Občasný seminář z matematické analýzy, http://am.vsb.cz/osma

Kam se dokutálí Fordovy kruhy

Mirko Rokyta, KMA MFF UK Praha

Ostrava, 16. 4. 2026

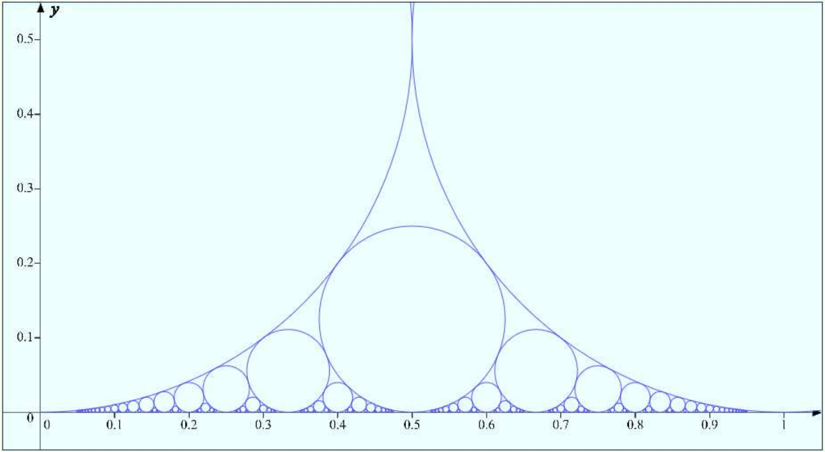
1. Co jsou Fordovy kruhy

1. Co jsou Fordovy kruhy

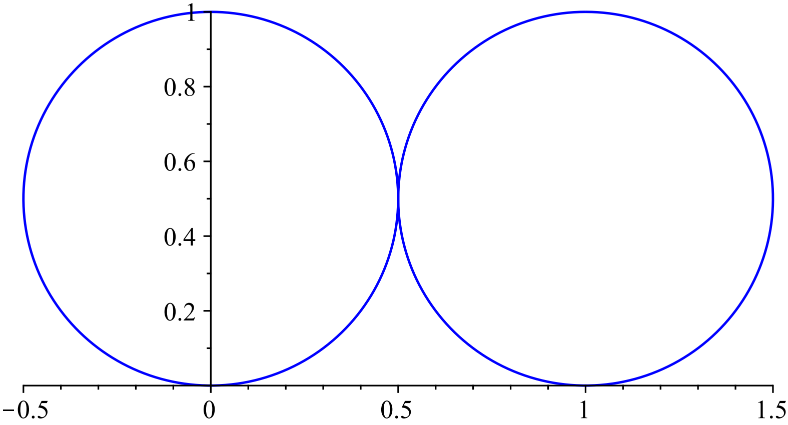
To na titulní stránce nebyly ty správné Fordovy kruhy.

1. Co jsou Fordovy kruhy

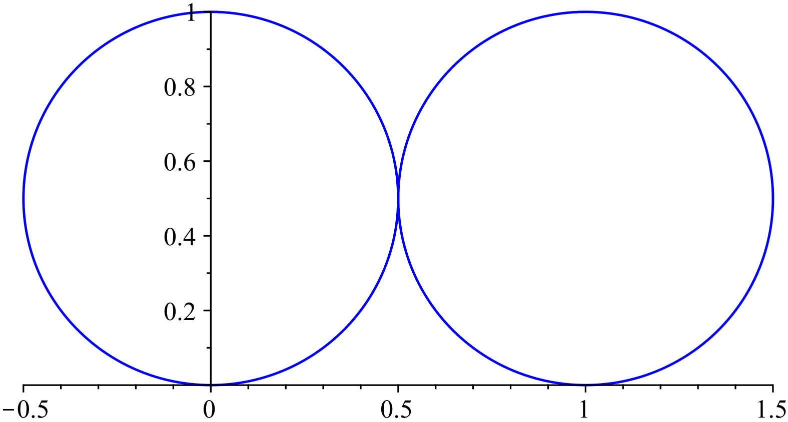
To na titulní stránce nebyly ty správné Fordovy kruhy.



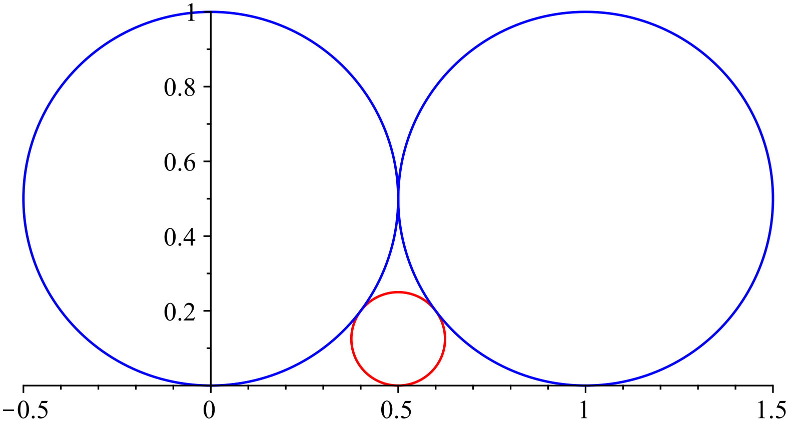
Tohle jsou ony.



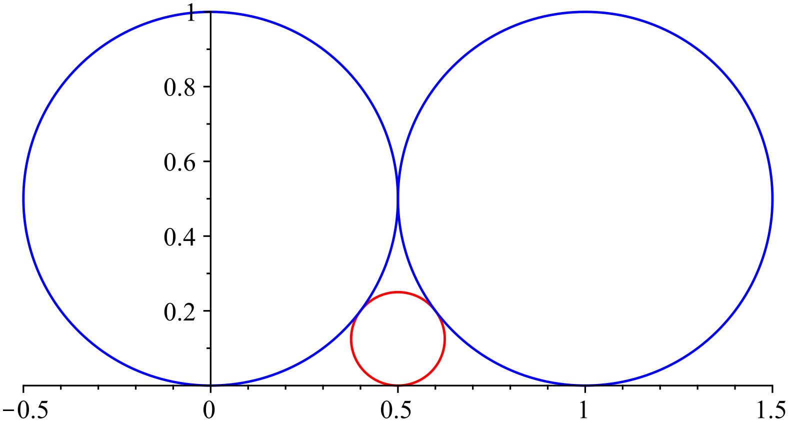
Krok 1: Dva kruhy o průměru 1 "nad body" 0 a 1.



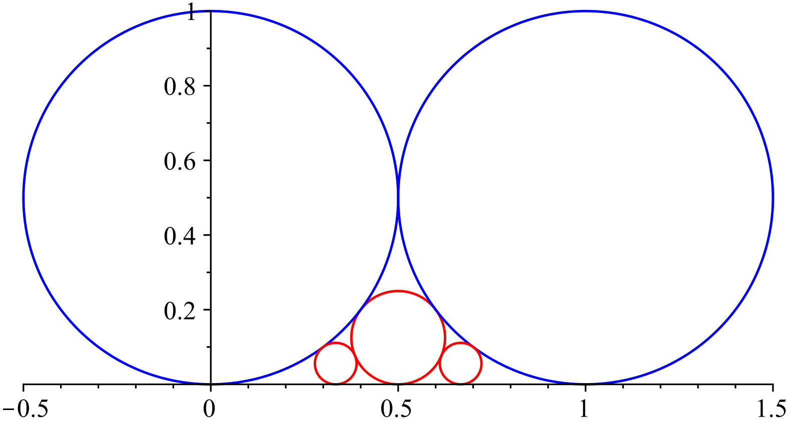
Krok 1: Dva kruhy o průměru 1 "nad body" 0 a 1.
Tj. dotýkají se sebe i osy x a mají poloměr $\frac{1}{2}$.



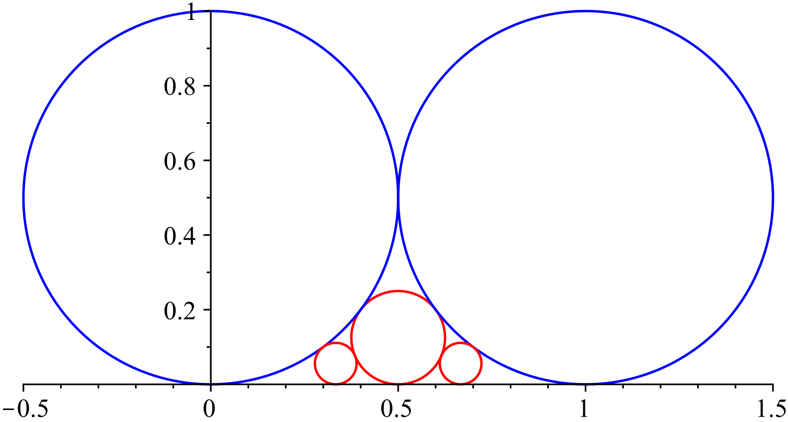
Krok 2: "Mezikruh" – dotýká se obou předchozích i osy *x*.



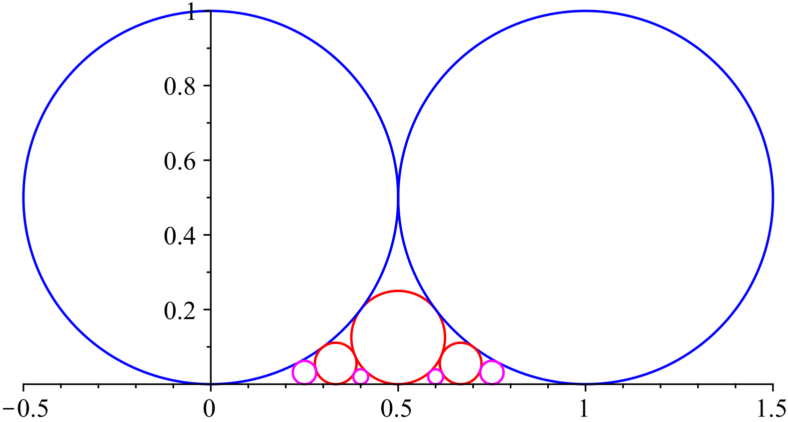
Krok 2: "Mezikruh" – dotýká se obou předchozích i osy x.
Je "nad bodem" $\frac{1}{2}$, ale jaký má poloměr?



Krok 3: Kruhy, tečné k ose *x* a předchozím kruhům.

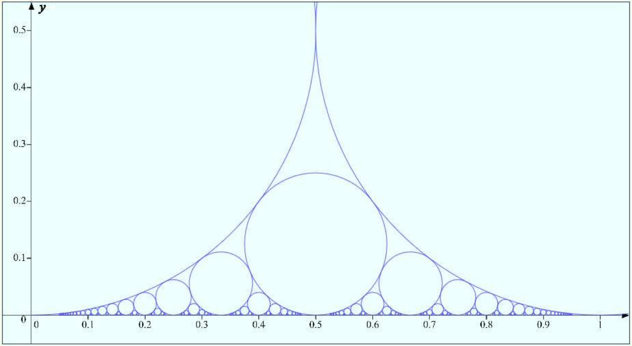


Krok 3: Kruhy, tečné k ose x a předchozím kruhům.
Už není intuitivně zřejmý ani poloměr ani bod dotyku.

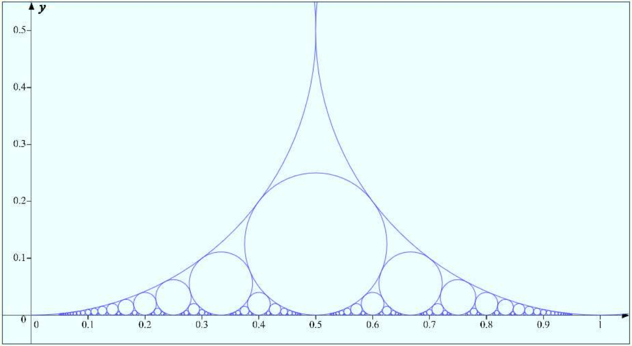


Krok 4: . . . a vlastně se ukazuje, že ani kruhy z každé další "generace" nemusí být shodné.

A takto se pokračuje až do nekonečna.



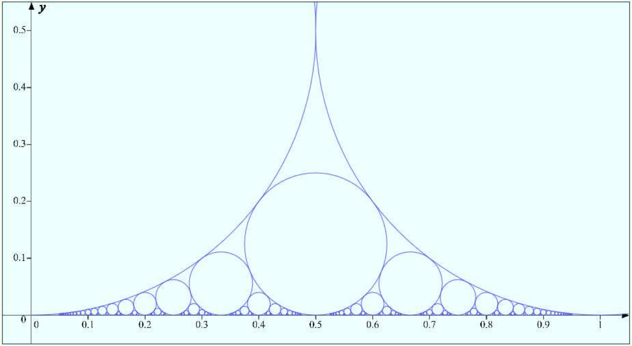
A takto se pokračuje až do nekonečna.



Základní otázky:

- střed, poloměr, bod dotyku s osou x

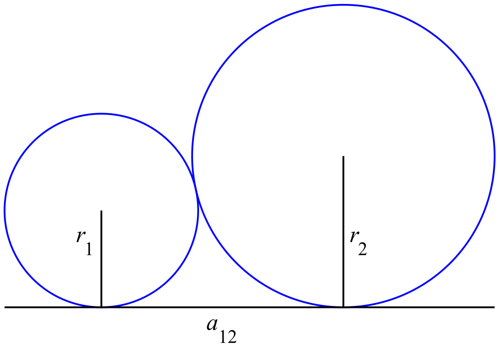
A takto se pokračuje až do nekonečna.



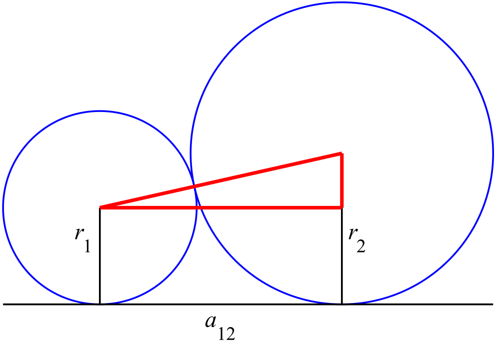
Základní otázky:

- střed, poloměr, bod dotyku s osou x
- osa x je tečnou všech Fordových kruhů $\Longrightarrow$ bod dotyku je x-ová souřadnice středu

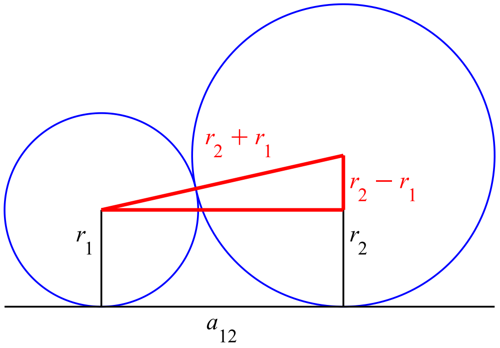
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



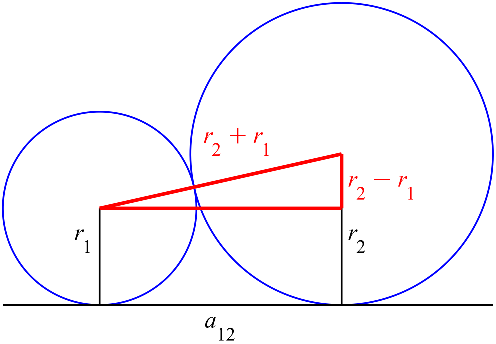
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



Dva "sousední" Fordovy kruhy:

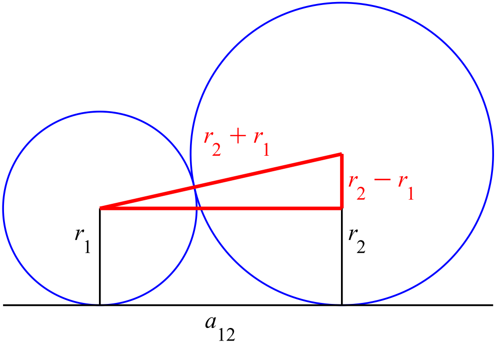


Dva "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{12} = \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

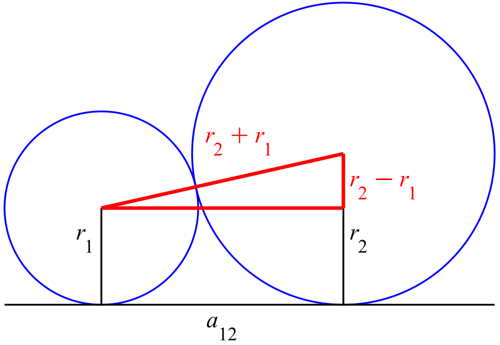
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



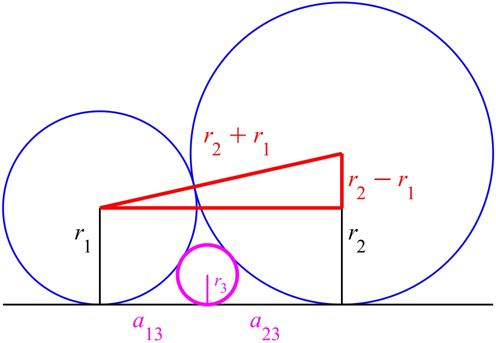
$$a_{12} = \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$$

(dvojnásobek geometrického průměru)

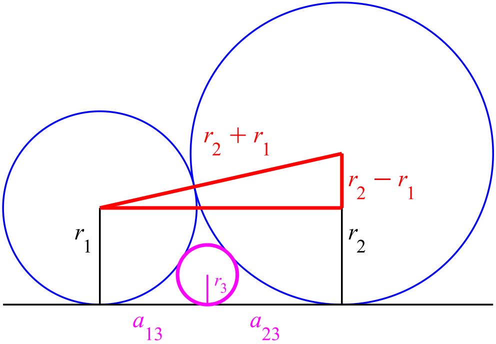
Dva "sousední" Fordovy kruhy:



Tři "sousední" Fordovy kruhy:

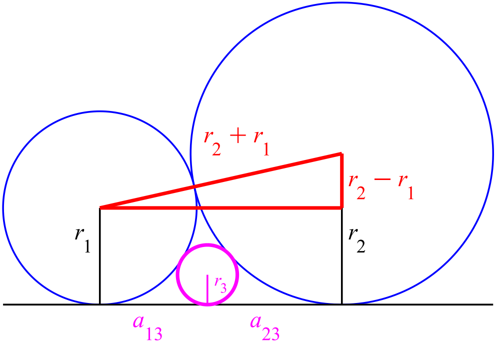


Tři "sousední" Fordovy kruhy:



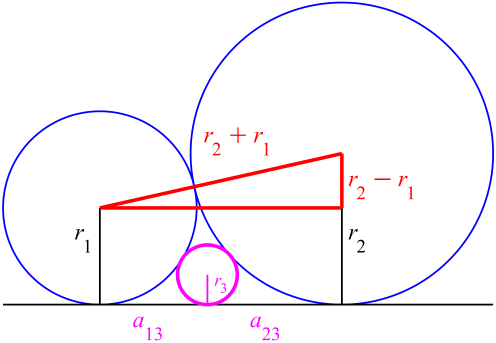
$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

Tři "sousední" Fordovy kruhy:



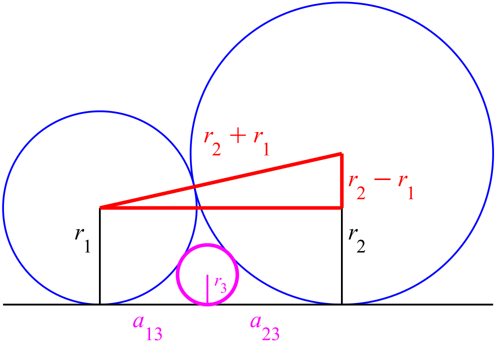
$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3} \qquad a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

Tři "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3} \qquad a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3} \qquad a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

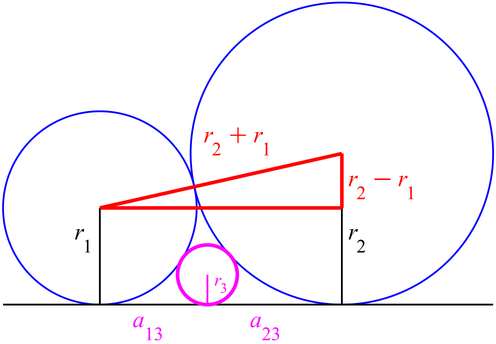
Tři "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3} \qquad a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3} \qquad a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

$$a_{12} = a_{23} + a_{13}$$

Tři "sousední" Fordovy kruhy:

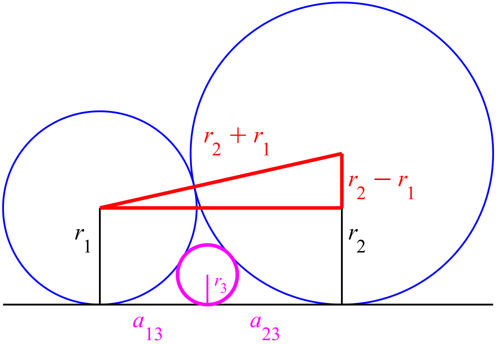


$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3} \qquad a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3} \qquad a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

$$a_{12} = a_{23} + a_{13}$$

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{r_1 r_3} \qquad \Big| : 2\sqrt{r_1 r_2 r_3}$$

Tři "sousední" Fordovy kruhy:



$$a_{13} = 2\sqrt{r_1 r_3} \qquad a_{23} = 2\sqrt{r_2 r_3} \qquad a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

$$a_{12} = a_{23} + a_{13}$$

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{r_1 r_3} \qquad | : 2\sqrt{r_1 r_2 r_3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \qquad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \qquad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18},\ a_{12} = \tfrac{1}{2}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned} r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1 \\ r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18},\ a_{12} = \tfrac{1}{2} \\ r_1 = \tfrac{1}{8},\ r_2 = \tfrac{1}{18} \quad & \end{aligned}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned}
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1 \\
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18},\ a_{12} = \tfrac{1}{2} \\
r_1 = \tfrac{1}{8},\ r_2 = \tfrac{1}{18} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{50},\ a_{12} = \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned}
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1\\
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18},\ a_{12} = \tfrac{1}{2}\\
r_1 = \tfrac{1}{8},\ r_2 = \tfrac{1}{18} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{50},\ a_{12} = \tfrac{1}{6}\\
r_1 = \tfrac{1}{18},\ r_2 = \tfrac{1}{50} \quad &
\end{aligned}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned}
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1\\
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18},\ a_{12} = \tfrac{1}{2}\\
r_1 = \tfrac{1}{8},\ r_2 = \tfrac{1}{18} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{50},\ a_{12} = \tfrac{1}{6}\\
r_1 = \tfrac{1}{18},\ r_2 = \tfrac{1}{50} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{128},\ a_{12} = \tfrac{1}{15}
\end{aligned}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \qquad (1)$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \qquad (2)$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{array}{rcl}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8},\ a_{12} = 1 \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18},\ a_{12} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50},\ a_{12} = \frac{1}{6} \\
r_1 = \frac{1}{18},\ r_2 = \frac{1}{50} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{128},\ a_{12} = \frac{1}{15}
\end{array}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$
$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned}
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1 \\
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18},\ a_{12} = \tfrac{1}{2} \\
r_1 = \tfrac{1}{8},\ r_2 = \tfrac{1}{18} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{50},\ a_{12} = \tfrac{1}{6} \\
r_1 = \tfrac{1}{18},\ r_2 = \tfrac{1}{50} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{128},\ a_{12} = \tfrac{1}{15}
\end{aligned}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.
Pozor, neplatí to pro libovolné dvojice racionálních r_1, r_2:

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$
$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{aligned}
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8},\ a_{12} = 1\\
r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18},\ a_{12} = \tfrac{1}{2}\\
r_1 = \tfrac{1}{8},\ r_2 = \tfrac{1}{18} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{50},\ a_{12} = \tfrac{1}{6}\\
r_1 = \tfrac{1}{18},\ r_2 = \tfrac{1}{50} \quad &\Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{128},\ a_{12} = \tfrac{1}{15}
\end{aligned}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.
Pozor, neplatí to pro libovolné dvojice racionálních r_1, r_2:

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{3}$$

Ty dva vztahy si zaslouží být zopakovány i na začátku další stránky:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \tag{2}$$

Postupná aplikace (1)–(2):

$$\begin{array}{rcl}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8},\ a_{12} = 1 \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18},\ a_{12} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50},\ a_{12} = \frac{1}{6} \\
r_1 = \frac{1}{18},\ r_2 = \frac{1}{50} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{128},\ a_{12} = \frac{1}{15}
\end{array}$$

Pozorování: přestože (1)–(2) obsahují odmocniny, zdá se, že generují pouze racionální čísla.
Pozor, neplatí to pro libovolné dvojice racionálních r_1, r_2:

$$r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \frac{1}{5+2\sqrt{6}},\ a_{12} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x *mají racionální souřadnice.*

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$,

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1}=\sqrt{r_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}}=\frac{1}{\sqrt{d_1}}+\frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$,

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \;\Big|\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2,\ s_j \in \mathbb{Q}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \ \Big|\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2,\ s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2} s_j^2,\ s_j \in \mathbb{Q}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2,\ s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2,\ s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \;\Big|\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2,\ s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2,\ s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k} = 2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2 \cdot \frac{1}{2}s_k^2}$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1}=\sqrt{r_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}}=\frac{1}{\sqrt{d_1}}+\frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1}=\sqrt{d_2}=1\in\mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3}\in\mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j}\in\mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j}\in\mathbb{Q} \implies d_j=s_j^2,\ s_j\in\mathbb{Q} \implies r_j=\frac{1}{2}s_j^2,\ s_j\in\mathbb{Q}$.
- $a_{jk}=2\sqrt{r_jr_k}=2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2\cdot\frac{1}{2}s_k^2}=s_js_k$

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1} = \sqrt{d_2} = 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3} \in \mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j} \in \mathbb{Q} \implies d_j = s_j^2$, $s_j \in \mathbb{Q} \implies r_j = \frac{1}{2}s_j^2$, $s_j \in \mathbb{Q}$.
- $a_{jk} = 2\sqrt{r_j r_k} = 2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2 \cdot \frac{1}{2}s_k^2} = s_j s_k \in \mathbb{Q}$.

Tvrzení

Poloměry všech Fordových kruhů jsou racionální čísla a jak jejich středy tak body dotyku s osou x mají racionální souřadnice.

Důkaz. Stačí ukázat, že všechna r_j a všechny vzdálenosti a_{jk} jsou racionální.

- Problém: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$, ale $\sqrt{r_1}=\sqrt{r_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$.
- Trik: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{\sqrt{d_3}}=\frac{1}{\sqrt{d_1}}+\frac{1}{\sqrt{d_2}}$.
- $\sqrt{d_1}=\sqrt{d_2}=1\in\mathbb{Q} \implies \sqrt{d_3}\in\mathbb{Q}$, základní krok pro indukci
- Indukcí s využitím modrého vztahu: $\sqrt{d_j}\in\mathbb{Q}$ pro všechna j, indukcí.
- $\sqrt{d_j}\in\mathbb{Q} \implies d_j=s_j^2,\ s_j\in\mathbb{Q} \implies r_j=\frac{1}{2}s_j^2,\ s_j\in\mathbb{Q}$.
- $a_{jk}=2\sqrt{r_jr_k}=2\sqrt{\frac{1}{2}s_j^2\cdot\frac{1}{2}s_k^2}=s_js_k\in\mathbb{Q}$. □

Jedno poučení z předchozího důkazu:

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2 \cdot 2^2},$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2 \cdot 2^2}, \quad \text{dotyk} = \tfrac{1}{2}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2},$ dotyk = $\frac{1}{2}$

$r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8}$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}, \qquad \text{dotyk} = \tfrac{1}{2}$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2},$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2 \cdot 2^2}, \quad \text{dotyk} = \tfrac{1}{2}$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\ r_2 = \tfrac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{2 \cdot 3^2}, \quad \text{dotyk} = \tfrac{1}{3}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2}s_j^2$$

$$\begin{array}{lcll}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2\cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2\cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & & &
\end{array}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$\begin{array}{lcll}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}, &
\end{array}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$\begin{array}{lcll}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}, & \text{dotyk} = \frac{2}{5}
\end{array}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2} \implies r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}$, dotyk = $\frac{1}{2}$

$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8} \implies r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2}$, dotyk = $\frac{1}{3}$

$r_1 = \frac{1}{8}, r_2 = \frac{1}{18} \implies r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}$, dotyk = $\frac{2}{5}$

$r_1 = \frac{1}{18}, r_2 = \frac{1}{50}$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$
\begin{array}{llll}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2\cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2\cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2\cdot 5^2}, & \text{dotyk} = \frac{2}{5} \\
r_1 = \frac{1}{18},\ r_2 = \frac{1}{50} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{128} = \frac{1}{2\cdot 8^2}, &
\end{array}
$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$\begin{array}{lcll}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}, & \text{dotyk} = \frac{2}{5} \\
r_1 = \frac{1}{18},\ r_2 = \frac{1}{50} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{128} = \frac{1}{2 \cdot 8^2}, & \text{dotyk} = \frac{3}{8}
\end{array}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$\begin{array}{lclr}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}, & \text{dotyk} = \frac{2}{5} \\
r_1 = \frac{1}{18},\ r_2 = \frac{1}{50} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{128} = \frac{1}{2 \cdot 8^2}, & \text{dotyk} = \frac{3}{8}
\end{array}$$

Zdá se dokonce, že

$$r_j = \frac{1}{2b_j^2}$$

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$\begin{array}{lcll}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}, & \text{dotyk} = \frac{2}{5} \\
r_1 = \frac{1}{18},\ r_2 = \frac{1}{50} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{128} = \frac{1}{2 \cdot 8^2}, & \text{dotyk} = \frac{3}{8}
\end{array}$$

Zdá se dokonce, že

$$r_j = \frac{1}{2 b_j^2}$$

kde b_j jsou jmenovatelé souřadnice bodu dotyku daného kruhu s osou x, pokud jsou tyto souřadnice v základním tvaru.

Jedno poučení z předchozího důkazu: r_j jsou nejen racionální, ale jsou navíc tvaru:

$$r_j = \frac{1}{2} s_j^2$$

$$\begin{array}{lcll}
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{2} \\
r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2}, & \text{dotyk} = \frac{1}{3} \\
r_1 = \frac{1}{8},\ r_2 = \frac{1}{18} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}, & \text{dotyk} = \frac{2}{5} \\
r_1 = \frac{1}{18},\ r_2 = \frac{1}{50} & \Longrightarrow & r_3 = \frac{1}{128} = \frac{1}{2 \cdot 8^2}, & \text{dotyk} = \frac{3}{8}
\end{array}$$

Zdá se dokonce, že

$$r_j = \frac{1}{2b_j^2}$$

kde b_j jsou jmenovatelé souřadnice bodu dotyku daného kruhu s osou x, pokud jsou tyto souřadnice v základním tvaru. (Plus jedno Fibonacciovské pozorování...)

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x *v bodech* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru),*

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$,

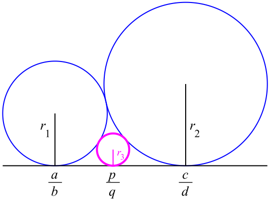
Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

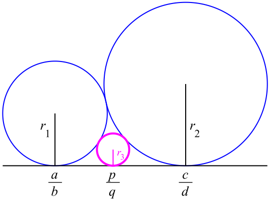
Důkaz.



Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x *v bodech* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), a mají poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, *resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, *má jejich Fordův "mezikruh" poloměr* $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.

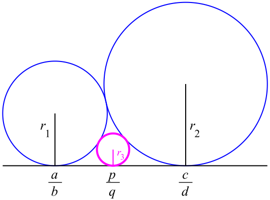


- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ $\Longrightarrow$ $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$,

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.

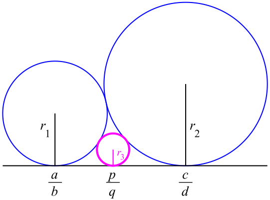


- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ $\implies$ $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$, základní krok indukce.

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.

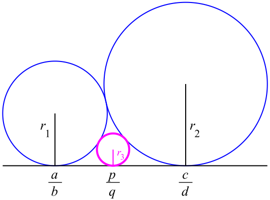


- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1} \implies r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$, základní krok indukce.
- Indukční krok: $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}}$

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.

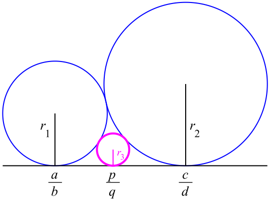


- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ $\implies$ $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$, základní krok indukce.
- Indukční krok: $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}} \implies$ $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{2b^2} + \sqrt{2d^2}$

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x *v bodech* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), a mají poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr* $\frac{1}{2(b+d)^2}$*.*

Důkaz.

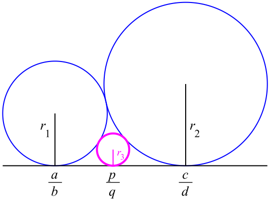


- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ $\implies$ $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$, základní krok indukce.
- Indukční krok: $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}} \implies$
$\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{2b^2} + \sqrt{2d^2} = \sqrt{2}(b+d)$

Tvrzení

Pokud se sousední Fordovy kruhy dotýkají osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), a mají poloměry $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, resp. $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, má jejich Fordův "mezikruh" poloměr $\frac{1}{2(b+d)^2}$.

Důkaz.



- Dotyk v bodě $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ $\implies$ $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$, základní krok indukce.
- Indukční krok: $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}} \implies$ $\sqrt{\frac{1}{r_3}} = \sqrt{2b^2} + \sqrt{2d^2} = \sqrt{2}(b+d) \implies r_3 = \frac{1}{2(b+d)^2}$. $\square$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $\left[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right]$ *resp.* $\left[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}\right]$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, *resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$,

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$, *resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$, *kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru),*

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$*.*

Tvrzení

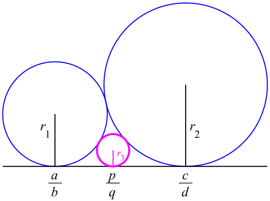
Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$*.*

Důkaz.

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$.

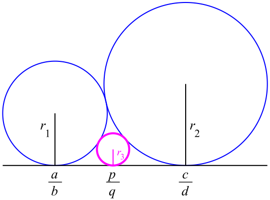
Důkaz.



Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$*.*

Důkaz.

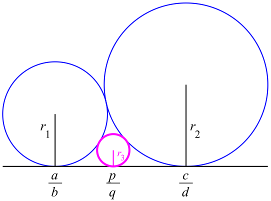


$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$*.*

Důkaz.

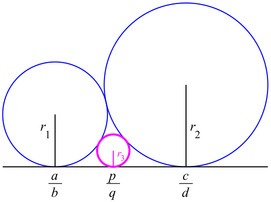


$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \implies \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 2\sqrt{\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2d^2}}$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$.

Důkaz.

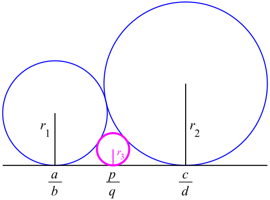


$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \implies \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 2\sqrt{\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2d^2}} = \frac{1}{bd}$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$*.*

Důkaz.

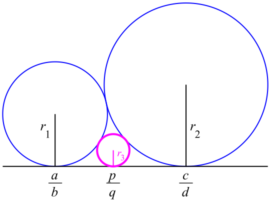


$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \implies \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 2\sqrt{\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2d^2}} = \frac{1}{bd} \quad \Big| \cdot bd$$

Tvrzení

Pokud se dotýkají Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$ *a poloměry* $r_1 = \frac{1}{2b^2}$*, resp.* $r_2 = \frac{1}{2d^2}$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), pak* $bc - ad = 1$*.*

Důkaz.



$$a_{12} = 2\sqrt{r_1 r_2} \implies \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 2\sqrt{\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2d^2}} = \frac{1}{bd} \quad \Big| \cdot bd$$

$$\implies bc - ad = 1\,.$$

□

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy* x *v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$*.*

Tvrzení

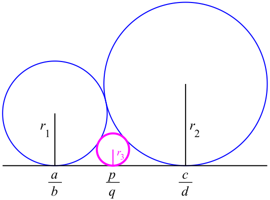
Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy* x *v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$*.*

Důkaz.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$*.*

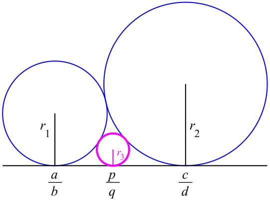
Důkaz.



Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, *kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.

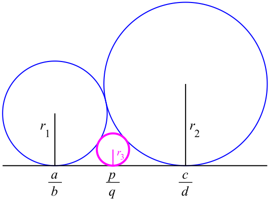


Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$*.*

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

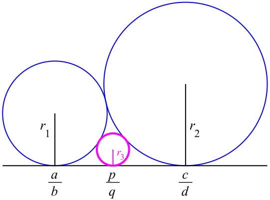
- Podle předchozího tvrzení máme

  $pb - aq = 1$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, *kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

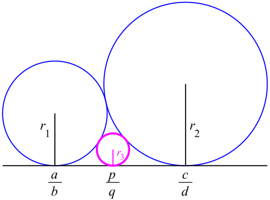
- Podle předchozího tvrzení máme

  $pb - aq = 1 \qquad cq - pd = 1$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$*.*

Důkaz.



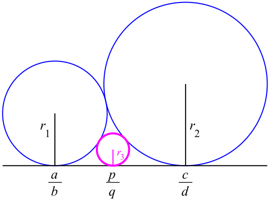
Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme
  $$pb - aq = 1 \qquad cq - pd = 1 \qquad cb - ad = 1.$$
- Násobme první rovnici číslem d, druhou číslem b, a sečtěme.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



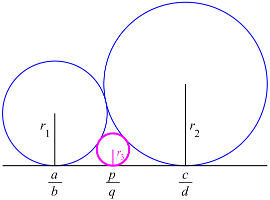
Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme
  $$pb - aq = 1 \qquad cq - pd = 1 \qquad cb - ad = 1.$$
- Násobme první rovnici číslem d, druhou číslem b, a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad}$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, *kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



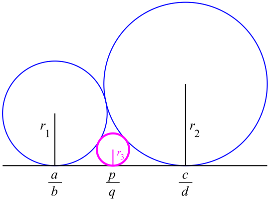
Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme
  $$pb - aq = 1 \qquad cq - pd = 1 \qquad cb - ad = 1.$$
- Násobme první rovnici číslem d, druhou číslem b, a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$,

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, *kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

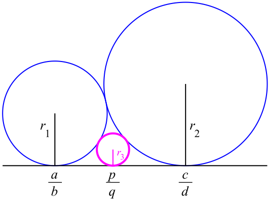
$$pb - aq = 1 \qquad cq - pd = 1 \qquad cb - ad = 1.$$

- Násobme první rovnici číslem d, druhou číslem b, a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$*, kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *(*$\frac{a}{b}$*,* $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$*.*

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

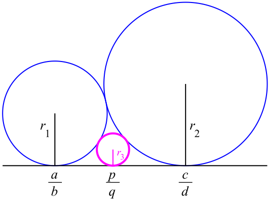
  $$pb - aq = 1 \qquad cq - pd = 1 \qquad cb - ad = 1.$$

- Násobme první rovnici číslem d, druhou číslem b, a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.
- Podobně násobme první rovnici číslem c, druhou číslem a, a sečtěme.

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ *resp.* $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, *kde* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě* $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



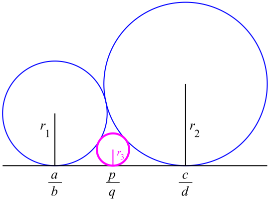
Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme
  $$pb-aq = 1 \qquad cq-pd = 1 \qquad cb-ad = 1.$$
- Násobme první rovnici číslem d, druhou číslem b, a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.
- Podobně násobme první rovnici číslem c, druhou číslem a, a sečtěme. Vyjde $p = \frac{a+c}{cb-ad}$

Tvrzení

Pokud se dotýkají dva Fordovy kruhy se středy $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ resp. $[\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}]$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jsou v základním tvaru), dotýká se jim společný "mezikruh" osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Důkaz.



Hledáme $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ jsou body dotyku tří Fordových kruhů s osou x (viz obrázek).

- Podle předchozího tvrzení máme

$$pb - aq = 1 \qquad cq - pd = 1 \qquad cb - ad = 1.$$

- Násobme první rovnici číslem d, druhou číslem b, a sečtěme. Vyjde $q = \frac{b+d}{cb-ad} = b+d$, podle třetí z rovnic.
- Podobně násobme první rovnici číslem c, druhou číslem a, a sečtěme. Vyjde $p = \frac{a+c}{cb-ad} = a+c$. $\square$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru.*

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz.

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz. (i) Předpokládejmě pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz. (i) Předpokládejmě pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$1 = bc - ad$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz. (i) Předpokládejmě pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$1 = bc - ad = b(a+c) - a(b+d)$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz. (i) Předpokládejmě pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$1 = bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz. (i) Předpokládejmě pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$\begin{aligned} 1 &= bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta \\ &= k\underbrace{(b\alpha - a\beta)}_{\in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz. (i) Předpokládejmě pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

$$\begin{aligned} 1 &= bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta \\ &= k\underbrace{(b\alpha - a\beta)}_{\in\mathbb{Z}}, \quad \text{spor,} \end{aligned}$$

Tvrzení

Mějme $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, *přičemž oba zlomky* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *jsou v základním tvaru. Potom*

(i) *zlomek* $\frac{a+c}{b+d}$ *je v základním tvaru;*

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *(D.cv., plyne přímo)*

Důkaz. (i) Předpokládejmě pro spor, že existují $k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, že

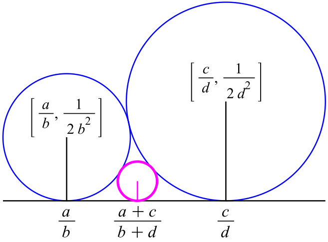
$$a + c = k\alpha, \quad b + d = k\beta.$$

Potom

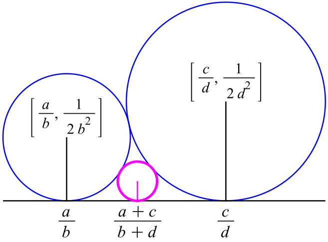
$$\begin{aligned} 1 &= bc - ad = b(a+c) - a(b+d) = bk\alpha - ak\beta \\ &= k\underbrace{(b\alpha - a\beta)}_{\in \mathbb{Z}}, \quad \text{spor, protože } k \geq 2. \end{aligned}$$

□

Shrnutí:

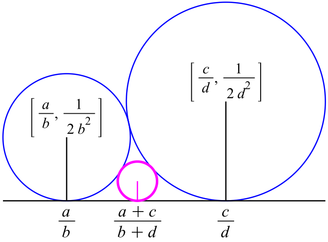

$\left[\frac{a}{b}, \frac{1}{2\,b^2}\right]$
$\left[\frac{c}{d}, \frac{1}{2\,d^2}\right]$
$\frac{a}{b}$
$\frac{a+c}{b+d}$
$\frac{c}{d}$

Shrnutí:



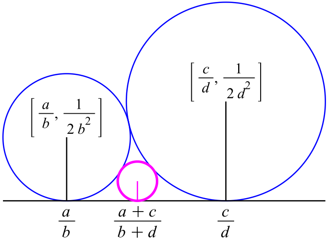
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,

Shrnutí:



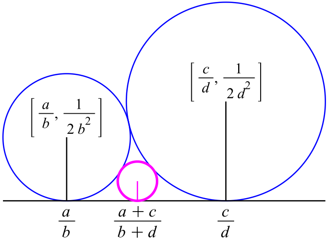
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x

Shrnutí:



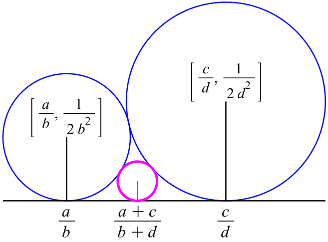
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.

Shrnutí:



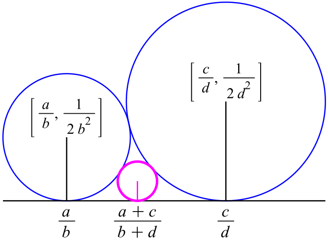
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ a samy sebe,

Shrnutí:



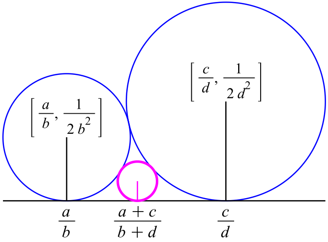
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ a samy sebe, pak $bc - ad = 1$

Shrnutí:



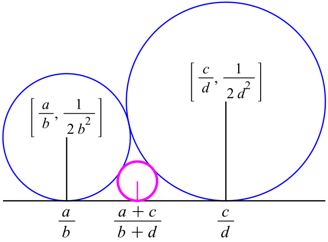
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ a samy sebe, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$.

Shrnutí:



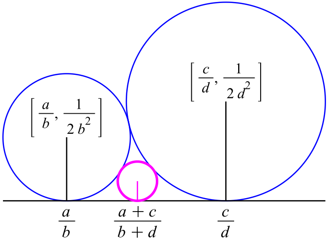
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ a samy sebe, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$. Hodnota $\frac{a+c}{b+d}$ se nazývá **mediantem** zlomků $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

Shrnutí:



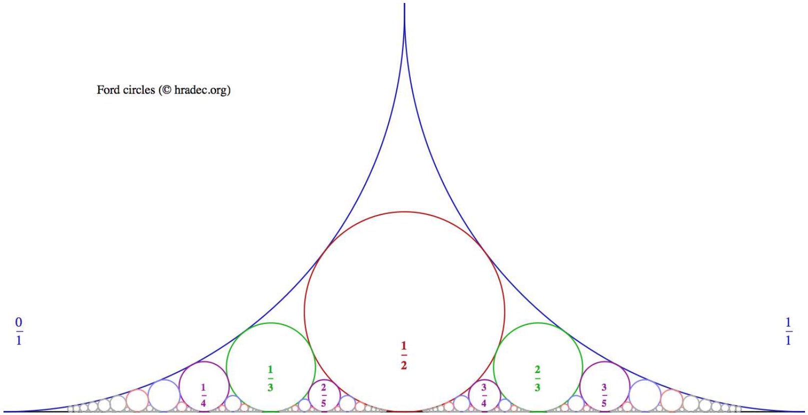
- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ a samy sebe, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$. Hodnota $\frac{a+c}{b+d}$ se nazývá **mediantem** zlomků $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Budeme psát $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Shrnutí:

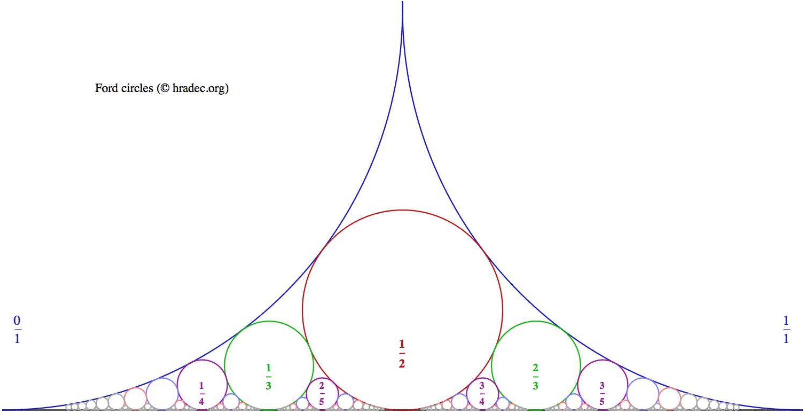


- Všechny Fordovy kruhy mají středy o racionálních souřadnicích tvaru $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$,kde $\frac{a}{b}$ je x-ová souřadnice bodu dotyku tohoto Fordova kruhu s osou x a $\frac{1}{2b^2}$ je jeho poloměr.
- Dotýkají-li se dva Fordovy kruhy osy x v bodech $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ a samy sebe, pak $bc - ad = 1$ a jejich "mezikruh" se dotýká osy x v bodě $\frac{a+c}{b+d}$. Hodnota $\frac{a+c}{b+d}$ se nazývá **mediantem** zlomků $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Budeme psát $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.
- Všechny zde uvedené zlomky jsou v základním tvaru.

Několik Fordových kruhů s vyznačenými hodnotami x-ových souřadnic bodů dotyku:

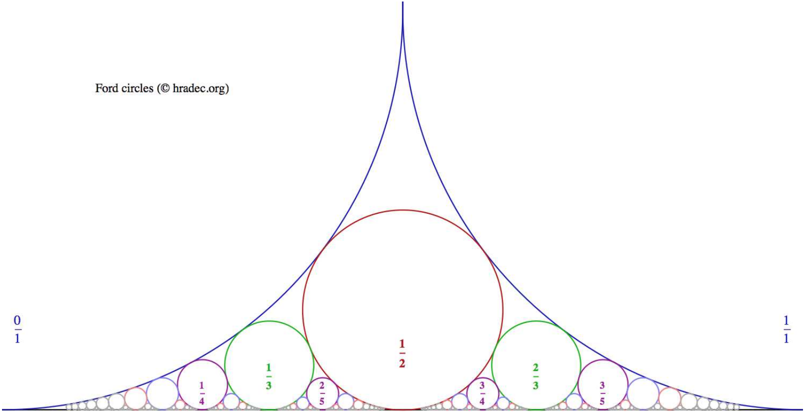


Několik Fordových kruhů s vyznačenými hodnotami *x*-ových souřadnic bodů dotyku:



Poslupnost bodů dotyku je posloupnost *vzájemně různých* racionálních čísel v základním tvaru.

Několik Fordových kruhů s vyznačenými hodnotami x-ových souřadnic bodů dotyku:



Poslupnost bodů dotyku je posloupnost *vzájemně různých* racionálních čísel v základním tvaru. Hierarchii jejich vzniku lze zachytit do stromové struktury.

Sternův-Brocotův strom:

Sternův-Brocotův strom:

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

Sternův-Brocotův strom:

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{1}$

Sternův-Brocotův strom:

$\mathbf{\frac{0}{1}}$				$\mathbf{\frac{1}{1}}$
$\frac{0}{1}$		$\mathbf{\frac{1}{2}}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{1}$

Sternův-Brocotův strom:

$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$

Sternův-Brocotův strom:

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Sternův-Brocotův strom:

$\mathbf{\frac{0}{1}}$																$\mathbf{\frac{1}{1}}$
$\frac{0}{1}$								$\mathbf{\frac{1}{2}}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\mathbf{\frac{1}{3}}$				$\frac{1}{2}$				$\mathbf{\frac{2}{3}}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\mathbf{\frac{1}{4}}$		$\frac{1}{3}$		$\mathbf{\frac{2}{5}}$		$\frac{1}{2}$		$\mathbf{\frac{3}{5}}$		$\frac{2}{3}$		$\mathbf{\frac{3}{4}}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{2}{7}}$	$\frac{1}{3}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\frac{2}{5}$	$\mathbf{\frac{3}{7}}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{4}{7}}$	$\frac{3}{5}$	$\mathbf{\frac{5}{8}}$	$\frac{2}{3}$	$\mathbf{\frac{5}{7}}$	$\frac{3}{4}$	$\mathbf{\frac{4}{5}}$	$\frac{1}{1}$

- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.

Sternův-Brocotův strom:

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.
- Pozor: víme, že všechny zlomky takto vzniklé jsou vždy v základním tvaru.

Sternův-Brocotův strom:

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.
- Pozor: víme, že všechny zlomky takto vzniklé jsou vždy v základním tvaru. Ale: to platí pouze pro zlomky, reprezentující sousední dotykové body Fordových kruhů s osou x,

Sternův-Brocotův strom:

$$\frac{0}{1} \qquad \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$$

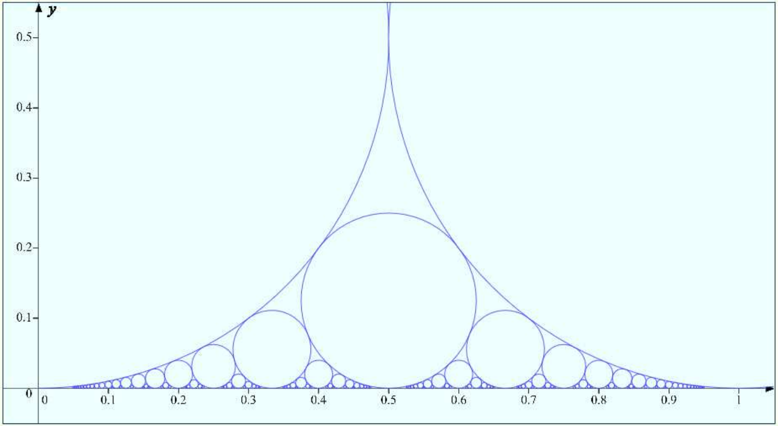
$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{1}$$

- Vznik pomocí "mediantového sčítání" zlomků, ale ne jakýchkoli, pouze těch, které postupně vznikají ze základní dvojice $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$.
- Pozor: víme, že všechny zlomky takto vzniklé jsou vždy v základním tvaru. Ale: to platí pouze pro zlomky, reprezentující sousední dotykové body Fordových kruhů s osou x, viz: $\frac{1}{2} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{9}$.

Z konstrukce: Posloupnost takto vzniklých racionálních čísel je prostá.

Z konstrukce: Posloupnost takto vzniklých racionálních čísel je prostá. (Jsou to body dotyku Fordových kruhů s osou x.)



Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vniknou?

Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vniknou?

Překvapení: VŠECHNA

Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vniknou?

Překvapení: VŠECHNA (Později se k tomu ještě vrátíme.)

Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto vniknou?

Překvapení: VŠECHNA (Později se k tomu ještě vrátíme.)

Sternův-Brocotův strom (resp. seznam všech bodů dotyku Fordových kruhů s osou x), je seznamem všech racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, přičemž každé z nich se v tomto seznamu vyskytuje právě jednou a každé z nich je v něm uvedeno v základním tvaru.

Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto vniknou?

Překvapení: VŠECHNA (Později se k tomu ještě vrátíme.)

Sternův-Brocotův strom (resp. seznam všech bodů dotyku Fordových kruhů s osou x), je seznamem všech racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, přičemž každé z nich se v tomto seznamu vyskytuje právě jednou a každé z nich je v něm uvedeno v základním tvaru.

Drobná odbočka: Sternův-Brocotův strom lze modifikovat tak, aby vygeneroval všechna nezáporná racionální čísla (případně všechna racionální čísla).

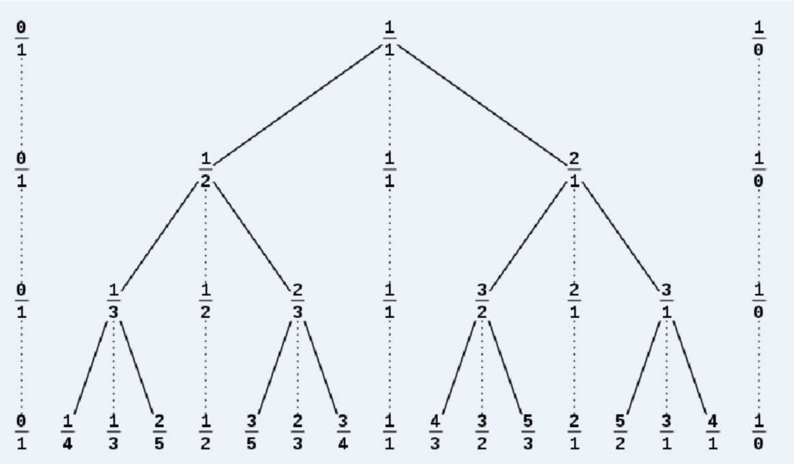
Zásadní otázka: Jaká všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takto vniknou?

Překvapení: VŠECHNA (Později se k tomu ještě vrátíme.)

Sternův-Brocotův strom (resp. seznam všech bodů dotyku Fordových kruhů s osou x), je seznamem všech racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, přičemž každé z nich se v tomto seznamu vyskytuje právě jednou a každé z nich je v něm uvedeno v základním tvaru.

Drobná odbočka: Sternův-Brocotův strom lze modifikovat tak, aby vygeneroval všechna nezáporná racionální čísla (případně všechna racionální čísla). Následující obrázek je návodem, jak to udělat.

Sternův-Brocotův strom
všech nezáporných racionálních čísel



Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

2. Rodiče a děti

Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání na Sternově-Brocotově stromu typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání na Sternově-Brocotově stromu typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.

Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání na Sternově-Brocotově stromu typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku ze Sternova-Brocotova stromu tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče",

Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání na Sternově-Brocotově stromu typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku ze Sternova-Brocotova stromu tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče", a to efektivněji, než hledat, kde se $\frac{p}{q}$ nachází ve Sternově-Brocotově stromu a podívat se, jaké dva zlomky jej vygenerovaly.

Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání na Sternově-Brocotově stromu typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku ze Sternova-Brocotova stromu tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče", a to efektivněji, než hledat, kde se $\frac{p}{q}$ nachází ve Sternově-Brocotově stromu a podívat se, jaké dva zlomky jej vygenerovaly.
- Odpověď je kladná,

Na cestě k náznaku důkazu (o tom, že takto vzniknou všechna racionální čísla):

2. Rodiče a děti

- Při mediantovém sčítání na Sternově-Brocotově stromu typu $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ lze nazvat zlomek $\frac{2}{5}$ "potomkem" zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
- Zajímavější je problém, jestli a jak je možné ke každému zlomku ze Sternova-Brocotova stromu tvaru $\frac{p}{q}$ nalézt jeho "rodiče", a to efektivněji, než hledat, kde se $\frac{p}{q}$ nachází ve Sternově-Brocotově stromu a podívat se, jaké dva zlomky jej vygenerovaly.
- Odpověď je kladná, potřebujeme však k tomu "lehký úvod do teorie řetězových zlomků."

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$
$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1+\frac{4}{9}}$$
$$= 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$
$$= 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$
$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$
$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10+\frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = 10+\frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}} = [10; 1, 2, 3, 1]$$

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$
$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$
$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}} = [10; 1, 2, 3, 1]$$

Obecně (pro $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{N}$):

Příklad: Rozvoj $\frac{139}{13}$ do (konečného) řetězového zlomku.

$$\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = 10 + \frac{1}{\frac{13}{9}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$$

$$= 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = [10; 1, 2, 4]$$

Nejednoznačnost zápisu:

$$[10; 1, 2, 4] = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = 10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}} = [10; 1, 2, 3, 1]$$

Obecně (pro $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots a_n \in \mathbb{N}$):

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 1].$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$,

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13}$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4]$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$*, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \dots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3]$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$*, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{7}}$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n+1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$*, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$*, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$
- $[0; 1, 2]$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n+1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$
- $[0; 1, 2] = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, *pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$
- $[0; 1, 2] = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Tvrzení

Je-li

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$$

pro $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$*, pak jsou řetězové zlomky jeho "rodičů ve Sternově-Brocotově stromu" rovny*

$$[0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad a \qquad [0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Víme $\frac{139}{13} = 10 + \frac{9}{13} = [10; 1, 2, 4] \implies \frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$.
Tedy rodiče $\frac{9}{13}$ jsou $[0; 1, 2, 3]$ a $[0; 1, 2]$.

- $[0; 1, 2, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = \frac{7}{10}$
- $[0; 1, 2] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{7}{10} \oplus \frac{2}{3} = \frac{9}{13}$.

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- Úloha o egyptských zlomcích: lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- Úloha o egyptských zlomcích: lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok:

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- Úloha o egyptských zlomcích: lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies$

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- Úloha o egyptských zlomcích: lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$,

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- Úloha o egyptských zlomcích: lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$, kde $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$.

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- Úloha o egyptských zlomcích: lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$, kde $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$. Pokud je $\frac{p}{q} = 0$, jsme hotovi.

3. Intermezzo: Úloha o egyptských zlomcích

- Egyptské zlomky jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Egypťané uměli zapsat jen čísla přirozená a jejich převrácené hodnoty (s výjimkou speciálního symbolu pro $2/3$).)
- Úloha o egyptských zlomcích: lze každé kladné racionální číslo zapsat jako součet čísla přirozeného a konečného počtu různých egyptských zlomků?
- Jasný první krok: $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0 \implies r = \lfloor r \rfloor + \frac{p}{q}$, kde $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$. Pokud je $\frac{p}{q} = 0$, jsme hotovi.
- V případě $0 < \frac{p}{q} < 1$ pomohou "rodiče a děti ve Sternově-Brocotově stromu".

Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu".

Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \le \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \le 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \tag{3}$$

Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \tag{3}$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Jinak $0 < \frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ a $a < p$.

Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \tag{3}$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Jinak $0 < \frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ a $a < p$. Opakováním tohoto procesu tedy dřív nebo později dostaneme součet pouze egyptských zlomků.

Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \leq 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \tag{3}$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Jinak $0 < \frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ a $a < p$. Opakováním tohoto procesu tedy dřív nebo později dostaneme součet pouze egyptských zlomků. Všimněte si, že je potřeba vžd jen "levý" rodič.

Buď $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionální číslo, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jeho "rodiče ve Sternově-Brocotově stromu". Je $0 \le \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \le 1$, a tedy

$$pb - aq = 1.$$

Tuto rovnost vydělíme $bq \neq 0$ a dostaneme:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bq}. \tag{3}$$

Je-li $a = 0$, je $\frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$ a jsme hotovi. Jinak $0 < \frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ a $a < p$. Opakováním tohoto procesu tedy dřív nebo později dostaneme součet pouze egyptských zlomků. Všimněte si, že je potřeba vžd jen "levý" rodič.

Závěr: úloha o egyptských zlomcích má řešení pro všechna kladná racionální čísla.

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$.

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$,

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$.

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13}$$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} =$$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} =$$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

Podobně (nebo víme i bez výpočtu):

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

Podobně (nebo víme i bez výpočtu): $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$,

Cvičení

- Vyřešme úlohu o egyptských zlomcích pro $\frac{9}{13}$. Máme $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$, jeho "rodiče" jsou tedy $[0; 1, 2, 3] = \frac{7}{10}$ a $[0; 1, 2] = \frac{2}{3}$. Je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} = \frac{9}{13}$$

a podle předchozího tedy lze psát

$$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{bq} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

Podobně (nebo víme i bez výpočtu): $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, a tedy

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{39}.$$

- Pomocí výše zmíněného algoritmu lze ukázat například:

$$\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{228} + \frac{1}{494} + \frac{1}{858}\,.$$

- Pomocí výše zmíněného algoritmu lze ukázat například:

$$\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{228} + \frac{1}{494} + \frac{1}{858} .$$

To je mj. i příklad toho, že tento algoritmus nemusí být vždy efektivní

- Pomocí výše zmíněného algoritmu lze ukázat například:

$$\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{228} + \frac{1}{494} + \frac{1}{858}\,.$$

  To je mj. i příklad toho, že tento algoritmus nemusí být vždy efektivní (lze psát jednodušeji $\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11}$),

- Pomocí výše zmíněného algoritmu lze ukázat například:

$$\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{228} + \frac{1}{494} + \frac{1}{858}.$$

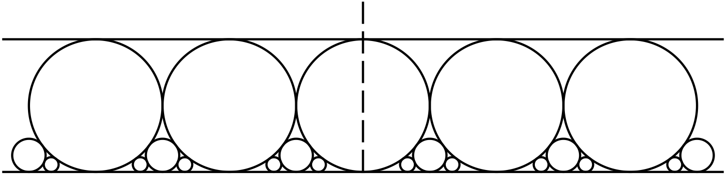
  To je mj. i příklad toho, že tento algoritmus nemusí být vždy efektivní (lze psát jednodušeji $\frac{14}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11}$), jeho důležitost je v tom, že ukazuje, že egyptský problém *vždy lze* vyřešit, a nabízí cestu k jednomu z řešení (ne vždy nejefektivnějšímu).

4. Konečně: symetrie a všechna racionální čísla

Symetrie podle osy y a symetrie vůči posunu o $\pm n$, $n \in \mathbb{N}$

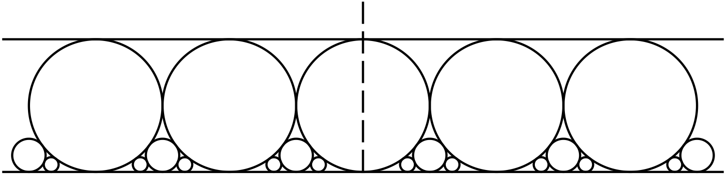
4. Konečně: symetrie a všechna racionální čísla

Symetrie podle osy y
a symetrie vůči posunu o $\pm n$, $n \in \mathbb{N}$



4. Konečně: symetrie a všechna racionální čísla

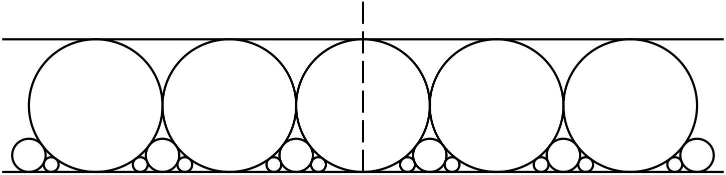
Symetrie podle osy y
a symetrie vůči posunu o $\pm n$, $n \in \mathbb{N}$



- Racionální číslo větší než 1: posun o $-n$ tak, aby leželo v $(0, 1\rangle$.

4. Konečně: symetrie a všechna racionální čísla

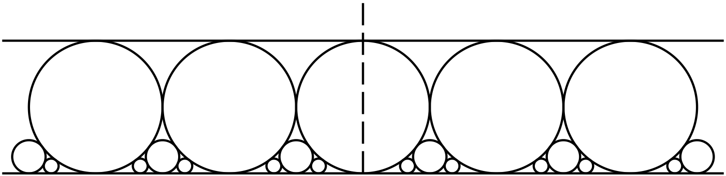
Symetrie podle osy y
a symetrie vůči posunu o $\pm n$, $n \in \mathbb{N}$



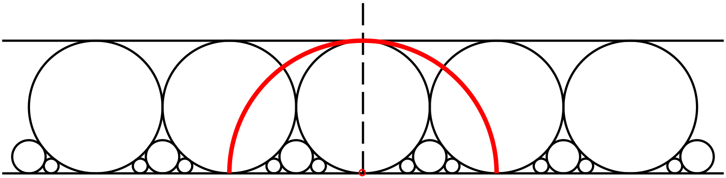
- Racionální číslo větší než 1: posun o $-n$ tak, aby leželo v $(0, 1\rangle$.
- Racionální číslo menší než -1: posun o n nebo symetrie dle osy y.

Kruhová inverze

Kruhová inverze

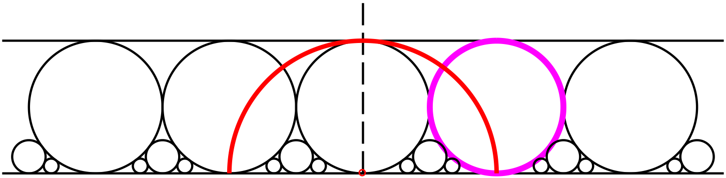


Kruhová inverze



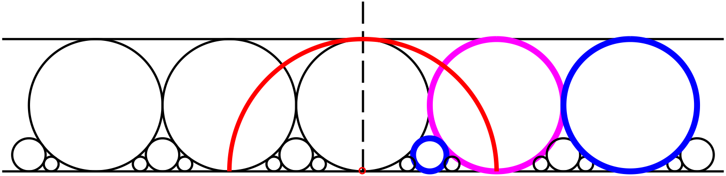
- **Kruhová inverze** (podle kružnice o poloměru 1 a středu $S = [0,0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A', který leží na polopřímce SA, tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
-
-
-
-

Kruhová inverze



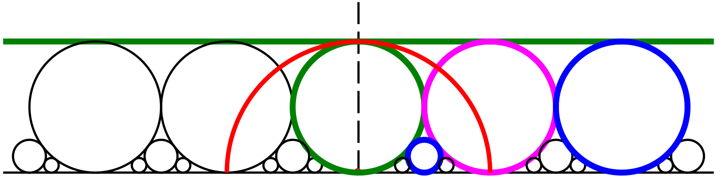
- **Kruhová inverze** (podle kružnice o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A', který leží na polopřímce SA, tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- Fialová kružnice se zobrazí na sebe.

Kruhová inverze



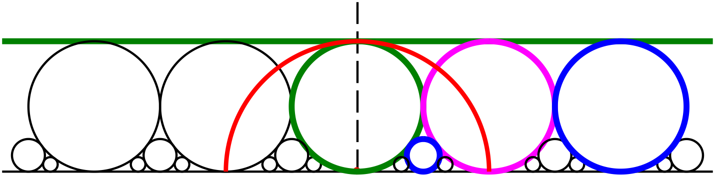
- **Kruhová inverze** (podle kružnice o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A', který leží na polopřímce SA, tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- Fialová kružnice se zobrazí na sebe.
- Modré kružnice jsou si vzájemně vzorem a obrazem.
-
-

Kruhová inverze



- **Kruhová inverze** (podle kružnice o poloměru 1 a středu $S = [0, 0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A', který leží na polopřímce SA, tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- Fialová kružnice se zobrazí na sebe.
- Modré kružnice jsou si vzájemně vzorem a obrazem.
- Zelená kružnice se zobrazí na zelenou přímku a naopak.
-

Kruhová inverze



- **Kruhová inverze** (podle kružnice o poloměru 1 a středu $S = [0,0]$): každý bod $A \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ se zobrazí na bod A', který leží na polopřímce SA, tak, že $|SA| \cdot |SA'| = 1$. (S se zobrazí na ∞ a naopak.)
- Fialová kružnice se zobrazí na sebe.
- Modré kružnice jsou si vzájemně vzorem a obrazem.
- Zelená kružnice se zobrazí na zelenou přímku a naopak.
- Kružnice a přímky zobrazují na kružnice a přímky.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh,

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13}$

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose *x* se zobrazí na body na ose *x* – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}$
  - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$
  - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$
  - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
  - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$
  - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
  - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
  - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2).

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose *x* se zobrazí na body na ose *x* – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$
    - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
    - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
    - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2). Udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose *x* se zobrazí na body na ose *x* – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$
    - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
    - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
    - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2). Udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).
    - Přičti 1.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose *x* se zobrazí na body na ose *x* – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$
  - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
  - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
  - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2). Udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).
  - Přičti 1. Udělej převrácenou hodnotu.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$
  - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
  - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
  - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2). Udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).
  - Přičti 1. Udělej převrácenou hodnotu.
  - Přičti 10.

- Celá struktura všech Fordových kruhů v pásu mezi 0 a 1 se zobrazí na sebe. Body na ose x se zobrazí na body na ose x – dotykové body příslušných Fordových kruhů. Posun Fordova kruhu (přičtení celočíselné hodnoty) je opět nějaký Fordův kruh, kruhová inverze Fordova kruhu (převrácení hodnoty zlomku) je opět Fordův kruh.
- Kde leží například číslo $\frac{139}{13} = 10 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}$
  - Zvol bod o souřadnici $[4, 0]$, reprezentující číslo 4. Ten je dotykovým bodem Fordovy kružnice.
  - Najdi kruhově inverzní bod, reprezentující číslo $\frac{1}{4}$.
  - Přičti 2 (posuň Fordovu kružnici o 2). Udělej převrácenou hodnotu (kruhově inverzní bod).
  - Přičti 1. Udělej převrácenou hodnotu.
  - Přičti 10.

S pomocí rozvoje do řetězových zlomků lze takto ukázat, že každé racionální číslo je bodem dotyku nějakého Fordova kruhu s osou x

5. Závěr, neboli zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

5. Závěr, neboli zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

5. Závěr, neboli zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$\mathbf{\frac{0}{1}}$ $\mathbf{\frac{1}{1}}$

$\frac{0}{1}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{1}$

5. Závěr, neboli zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$

5. Závěr, neboli zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$

5. Závěr, neboli zlatý hřeb

Existuje spousta způsobů, jak se lze pohybovat po Sternově-Brocotově stromu. Jeden z nich je vyjít z bodu, který reprezentuje zlomek $\frac{1}{1}$, a pak se pohybovat "cik-cak", tedy střídavě doleva a doprava.

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Mediantové sčítání zlomků $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ způsobí, že v čitatelích i jmenovatelích takto vznikajících zlomků dostáváme členy Fibonacciho posloupnosti F_n,

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

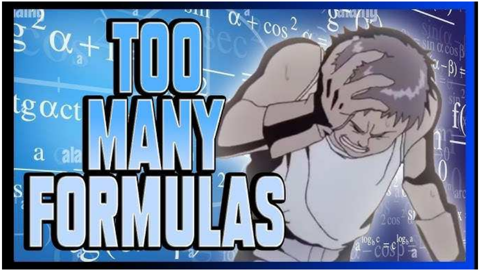
Mediantové sčítání zlomků $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ způsobí, že v čitatelích i jmenovatelích takto vznikajících zlomků dostáváme členy Fibonacciho posloupnosti F_n, tedy všechny takto vzniklé zlomky jsou tvaru $\frac{F_n}{F_{n+1}}$.

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Mediantové sčítání zlomků $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ způsobí, že v čitatelích i jmenovatelích takto vznikajících zlomků dostáváme členy Fibonacciho posloupnosti F_n, tedy všechny takto vzniklé zlomky jsou tvaru $\frac{F_n}{F_{n+1}}$.
Jejich limitou proto je hodnota zlatého řezu

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\ldots$$

A v tomto zlatém okamžiku je vhodné skončit, neboť už bylo načase.



Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 - Karlín

mirko.rokyta@matfyz.cuni.cz