8 je horší než 12, ale pořád lepší než 10.
- 16 je o něco lepší než 8.

Testy dělitelnosti

- 2: poslední číslice je sudá
- 3: poslední číslice je 0,3,6,9
- 4: poslední číslice je 0,4,8
- 6: poslední číslice je 0,6
- 8: poslední dvojčísí je dělitelné 8
- 9: poslední dvojčísí je dělitelné 9
- ε: ciferný součet je dělitelný ε
- 10: poslední číslice je 0.

Další výhody

- Každé Mersennovo prvočíslo (2^{p-1}, kde p je prvočíslo) větší než 7 končí na 27 nebo χ7.
- Každé dokonalé číslo tvaru $2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$ větší než 24 končí na 54.

- Kolika způsoby lze zapsat jedničku ve tvaru součtu dvou zlomků, přičemž každou cifru využijeme právě jednou? Příklad:

$$\frac{136}{270} + \frac{48\chi}{95\varepsilon} = 1.$$

(Odpověď: kolem pěti tuctů - decimálně jeden tucet.)

- Kolik různých čísel lze zapsat pomocí čtyř čtyřek a duodecimálních aritmetických operací? Příklad:

$$26 = \frac{4 - .\dot{4}}{.4(.\dot{4})}.$$

(Odpověď: dva a půl tuctu - decimálně 22.)

Dvanáctkový systém vah a měr

- Systém je založen na dvanáctině yardu zvané palm (dlaň):

Linear measure

10 Quins = 1 Palm
10 Palms = 1 Yard
1000 Yards = 1 Mile

Weight

10 Ounces = 1 Pound
1000 Pounds = 1 Ton

Volume

10 Ounces = 1 Pint
10 Pints = 1 Gallon
10 Gallons = 1 Bushel or Barrel
10 Bushels = 1 Cubic yard

- Desítky jsou pochopitelně tucty, takže například dvanáctková míle činí $\frac{1728}{1760} = 98.2\%$ decimální míle, čehož si nikdo nevšimne.

Pokrok

- *The Duodecimal Society* zmizela kolem roku 1960.
- Nedávno byla nahrazena *The Dozenal Society*.
- Zavedla další jednotky, například karl, quan, palm, drib, dram, founce, grovic, minette, temin, duor, etc.
- Zatím se neuchytily.

Problémky

- Vydání *The Duodecimal Bulletin* Fall 1195 uvádí zajímavý problém:
- Nalezněte všechna tuctová čísla která jsou dvojnásobkem své decimální analogie.
- Příklad: 11788, neboť

$$1 \times 12^4 + 1 \times 12^3 + 7 \times 12^2 + 8 \times 12 + 8 = 23576 = 2 \times 11788.$$

- Bulletin uvádí ještě 19 dalších a ptá se, zda jsou to všechna taková čísla.

Divná věc

- Stejné vydání uvádí fotografii účastníků výroční konference společnosti.
- Na fotografii je jedenáct lidí.
- Proč ne dvanáct?

Ještě jiné soustavy

- V roce 1934 prosazoval E.M. Tingley zavedení osmičkové soustavy.
- Vydal brožurku *Count by Eights, Not by Tens* a článek v *School Science and Mathematics*.
- Je přirozené půlit, nikoli pětit.
- Dští síru na 'odd and prime five'.

Ukázka

- Výtah (datováno 37. ledna 3616):

  Dokáže vůbec někdo pracovat s těmi otravnými trojkami a pětkami bez mechanické pomoci? Pětky, těžké a nepřirozené, jsou neustále všude kolem díky naší desítkové soustavě a metrickému systému. Psychologové by měli změřit a deklarovat naši přirozenou inklinaci k polovinám místo třetinám a pětinám. Nechopili se však této šance. Psychologové by měli odsoudit metrický systém a všechny matoucí pětiny. Matematikové a učitelé nesprávne preferují dvanáctkové škály, které ale místo pětek obsahují stejně urážlivé liché a prvočíselné trojky.

Dvě poznámky na závěr

- Ještě mnohem šílenější systém (založený na 24 a 60) navrhl v roce 1942 W.K. Kemble v článku *Letter Systems in Business and Technology*.
- The Dozenal Society existuje dodnes a stále vesele vede svůj marný boj.

Zastavení čtvrté: vymítání devítek

Hledání chyby

- Za starých časů všichni uměli vymítat devítky.
- Učilo se to ve škole a ovládal to každý číšník a zelinář.

$$3141592653589 + 2718281845904 = 5859874498493,$$
$$31415926 \times 27182818 = 853973397759468.$$

$$3141592653589 + 2718281845904 = 5859874499493,$$
$$31415926 \times 27182818 = 853973398759468.$$

Metoda ovšem není všemocná

- Nevíme, *kde* je chyba.
- Například následující výpočty projdou:

$$15 + 31 = 82, \quad 5 \times 7 = 8.$$

- Metoda je založena na modulární aritmetice.

K tomu jeden limerick

There was a young fellow named Ben
Who could only count modulo ten.
He said: "When I go
Past my little toe,
I shall have to start over again."

Křank a výdělek

- 10. ledna 1989 uvedl Francis Soh na trh v Singapuru svou knihu *INSTANT MATHEMATICS For Office and Commercial Applications. Specially for Teachers, Managers, Business Entrepreneurs, Supervisors, Cashiers, General Clerks Etc.* (Meko, Subang Jaya, Selangor, Malaysia, 1989).
- Během dvou měsíců se prodalo 6000 výtisků.
- Kniha se často objevovala na poličce bestsellerů.
- Kniha má 124 stránek, na nichž není skoro nic.
- Autor pouze znovuobjevil vymítání devítek a uvedl spoustu příkladů jejího použití.

Matematika či etika

- F.S. uvádí, že na knize pracoval (se svými studenty!) 24 let.
- F.S. neuvádí, že metoda na všechno nestačí.
- Všechny příklady končí slovy 'addition correct' nebo 'product correct', 'takže zaplatíte správnou cenu $\$16,80$' a podobně.
- Jsou dvě možnosti:
  - buď na chybu za 24 let práce nepřišel,
  - nebo ji zatajil.

.

Poznámka na závěr

- Metodu rychlého sčítání popsal předtím Jakow Trachtenberg v knize *Speed System of Basic Mathematics*.

Zastavení páté: mnohoúhelníky

Úloha: sestrojte n-úhelník

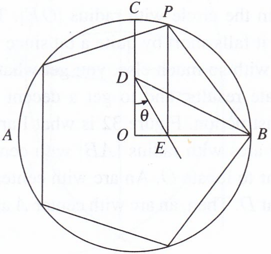
- Konstrukce musí být *eukleidovská*.
- To znamená, že se použije pouze *pravítko* (straight edge) a *kružítko* (compass).

Úloha je

- snadná pro $n = 3, 4, 6, 8$,
- těžká pro $n = 5$, (ale jde to),
- neřešitelná pro $n = 7, 9$.

Konstrukce pentagonu

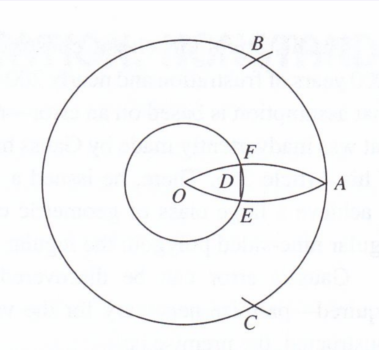
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$



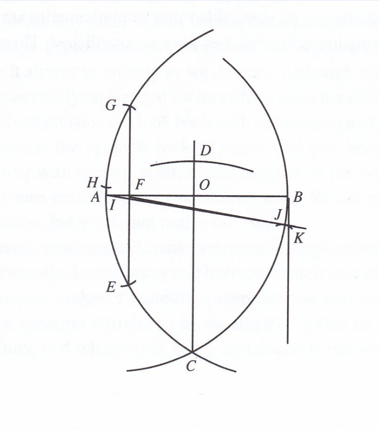
Co na to křank

- Septagonisté téměř neeexistují.
- Důvod by mohl být v tom, že 360 se špatně dělí sedmi.
- Nonagonisté existují, ale je jich málo.
- Důvodem by mohlo být to, že konstrukci nonagonu je snadným důsledkem trisekce úhlu.
- Proč se zdržovat obskurním problémem nicotného významu, když mohu rovnou vyřešit velký.

Nonagon poprvé



Nonagon podruhé



Úhel se od 10° liší o 0.0001 sec. Vetknut do poloměru Země, měl by stranu o 240 stop kratší. Nikdo by si ničeho nevšiml.

Argumentace křankova

- *Vyřešil jsem klasický konstrukční problém, jehož historie obsahuje 2000 let frustrace a 200 let nesmyslného předsudku* (míněn Gaussův důkaz, že konstrukce je nemožná). *Gaussova chyba není v matematice, nýbrž v logice.*

  ...

  Z prvních sedmi stránek mé prace je zřejmé, v čem se Gauss mýlí a proč mám pravdu já. Důvod je v tom, že jsem vynalezl zcela novou analytickou geometrii, pro kterou navrhuji název 'indikativní analytická geometrie'. A tak dále.

Poznámka na závěr

- Uvedený nonagonista byl křank třetího druhu.

Dělení křanků:

- křank prvního druhu říká: Mám pravdu.
- křank druhého druhu říká: Mám pravdu, protože ... a následuje matematický výklad.
- křank třetího druhu si uvědomuje, že jeho výsledek je ve sporu s matematikou, a proto se snaží změnit matematiku tak, aby vyhovovala jeho potřebám.
- neexistuje křank čtvrtého druhu.

Zastavení šesté:

Cantor, nekonečno a paradoxy

Georg Cantor (1845–1918)

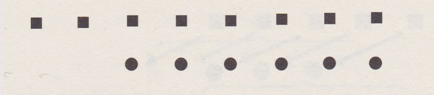
Georg a Vally Cantor

Cantor a nekonečno

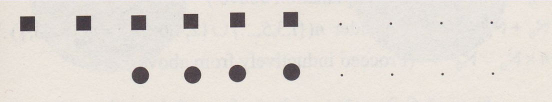
Cantorův přístup:

- mohutnost *kardinalita* množiny
- exvivalence množin
- *bijekce*.

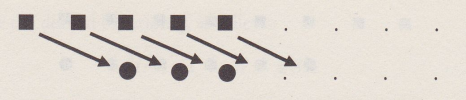
Úskalí práce s nekonečnem



Máme více kostiček než koleček.



Máme více kostiček než koleček?

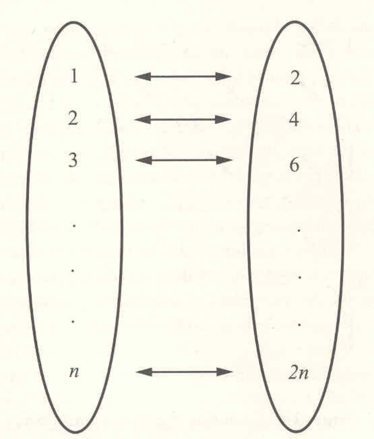


Nemáme!

První šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.



Co je to nekonečná množina?

DEFINICE (G. Cantor): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení této množiny na některou její *vlastní* podmnožinu.

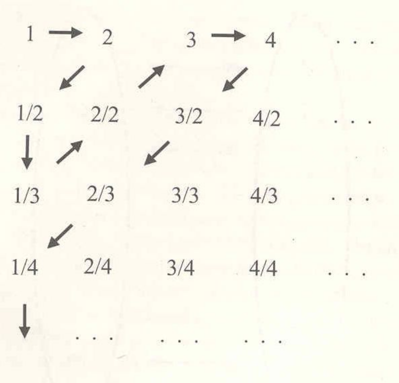
DEFINICE (alternativní): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení z $\mathbb{N}$ do této množiny.

Spočetné množiny

Množiny, mající nejvýše tolik prvků jako $\mathbb{N}$, nazýváme **spočetné**.

Druhý šok

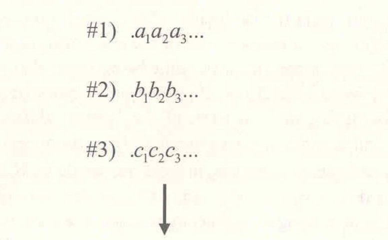
Racionální čísla jsou *spočetná*.



Cantorova věta o potenční množině

Potenční množina $P(x)$ množiny x má větší mohutnost než x.

Reálná čísla *nejsou* nespočetná.



#1) $.a_1a_2a_3\ldots$

#2) $.b_1b_2b_3\ldots$

#3) $.c_1c_2c_3\ldots$

A tedy . . .

. . . existuje více druhů (hierarchie) nekonečen!

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$(c =)2^{\aleph_0} = \aleph_1? \quad (\text{zřejmě platí } \aleph_1 \leq c).$$

Křank a paradox

- V roce 1974 se objevil článek *A Correction in Set Theory* v časopise Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts, and Letters.
- Autorem byl William Dilworth, povoláním inženýr, povahou křank.
- V abstraktu slibuje 'analýzu fatálního Cantorova omylu pomocí moderní sémantiky'.
- Článek je velmi nízké kvality a neměl nikdy vyjít.
- Časopis v té době publikoval prakticky vše, co mu bylo zasláno.
- Časopis vydržel až do roku 2001.

Dilworth versus Banach–Tarski

- Jádrem pudla byl Banachův–Tarského paradox, s nímž se Dilworth nesmířil.
- Autor pochopil, že výsledek využívá techniky tehdy nové teorie množin, a zaměřil se tedy na ni.
- Argumentace je zběsilá, ale lze se z ní poučit.
- Příklad:

  Historically and up to this date, he has won. The horrendous "alephs" of his endless infinities thunder through the evening skies of academe "with hooves of steel", as the songwriter put it.

- Komentář LP: jsem rozhodně pro zvýšení výskytu citací na Johhny Cashe v matematických publikacích!
- Článek končí nařčením matematiků ze spiknutí a poslední větou:

  Remember the spheres.

Dilworth z hlediska matematického

- Dilworthův omyl je jednoduchý a objevuje se často i u studentů.
- Dilworth dokazuje, že reálná čísla jsou spočetná.
- Argumentuje takto: reálná čísla v intervalu $(0,1)$ lze seřadit:

$$0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 0.10,\ 0.11,$$
$$0.12,\ 0.13,\ \dots, 0.99,\ 0.100, \dots, 0.999,\ 0.1000, \dots$$

- Vidíme hned, kde má Dilworth chybu?

Dilworth z hlediska právnického

- V roce 1992 se Dilworth dostal do jedné z knih o křancích.
- V roce 1995 za to autora zažaloval za urážku na cti nebo pomluvu (defamation).
- Případ dostal Judge Richard Posner, "the most cited legal scholar of the 20th century".
- Rozsudek byl vydán 29. ledna 1996, a to v Dilworthův neprospěch.
- Soudcova rozsáhlá argumentace stojí za přečtení.
- Klíčová věta: *"The word 'crank' is incapable of being defamatory; it is mere 'rhetorical hyperbole'".*
- Soudce uvádí podobná slova *"scab, lunatic, traitor, amoral, scam, fake, phony, a snake-oil job, dealing with half a deck",*
- *a hlavně: "lazy stupid crap-shooting chicken-stealing idiot".*

Poznámka na závěr

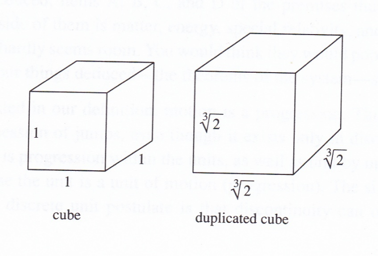
- Dilworth nebyl jediný, kdo zpochybnil Cantorovu diagonální metodu.
- V roce 1978 se objevil podrobný popis *pěti* Cantorových chyb.
- G.P. publikoval článek *Disproving Cantor's Theory of Transfinite Numbers*.
- Autor měl Ph.D. v matematice.
- Čísla zobrazoval jako množiny teček.

Zastavení sedmé:

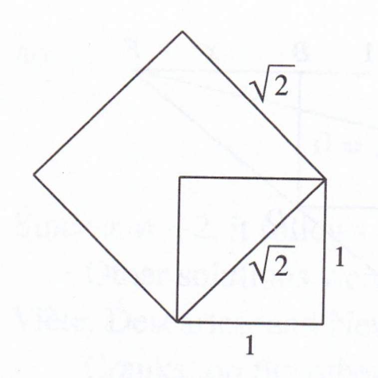
duplikát

Úloha

- K dané krychli sestrojte krychli dvojnásobného objemu.
- Konstrukce musí být *eukleidovská*.

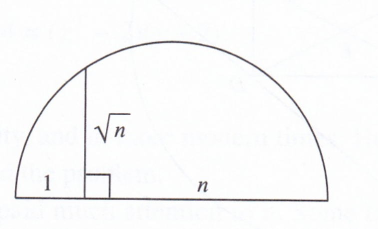


- Dvojrozměrná obdoba je snadná.



Nafukování (ale jen ve 2D)

- Protože je snadné zkonstruovat úsečku délky $\sqrt{n}$ pro každé n přirozené, je snadné nafouknout plochu čehokoli n krát.



Zádrhel

- Jenomže na 3D versi problému potřebujeme $\sqrt[3]{n}$.
- A to eukleidovsky sestrojit nelze.
- Řekové si to uvědomovali a šli na věc jinak.
- Nalezneme-li x, y tak, aby

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2},$$

potom

$$2 = \frac{y^2}{x} = \frac{x^4}{x} = x^3,$$

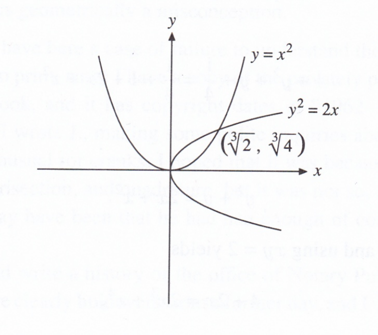
a máme to.

Řešení

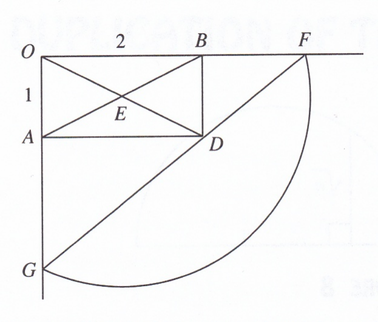
- To znamená, že stačí lokalizovat průnik parabol

$$x^2 = y, \quad y^2 = 2x,$$

tj.

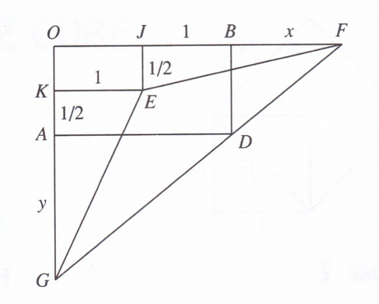


- Kolem roku 220BC našel Apollonius jiné řešení.
- Konstrukce není eukleidovská, protože použil *otočné pravítko* (wiggling straight edge).



- Potom $BF = \sqrt[3]{2}$.

Vysvětlení, proč to funguje



- Trojúhelníky *BDF* a *AGD* jsou podobné, takže

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{y}, \quad \text{neboli } xy = 2.$$

- Dle Pythagorovy věty aplikované na *KEG* a *JEF* máme

$$r^2 - 1^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + (1 + x)^2.$$

Tedy

$$1 + y^2 + y + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + 1 + 2x + x^2,$$

neboli

$$y^2 + y = 2x + x^2.$$

Vynásobíme x^2 a použijeme $xy = 2$ a dostaneme

$$4 + 2x - 2x^3 + x^4,$$

to jest

$$0 = x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = (x^3 - 2)(x + 2).$$

Protože $x \neq -2$, zbývá jediná možnost, a to $x^3 = 2$.

Vývoj

Další řešení nalezli Huygens, Viète, Descartes a Newton.

Křank, sázka a notář

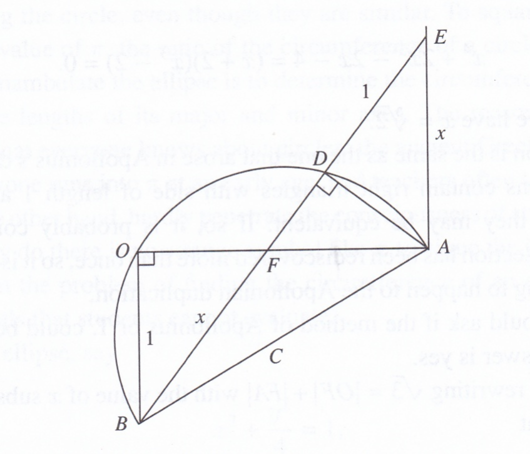
Z dopisu W.V. (1971):

> TO WHOM IT MAY CONCERN
>
> It starts:
>
> Sirs, I am hopeful that someone at Lloyds of London will inform me if there are odds set on someone solving the famous problem of antiquity known as the "Duplication of The Cube".
>
> It later states:
>
> The Encyclopedia Britannica states that this problem cannot be solved by the use of a straight edge and compass alone, and many famous authoritative geometricians and mathematicians firmly agree with this statement. I challenge them all.
>
> Since I am challenging all past, as well as present authorities that are in agreement with the Encyclopedia Britannica the turmoil this should cause could bring some interesting results. If the odds appeal to me, I will be most happy to reveal this knowledge to all that challenge me.

Dopis obsahuje notářské osvědčení a datum expirace (!).

Křank a řešení

Z devítistránkové luxusně tištěné brožurky *Duplicating the Cube* (sepsal Carleton C. Taylor, Jr., vyšlo v Albuquerque Printing, Albuquerque, NM. 1981):



Pár poznámek na závěr

- Konstrukce křanka C.T. je velice pěkná a nápaditá.
- Bohužel není eukleidovská, protože využívá označené pravítko.
- Není vyloučeno, že je ekvivalentní konstrukci Appoloniově.
- Metoda se dá využít i ke konstrukci *triplikátu* krychle.
- Navíc z analytického rozboru konstrukce plyne, že

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3},$$

  což je netriviální identita.

Zastavení osmé:

Goldbachova domněnka

Domněnka (Christian Goldbach, 1690–1794)

- Každé sudé číslo větší než 2 je součtem dvou lichých prvočísel.
- Formulována v dopise Eulerovi 1742.
- Bude navěky *Goldbachovou domněnkou*.
- Kdyby ji dokázal J.K. Psuřt, stejně to nebude *Psuřtova věta*.
- Bude to *Goldbachova domněnka, kterou dokázal Psuřt v roce 3112. . .* .
- To není fér.
- Domněnky může klást kdokoli.

Jiná Goldbachova domněnka (kterou nikdo nezná)

- Každé liché číslo je součtem prvočísla a dvojnásobku kvadrátu.
- $$5 = 3 + 2 \times 1, \quad 7 = 5 + 2 \times 1 \quad 9 = 7 + 2 \times 1, \quad \dots$$
- Neplatí pro číslo 5777.

Co se ví o Goldbachově domněnce

- Nikdo nepochybuje o tom, že platí.
- Známo pro velké množství čísel.
- $100,000,000,000 = 999,999,929 + 71$.
- To je jedna z $2,300,000$ representací.
- Každé liché číslo je součtem prvočísla a čísla s dvěmi prvočíselnými faktory (1973).

Co na to křankové?

- První ukázka. Autor je tzv. Goldbacher. Měl matematické vzdělání.

GOLDBACH CONJECTURE

$$F(m) \le \sum d(4m+1)$$

$$F(m-2) \le \sum d(4m-3)$$

$$F(m) - F(m-2) \le d(4m+1) + d(4m-3)$$

If m and $4m+1$ are primes for infinitely many m

$$F(m) - F(m-2) \le 1 + d(4m-3)$$

$$F(m) \approx F(m-2) \le \frac{\sqrt{m}\log m}{8} \text{ or } \frac{\sqrt{m}}{8\log m}$$

If $m-2$ is not a prime it is $\dfrac{\sqrt{m}\log m}{8}$

If $m = 4k+1\, F(m-2) \approx \dfrac{\sqrt{m}\log m}{8}$

but $F(m)$ may be $\approx \dfrac{\sqrt{m}\log m}{8}$

so $(m-2)$ must be a prime

$$F(m) \le \frac{\sqrt{m}\log m}{8}$$

for infinitely many values.

Řešení křanka V.V., rovněž Goldbachera, 1

- Napíšeme si N možností, jak zapsat $2N$ ve tvaru součtu dvou přirozených čísel:

$$
\begin{gathered}
1,\ 2N-1 \\
2,\ 2N-2 \\
3,\ 2N-3 \\
\vdots \\
N,\ 2N-N
\end{gathered}
$$

- Polovinu můžeme rovnou vyhodit (obě sudá).
- Zbývá nám $N/2$ párů.
- Z nich bude třetina mít první faktor dělitelný třemi (a jedna třetina druhý).

Řešení křanka V.V. 2

- Teď zbývá $\frac{1}{3} \cdot \frac{N}{2}$ párů.
- Z nich bude pětina mít první faktor dělitelný pěti, jak se dalo čekat, atd.
- Pokračujeme až po P, nejvyšší prvočíslo menší než $\sqrt{N}$.
- Počet párů nyní činí

$$\frac{P-2}{P} \cdot \dots \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{2}$$

- Tvrzení plyne z toho, že toto číslo je nenulové.

Uplatnění

- Zkusme tuto ideu na $N = 32$.
- Po prvním kole máme

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35

- a po vyšktrnutí párů obsahujících násobek 3 nebo 5 (jediná prvočísla menší než $\sqrt{32}$):

3	5	11	17	23
61	59	53	47	41

- přesně pět způsobů, jak zapsat 64 ve tvaru součtu dvou prvočísel.
- Potíž s důkazem: druhý člen v páru není nezávislý na prvním.
- Je-li první člen prvočíselný, druhý nemusí.

Argumentace křankova

- *Vy jste a priori předpokládal, že můj důkaz musí být chybný a že snaha porozumět mé argumentaci by byla ztrátou času. A tak jste mi podsunul chybu, kterou jsem však já neudělal. Avšak k zamítnutí publikace musíte v mém důkazu nalézt alespoň jednu chybu!*

Jiný křank, tentokrát antigoldbacher

- J.C. napsal: *Existuje nekonečně mnoho lichých násobků 4, které nelze vyjádřit ve tvaru součtu prvočísel.*
- J.C. měl BSc. v matematice (USA 1977)
- Na dotaz, aby uvedl konkrétní protipříklad, odpověděl:
- *Neznám konkrétní protipříklad, čísla jsou na mě příliš velká.*

Argumentace křankova

- *Důkaz, který hledáte Vy, je založen na znalostech a je podložen znalostmi. Avšak důkaz, který nabízím já, je založen na porozumění a je podložen moudrostí. Znalosti a porozumění spojuje moudrost. Tudíž principem věci je moudrost, nikoli znalosti.*

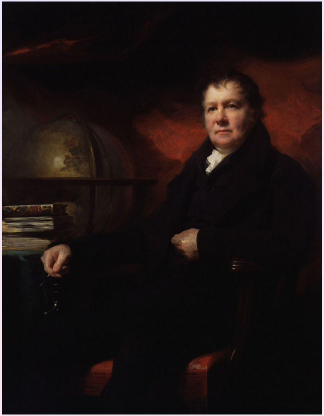
Zastavení deváté:

pátý Eukleidův axiom

Eukleidovy axiomy

- dvěma body lze vést úsečku
- úsečku lze prodloužit na libovolnou konečnou délku
- existuje kružnice o středu a poloměru
- všechny pravé úhly jsou shodné
- protne-li přímka dvojici přímek tak, že na jedné její straně je součet vnitřních úhlů menší, než dva úhly pravé, pak se tyto přímky protnou na této její straně

John Playfair 1748-1819



John Playfair

Reformulace pátého axiomu

Playfairův axiom (nejčastěji používaný ekvivalent Eukleidova pátého axiomu):

K dané přímce a danému bodu mimo ni existuje právě jedna přímka vedená tímto bodem, která se s danou přímkou neprotne ("rovnoběžka").

Pochybnosti

Pátý axiom není tak intuitivní, jako první čtyři.

Tento fakt vedl matematiky k tomu, že se přes 2100 let snažili dokázat, že pátý axiom plyne z prvních čtyř.

Byly zaznamenány stovky pokusů o důkaz.

Několik vynikajících matematiků dospělo k závěru, že axiom dokázali.

Vždy se ukázalo, že v důkazu je chyba.

Chyba téměř vždy spočívala v tom, že někde v důkazu bylo použito tvrzení, které buď je ekvivalentní pátému axiomu, nebo je na něm závislé.

Příklady

Například je snadné dokázat, že pátý axiom je ekvivalentní předpokladu, že součet úhlů v trojúhelníku je roven dvěma úhlům pravým.

Jeden z raných falešných důkazů je založen na existenci obdélníku.

Jenomže existenci obdélníku nelze dokázat bez použití axiomu rovnoběžek!

John Wallis 1616–1703

John Wallis

Wallisův důkaz

Britský matematik John Wallis se v 17. století domníval, že má důkaz pátého axiomu.

Důkaz se opíral o dva podobné trojúhelníky, které nejsou kongruentní.

Existence takových trojúhelníků je ale ekvivalentní pátému axiomu!

Další důkazy

Existuje dlouhý seznam dalších předpokladů a tvrzení tak samozřejmých, že nestojí za zmínku.

Všechny jsou ekvivalentní pátému axiomu.

Ekvivalentní výroky

S pátým axiomem jsou ekvivalentní například tato tvrzení:

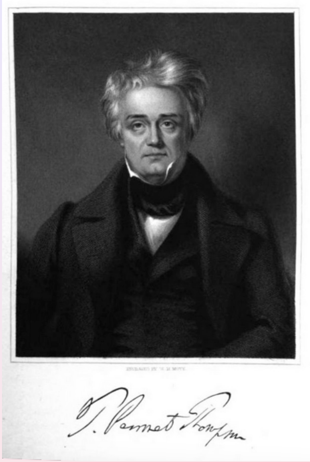
- Bodem mimo zadanou přímku lze vést s danou přímku jedinou rovnoběžku.
- Protíná-li přímka jednu ze dvou rovnoběžek, protne i druhou.
- Rovnoběžky jsou všude stejně vzájemně vzdáleny.
- Obvod kružnice o poloměru r je roven $2\pi r$.
- Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů.
- Existují dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech a přitom tyto trojúhelníky nejsou shodné. (Tj. existují podobné trojúhelníky.)
- Existuje libovolně velký rovnostranný trojúhelník.
- Délka strany pravidelného šestiúhelníku je rovna poloměru kružnice tomuto šestiúhelníku opsané.
- Tři body leží buď na přímce nebo na kružnici.

1763

V roce 1763 posoudil Georg Klügel 28 pokusů o důkaz pátého axiomu.

Chybu nalezl v každém z nich.

The most indefatigable crank of all times



generálmajor Thomas Perronet Thompson (1783–1869)

Život a dílo generála Thompsona

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Generál Thompson byl nejneúnavnější britský dokazovač pátého axiomu.

Postupně poslal několik desítek důkazů, které neustále vylepšoval.

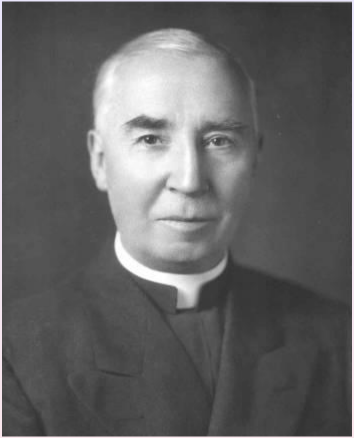
V jednom z nich objevil dosud nevídaný druh spirály.

De Morgan se jej vytrvale snažil od této činnosti odradit.

To se mu nepovedlo.

Thompson také navrhl úpravu klaviatury varhan, aby oktáva měla 40 tónů.

The funniest of American cranks



the Very Reverend Jeremiah Joseph Callahan, president of Duquesne University in Pittsburgh (1878–1969)

Život a dílo otce Callahana

1931 • otec Callahan oznámil, že právě úspěšně dokončil trisekci úhlu

(vyneslo mu to článek a fotografii v časopise *Time*)

1932 • otec Callahan vydal své zásadní dílo *Euclid or Einstein: A Proof of the Parallel Theory and a Critique of Metageometry* (nakladatelství *Devon-Adair*, 310 stránek)

Několik citací z knihy otce Callahana (škoda překládat):

"Einstein is fuddled", "has not a logical mind", "is in a *mental fog*", "is a careless thinker", "his thought staggers, and reels, and stumbles, and falls, like a blind man rushing into unknown territory", "Sometimes one feels like laughing and sometimes one feels a little irritated. *But there is no use expecting Einstein to reason.*"

Tak pravil otec Callahan (tentokrát o Riemannovi)

It is not merely a question of not being practiced, but of complete incompetence. He is not entitled to indulgent criticism, for he had no business meddling with what he knew nothing about. A prudent, sensible man would not get beyond his depth and would stick to what he was competent to handle. Mathematicians, who are not philosophers as well, should learn to stick to their lasts.

Tak pravil otec Callahan (o slapových jevech)

There is not a shred of evidence that the moon pulls anything, not even a spoonful of water one millimeter in height.

Citace pro otce Callahana

Chcete vidět opravdu jednoduchý důkaz pátého axiomu (i s elementární chybou)?

Pohleďte sem:

D.R. Ward, *The Mathematical Gazette 17 (1933), 101–104*.

William L. Fischer (München): *Kritik der Nicht-Euklid'schen Geometrie* (1959 !)

Obzvláště zábavná pasáž: stížnost na universitu v Cambridge, že se odmítla zabývat jeho knihou.

Richard Hazelett, Dean E. Turner:

The Einstein Myth and the Ives Papers (1984 !!)

(plamenná obhajoba důkazu otce Callahana)

kvalifikace autorů: oba jsou pastory církve *The Disciples of Christ Church*

Moudrá slova

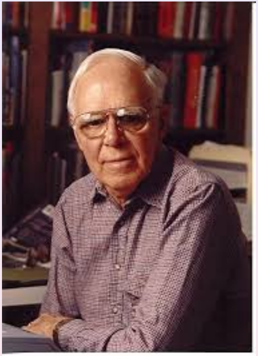
Martin Gardner:

Prý neexistují jednoznačná kritéria pro odlišení křanka od poctivého matematika.

Ano, ale právě tak neexistují jednoznačná kritéria pro rozlišení mezi dnem a nocí, mezi životem a smrtí, mezi oceánem a pevninou.

Každopádně, milý čtenáři, máš-li důkaz pátého axiomu, **neposílej mi jej!**

Martin Gardner 1914-2010



Martin Gardner

Zastavení desáté: značení

Značení je jazykem matematiky

- Posuďme zápis

$$x^3 - 3x^2 + 17 = \sqrt{x^2 - 36}$$

a zápis stejné rovnice (Luca Pacioli kolem 1500):

$$R.3^a\tilde{m}.3.ce.\bar{p}.\underline{17 \qquad\quad R}ce.\tilde{m}.36$$

- Podobně se má Boeing 777 ku Nině, Pintě a Santa Marii.
- Křankové pochopitelně často vymyslí nové značení.
- Někdy stojí za zamyšlení.

Tři nové formule

- V roce 1978 publikoval W.D. tři nové formule, konkrétně

$$(fg)^* = c + f^*g - f^{**}g' + f^{***}g'' - \dots,$$

pro $G^{(n)}$ jdoucí k nule,

$$A^{1/e} \approx \frac{(e-1)c^e + Ad^e}{ec^{e-1}d},$$

a konečně

$$\overline{z}\sqrt{} \approx \frac{\ln z + e}{\ln e + 1}.$$

Ke druhé křankově formuli

- W.D. nalezl rekurentní posloupnost konvergující k $\sqrt[n]{A}$, kde

$$a_{k+1} = (n-1)a + k^n + Ab_k^n, \quad b_{k+1} = na_k^{n-1} b_k.$$

Pro $n = 2$ dostáváme

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{a_k^2 + Ab_k^2}{2a_k b_k}.$$

Pro $A = 3$ máme aproximace $\sqrt{3}$ zlomky

$$\frac{7}{4}, \frac{97}{56}, \frac{18817}{10864}.$$

Poslední umocněn na druhou dává 3.0000000047. W.B. zde konstruuje řetězový zlomek čísla $\sqrt{A}$.

Ke druhé křankově formuli 2

- Avšak pro $n = 3$ se konvergence jeho posloupnosti

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{a_k^3 + Ab_k^3}{3a_k b_k}.$$

řetězovými zlomky vysvětlit nedá.

Ke třetí křankově formuli

- Je třeba přijít na to, že obrácená odmocnina znamená kořen rovnice

$$y^y = z$$

a e není e, nýbrž ‘estimate’.

Pak dostáváme další aproximující posloupnost

$$a_{k+1} = \frac{\log z + a + k}{\log a_k + 1}.$$

Vzorec nádherně funguje. Například pro $z = 10$ dává $y = 2.5061881$, což umocněno na sebe dává 10.000076.

V pozadí je rovnice

$$y = \frac{\log z + y}{}.$$

Zastavení jedenácté: legislativa

Hlavní postavy názorového střetu

Clarence Abiathar Waldo,
A. M., Ph. D.,
Head Professor of Mathematics.

Matematik a mnoho politiků

V roce 1894 Edward J. Goodwin (1825–1902) dokázal kvadraturu kruhu

a přitom odhalil, že π *není rovno* 3.14, *jak nás učili ve škole*.

V roce 1897 přiměl zákonodárce z Posey County, aby legislativcům předložil návrh zákona.

6.2.1897 byl zákon č. 246 (π-bill of Indiana) jednomyslně schválen v Indiana House of Representatives

a 11.2.1897 byl zákon Senátem odložen na neurčito.

Text zákona

- *A bill for an act introducing a new mathematical truth and offered as a contribution to education to be used only by the state of Indiana free of cost by paying any royalties whatever on the same, provided it is accepted by the official action of the legislature of 1897.*
- Nebyl žádný důvod zákon neschválit.
- Návrh dále obsahoval nesmyslné matematické bábolení, kterému nikdo nerozuměl.
- A hlavně: *Důkazem hodnoty, kterou autor nabízí státu Indiana darem, je fakt, že jeho řešení trisekce úhlu, duplikátu krychle a kvadratury kruhu byly přijaty do American Mathematical Monthly, předního matematického časopisu v této zemi.*

A jak to bylo s tím časopisem

- Křankovy výplody se v AMM skutečně objevily, kvadratura kruhu 1894, volume 1, ale v sekci "Queries and Information" a s poznámkou 'Published by the request of the author" (tedy něco jako neplacená inzerce). Zbylá dvě řešení se objevila v AMM 1895.
- Goodwinova řešení zněla takto: *Trisekci úhlu provedeme trisekcí jeho tětivy, ke zdvojení krychle je třeba prodloužit její stranu o 26 procent.*
- Na kvadraturu kruhu spotřeboval Goodwin dvě stránky.

Smutný konec

- V roce 1902 vyšel ve městě Springfield, Indiana, Goodwinův nekrolog *End of a Man Who Wanted to Benefit the World*.
- Píše se zde, mimo jiné, *He has devoted his last years to have the government recognize and include in its schools at West Point and Annapolis his method of squaring the circle.*

  ...
- *He was doomed to disappointment, and in the peaceful confines of village life the tragedy of a fruitless ambition was enacted.*
- Vzdávejme každodenně hlasitě dík za to, že nejsme křankové.

A kolik je tedy vlastně to π?

- A circular area is equal to the square on a line equal to the quadrant of the circumference ...
- Tedy:

$$\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2 = \pi r^2.$$

- Tedy $\pi = 4$.
- A o kousek níže: This new measure of the circle has happily brought to light the ratio of the chord and arc of which is 7:8.
- Tedy

$$\frac{\sqrt{\pi} r}{\pi r/2} = \frac{7}{8}.$$

- Jinými slovy,

$$\pi = \frac{16\sqrt{2}}{7} = 3.232488\ldots$$

Hodnota π

- David Singmaster napočítal v Goodwinově pojednání devět různých hodnot π.
- Stát Indiana mohl od Goodwina získat opravdu mnohé.

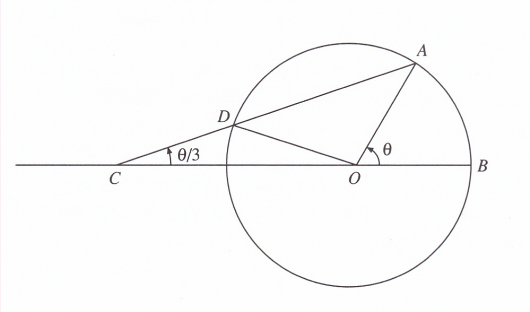
Zastavení dvanácté: trisekce

Trisekce

- Úkolem je rozdělit zadaný úhel na třetiny pomocí kružítka a pravítka.
- Je dokázáno (dávno), že to nejde.
- Na vině je, jak obvykle, třetí odmocnina.
- Kružítkem a pravítkem je možné konstruovat druhé odmocniny.
- Jakkoli dlouho si budeme hrát s druhými odmocninami, nedostaneme třetí.
- Na křanky tato argumentace neplatí.

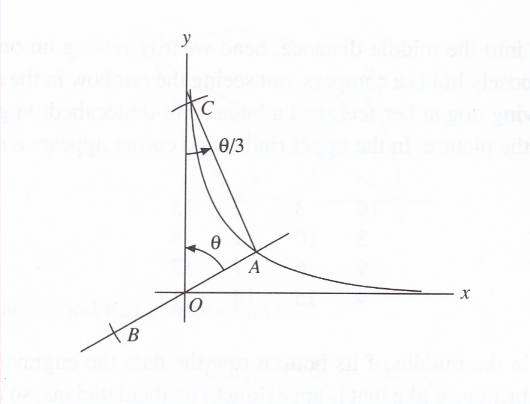
A zase neeukleidovské pomůcky

- Řekové pravděpodobně věděli/tušili, že problém je neřešitelný.
- Nalezli několik řešení s pomůckami navíc.
- Jedna možnost je použít protraktor.
- Archimedovo řešení s *prevítkem* (pravítkem se dvěma značkami):



Moderní konstrukce

- Nové důkazy se objevují dodnes.
- Následující je z roku 1989:



Albrecht Dürer (1471–1528) a jeho Melencolia

Co málokdo ví o Albrechtu Dürerovi

- Deset let po Melencolii vydal Dürer brožurku *The Printer's Manual*
- A manual of Measurement of Lines, Areas and Solids by Means of Compass and Ruler
- Assembled by Albrecht Dürer for All Lovers of Art with Appropriate Illustrations Arranged to be Printed in the Year MDXXV

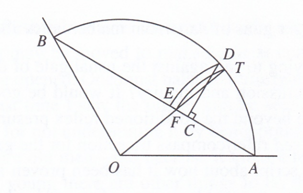
Co v příručce najdeme

- jak vepsat čtverec do kruhu
- jak sestrojit pětiúhelník, šestiúhelník a devítiúhelník
- jak konstruovat dláždění
- další konstrukce pomocí kružítka a pravítka.

- Dürer nerozlišuje mezi přesnými konstrukcemi (pětiúhelník) a přibližnými konstrukcemi (devítiúhelník)
- Jeho trisekce (*'Method for dividing an arc into three equal parts'*) je pochopitelně jen přibližná, ale je to jedna z nejlepších známých aproximací všech dob.

Dürerova trisekce

- Návod k trisekci:



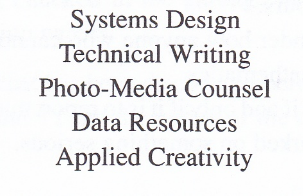
- Posuďme, jak dobrá je to aproximace:

θ	Dürer's $\theta/3$	Error
9°	3° 0′ 12.9″	12.9″
18°	5° 59′ 56.8″	1.2″
27°	8° 59′ 59.7″	.3″
36°	12° 0′ 0.1″	.1″
45°	14° 59′ 59.8″	.2″
54°	17° 59′ 59.7″	.3″
63°	20° 59′ 58.7″	1.3″
72°	23° 59′ 56.8″	3.2″
81°	26° 59′ 52.6″	7.4″

- Při stejné chybě (0.2″) dopadne raketa vyslaná ze Severní Dakoty na Moskvu 50 stop od cíle.

No a co na to křank

- V roce 1988 napsal křank D.L. z Kalifornie na papíře s hlavičkou



Systems Design
Technical Writing
Photo-Media Counsel
Data Resources
Applied Creativity

toto:

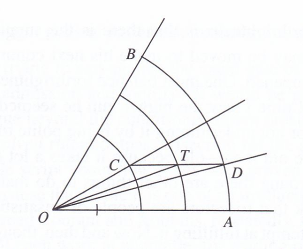
- *Vyřešil jsem antický problém trisekce úhlu. Je mi známo vše o tom, že a proč to nejde. Vím o redukci problému na třetí odmocninu. Četl jsem opakovaně Couranta, Robbinse i Kleina. Hledám vydavatele a sponzora pro mou knihu.*
  Můj objev nepochybně galvanizuje matematiky celého světa. Představte si slávu, kterou by slízl Pythagoras, kdyby byl schopen učinit můj objev.

Odpověď křankovi od univerzitního profesora matematiky

- Kdyby Vám, jak píšete, bylo opravdu známo *vše* o neřešitelnosti antického problému trisekce, byl byste neplýtval časem na jeho řešení. Mně vše známo je a mohu Vás ujistit, že to, co jste sepsal, nikoho nezajímá. Zanechte marné snahy a jděte dělat něco užitečného. Pomyslete na tu spoustu opravdové matematiky, kterou jste si mohl osvojit během těch stovek tisíců zbytečných hodin.

A ještě jedno řešení

- Většina trisektorů jsou staří pánové.
- To je dáno tím, že trisekce dá jednomu zabrat a v mládí jsou k mání jiné atrakce.
- Výjimku tvoří řešení křanka, který sám sebe popsal jako *'chovanec mentálního zařízení v rámci nápravného zařízení'*:



- Chyba této konstrukce je $10'$ pro úhel 60° a $32'$ pro pravý úhel.
- To už by raketu odklonilo moc daleko.

Zastavení třinácté: FLT

Fermatova ‘malá’ věta

- Je-li p prvočíslo a a není násobek p, pak $a^{p-1} - 1$ je násobek p

Vyzkoušíme: $p = 11$, $a = 5$:

$$5^{10} - 1 = 9765624 = 11 \cdot 887784.$$

A ještě třeba: $p = 17$, $a = 5$:

$$5^{16} - 1 = 2^6 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 313 \cdot 11489.$$

A tak dále pro jakékoli prvočíslo.

Kudy věta, tudy křank

Jeden z častých omylů křanků je, že implikace platí vždy všemi směry.

Z křankova dopisu (nedatováno, nepodepsáno):

Zasílám Vám důkaz svého objevu, že

- Je-li $2^{p-1} - 1$ dělitelné číslem p, pak p je prvočíslo.

Vychází to pro $n = 4, 6, 8, 9, 10, 12$.

Věta bohužel neplatí, protipříklad je $p = 341$, protože 341 sice dělí $2^{340} - 1$, ale $341 = 11 \cdot 31$.

Neprůstřelná argumentace křankova

Dobře, tak tedy 341 není prvočíslo, ale je to součin prvočísel!

Na závěr:

co se nám sem už nevešlo

Další významná pole uplatnění křanků

- věta o čtyřech barvách
- kvadratura kruhu
- The Constant Society
- algebraické rovnice pátého stupně
- Gödelovy věty
- zlatý řez
- prvočíselná dvojčata
- Van der Polova rovnice

A na úplný závěr něco pro popírače teorie třesku