OBČASNÝ SEMINÁŘ
Z
MATEMATICKÉ ANALÝZY

PETR VODSTRČIL

16.4. 2024

VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A INFORMATIKY

KATEDRA
APLIKOVANÉ
MATEMATIKY

STOLZOVA VĚTA

VĚTA: Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti a posloupnost (b_n) nechť je ryze monotónní.

Nechť dále platí:

1) $\lim a_n = \lim b_n = 0$ nebo $\lim |b_n| = +\infty$.

2) $\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \ (\in R^*)$.

Pak:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L.$$

DŮKAZ: Dokážeme nejprve následující tvrzení: (případ $L=0$)

Nechť jsou (α_n), (β_n) posloupnosti a (β_n) je ryze monotónní. Jestliže platí

1) $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$,

2) $\lim \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = 0$,

pak $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$.

Nechť $\varepsilon>0$ je dáno. K tomuto ε tedy existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, platí

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n}\right|<\varepsilon,\text{ tj.}$$

$$\boxed{|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\varepsilon\cdot|\beta_{n+1}-\beta_n|.}\qquad\begin{pmatrix}n\in\mathbb{N},\\ n\geq n_0\end{pmatrix}$$

Zvolme $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq n_0$, $m>n$, libovolně. Pak z poslední nerovnosti vyplývá

$$\begin{array}{c}\left|\sum\limits_{i=n}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\right|\\ \|\\ |\alpha_m-\alpha_n|\end{array}\leq\boxed{\sum_{i=n}^{m-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i|<\varepsilon\cdot\sum_{i=n}^{m-1}|\beta_{i+1}-\beta_i|}=$$

$$\overset{\text{ryzí monotonie }(\beta_n)}{=}\varepsilon\cdot\left|\sum_{i=n}^{m-1}(\beta_{i+1}-\beta_i)\right|=\varepsilon\cdot|\beta_m-\beta_n|.$$

Vidíme tedy, že platí

$$\left|\frac{\alpha_m-\alpha_n}{\beta_m-\beta_n}\right|<\varepsilon.\qquad\begin{pmatrix}m,n\in\mathbb{N},\\ m,n\geq n_0,\\ m>n\end{pmatrix}$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je libovolné, ale pevné. Limitním přechodem $m \to +\infty$ obdržíme z nerovnosti

$$\left| \frac{\alpha_m - \alpha_n}{\beta_m - \beta_n} \right| < \varepsilon$$

nerovnost

$$\left| \frac{0 - \alpha_n}{0 - \beta_n} \right| \leq \varepsilon, \text{ tj.}$$

(využili jsme toho, že $\alpha_m \to 0$, $\beta_m \to 0$)

$$\left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right| \leq \varepsilon .$$

To však znamená, že $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$.

Nyní předpokládejme, že (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti a (b_n) je ryze monotónní. Dále nechť

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad \text{a}$$

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \; (\in \mathbb{R}).$$

Položme

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= a_n - L \cdot b_n \\ \beta_n &= b_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0, \\ (\beta_n) \text{ ryze monotónní.} \end{array}$$

Dále platí

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n-L\cdot(b_{n+1}-b_n)}{(b_{n+1}-b_n)}$$

$$= \underbrace{\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}}_{L} - \underbrace{L\cdot \lim \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}-b_n}}_{L} = 0.$$

Podle pomocného tvrzení platí

$$0 = \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \frac{a_n - L\cdot b_n}{b_n} =$$

$$= \lim \frac{a_n}{b_n} - \underbrace{L\cdot \lim \frac{b_n}{b_n}}_{L},$$ odkud

$$\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = L.}$$

Případy $L = \pm\infty$ dokážeme stejným způsobem jako případ $L=0$, tj. z nerovnosti

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \gtrless K$$

odvodíme nerovnost $\frac{a_n}{b_n} \underset{\leq}{\geq} K$.

CVIČENÍ

Dokázali jsme část Stolzovy věty týkající se případu $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Nyní nás ještě čeká případ $\boxed{\lim |b_n| = +\infty}$. Protože (b_n) je ryze monotónní, lze předp., že $\boxed{(b_n) \text{ je rostoucí}}$. Pak ale platí

$$\boxed{\lim b_n = +\infty.}$$

$\boxed{\text{POZN:}}$ Případ (b_n) klesající bychom řešili podobně, popř. bychom místo (b_n) vzali $(-b_n)$.

Dokažme opět pomocné tvrzení: (případ $L=0$)

Nechť (α_n), (β_n) jsou posloupnosti, (β_n) je rostoucí a $\lim \beta_n = +\infty$.

Jestliže $\lim \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = 0$, pak

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0.$$

Nechť $\varepsilon>0$ je dáno. K tomuto ε existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, platí

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n}\right| < \varepsilon, \text{ tj.}$$

$$\boxed{|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < \varepsilon\cdot|\beta_{n+1}-\beta_n|.} \quad \left(\begin{array}{c} n\in\mathbb{N}, \\ n\geq n_0 \end{array}\right)$$

Nechť nyní $n>n_0$ je libovolně zvolené přirozené číslo. Pak z poslední nerovnosti dostaneme

$$\begin{array}{c} \left|\sum\limits_{i=n_0}^{n-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\right| \\ \| \\ |\alpha_n-\alpha_{n_0}| \end{array} \leq \boxed{\sum_{i=n_0}^{n-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i| < \varepsilon\cdot\sum_{i=n_0}^{n-1}|\beta_{i+1}-\beta_i|} = \overset{\nearrow (\beta_n) \text{ ryze monotónní}}{=} \varepsilon\cdot\left|\sum_{i=n_0}^{n-1}(\beta_{i+1}-\beta_i)\right| = \varepsilon\cdot|\beta_n-\beta_{n_0}|.$$

Platí tedy:

$$\boxed{|\alpha_n-\alpha_{n_0}| < \varepsilon\cdot|\beta_n-\beta_{n_0}|.} \quad \left(\begin{array}{c} n\in\mathbb{N}, \\ n>n_0 \end{array}\right)$$

Protože $\lim\beta_n=+\infty$, lze předp., že $\beta_n>0$.

Vydělme poslední nerovnost výrazem β_n (>0).
Obdržíme:

$$\boxed{\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| < \varepsilon \cdot \left|1 - \frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right|}. \quad \begin{pmatrix} n\in\mathbb{N}, \\ n>n_0 \end{pmatrix}$$

Odtud:

$$\boxed{\begin{aligned} \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| &\leq \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| + \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| < \\ &< \varepsilon \cdot \left|1 - \frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right| + \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| \leqq \\ &\leqq \varepsilon \cdot \left(1 + \left|\frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right|\right) + \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right|. \end{aligned}} \quad \begin{pmatrix} n\in\mathbb{N}, \\ n>n_0 \end{pmatrix}$$

Protože $\boxed{\lim \beta_n = +\infty}$, existuje k číslu ε (které bylo pevně dáno) číslo $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, platí

$$\left|\frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right| < 1 \quad \text{a} \quad \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| < \varepsilon .$$

Proto pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > \max\{n_0, n_1\}$, platí

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| < 3\varepsilon, \text{ tj. } \boxed{\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0}.$$

Nechť nyní (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti a navíc posloupnost (b_n) je rostoucí a platí

$$\lim b_n = +\infty.$$

Předpokládejme, že

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \ (\in \mathbb{R}).$$

Definujme $\alpha_n = a_n - L \cdot b_n$ (jako v 1. části důkazu)

$\beta_n = b_n.$

Pak $\lim \dfrac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = 0 \overset{\text{POM. TVRZENÍ}}{\Longrightarrow}$

$$\Longrightarrow \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = L}.$$

Případy $L = \pm\infty$ lze dokázat opět podobně jako případ $L=0$.

CVIČENÍ

POZN: Předpoklad ryzí monotonie posloupnosti (b_n) nelze bez větší vynechat, jak ukazují následující příklady:

Zvolme posloupnosti (a_n) a (b_n) takto:

$$\begin{array}{lllllllllllll}
a_n: & \boxed{\sqrt{1}}, & \sqrt{2}, & \sqrt{3}, & \boxed{\sqrt{4}}, & \sqrt{5}, & \sqrt{6}, & \sqrt{7}, & \sqrt{8}, & \boxed{\sqrt{9}}, & \sqrt{10}, & \sqrt{11}, & \dots \\
b_n: & \boxed{1}, & 2, & 1, & \boxed{2}, & 3, & 2, & 3, & 2, & \boxed{3}, & 4, & 3, & \dots
\end{array}$$

Všimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{a_{n^2} = b_{n^2} = n.}$$

Obecněji, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \sqrt{n},$$

$$b_n = \left[\sqrt{n}\right] + \frac{1+(-1)^{n-[\sqrt{n}]^2+1}}{2}.$$

Není těžké se přesvědčit, že

$$\left.\begin{array}{l}\Delta a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0,\\ \Delta b_n \in \{-1,1\}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = 0.}$$

Zřejmě platí $\boxed{\lim b_n = +\infty.}$

Pro posloupnost (b_n) jistě platí

$$\sqrt{n}-1 \leqslant b_n \leqslant \sqrt{n}+1 \overset{[n\geq 2]}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = 1.} \quad \left(\neq \lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}\right)$$

JINÝ PŘÍKLAD:

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Jistě $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, ale posloupnost (b_n) není ryze monotónní.

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\Delta a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)},$$

$$\Delta b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right] =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Odtud máme:

$$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \longrightarrow 0.$$

Na druhé straně $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$, a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n}$ neexistuje.

12

POZN:

V případě neexistence limity $\boxed{\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}}$ nelze nic usuzovat o (ne)existenci $\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n}}$.

Př: $a_n = (-1)^n, \; b_n = n.$

Jistě $b_n \to +\infty$ a (b_n) je ryze monotónní.

Dále $\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{1} \Rightarrow \boxed{\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \text{ neex.}}$

Na druhé straně $\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = 0.}$

Př: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \; b_n = \frac{1}{n}.$

Jistě $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ a (b_n) je ryze monot.

Dále

$$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot \frac{2n^2+2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}}{-\frac{1}{n(n+1)}} = (-1)^n \cdot \frac{2n^2+2n+1}{n^2+n}.$$

$\Rightarrow \lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$ neexistuje, ale $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0.$

PŘÍKLADY:

Př: Vypočtěte limitu

$$\boxed{\lim \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}.}$$

$\left[p \in \mathbb{R}^+ \text{ je parametr}\right]$

Řešení: Protože $p \in \mathbb{R}^+$, je $\lim n^{p+1} = +\infty$ a posloupnost (n^{p+1}) je rostoucí. Lze tedy použít Stolzovu větu.

Proto platí:

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \lim \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$$

(za předpokladu, že limita napravo existuje).

Pokusme se tedy limitu napravo spočítat.

Kdyby bylo $p \in \mathbb{N}$, mohli bychom použít binomickou větu. Pak bychom dostali:

$$\lim \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \lim \frac{n^p + \dots\dots + 1}{\cancel{n^{p+1}} + \binom{p+1}{1} n^p + \dots + 1 - \cancel{n^{p+1}}} = \frac{1}{p+1}.$$

Nyní ukážeme, že stejný výsledek dostaneme i pro obecné $p \in \mathbb{R}^+$.

Výraz $(n+1)^{p+1} - n^{p+1}$ ze jmenovatele odhadneme pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

Jestliže si vezmeme funkci $f(x) = x^{p+1}$ na intervalu $\langle n, n+1 \rangle$, dostaneme

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = (p+1) \cdot \xi^p, \text{ kde } n < \xi < n+1.$$

Proto platí

$$(p+1) \cdot n^p \leq (n+1)^{p+1} - n^{p+1} \leq (p+1) \cdot (n+1)^p.$$

Z toho vyplývá, že

$$\underbrace{\frac{(n+1)^p}{(p+1)\cdot(n+1)^p}}_{\frac{1}{p+1}} \leq \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} \leq \underbrace{\frac{(n+1)^p}{(p+1)\cdot n^p}}_{\frac{1}{p+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow \frac{1}{p+1}}$$

$$\Longrightarrow \lim \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim \frac{1^p+2^p+\ldots\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.}$$

CVIČENÍ: (pokračování předchozího příkladu)

Dokažte, že pro každé $p \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\lim \left[n\cdot\left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} - \frac{1}{p+1} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

16

DŮSLEDKY STOLZOVY VĚTY :

Nechť (a_n) je posloupnost a nechť existuje

$$\lim a_n = L \ (\in \mathbb{R}^*).$$

Pak $$\lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = L.$$

(limita pol. aritmetických průměrů)

Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel a nechť existuje

$$\lim a_n = L \ (\in \mathbb{R}^*).$$

Pak $$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = L.$$

(limita pol. geometrických průměrů)

17

Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel a nechť existuje

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \ (\in \mathbb{R}^*).$$

Pak

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Př: Vypočtěte $\boxed{\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}$.

Řešení: Použijeme poslední důsledek. Položme

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{a vypočteme}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} =$$

$$= \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} =$$

$$= \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Odtud plyne, že

$$\boxed{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e.}$$

ZOBECNĚNÍ STOLZOVY VĚTY:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim a_n = \lim b_n = 0 \\ \quad \text{nebo} \quad \lim |b_n| = +\infty \\ \\ \bullet\ (b_n) \text{ ryze monotónní} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\liminf \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \\ &\qquad \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}. \end{aligned}}$$