NEROVNOSTI

VĚTA (YOUNGOVA NEROVNOST).

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Je-li navíc $pq > 0$, pak

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $a^p = b^q$.

- Je-li navíc $pq < 0$, pak

$$a \cdot b \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $a^p = b^q$.

DŮKAZ.

Nejprve si uvědomme, že pro $pq \neq 0$ platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff pq = p + q \iff (p-1)(q-1) = 1.$$

Dokažme první variantu Youngovy nerovnosti.

Z předpokladů plyne, že $p, q \in (1, +\infty)$.

Definujme funkci f (proměnné a) předpisem

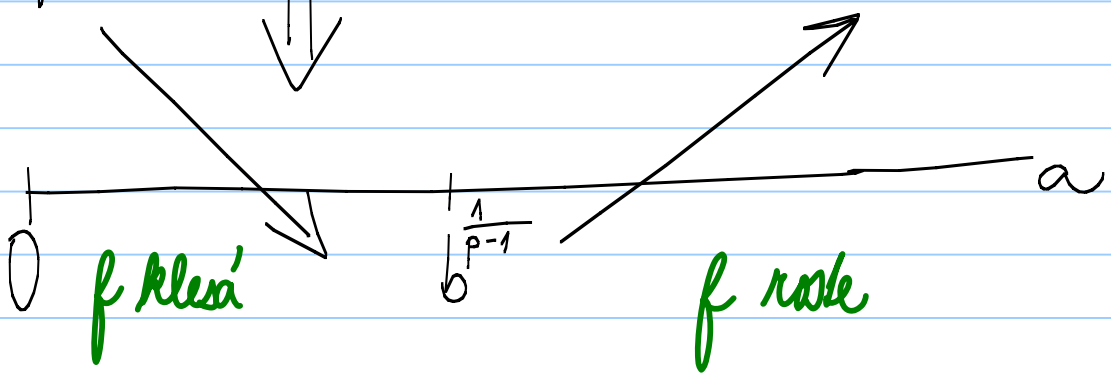
$$f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

[$a > 0$ – proměnná
$b > 0$ – parametr]

Pobřebovali bychom ukázat, že f je nezáporná.

PLATÍ

$$f'(a) = a^{p-1} - b. \qquad (p-1 > 0)$$



ODTUD

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+): \quad f(a) \geq f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} \cdot b^q - b^{\frac{1}{p-1}} \cdot b = \left[\begin{array}{l} \frac{p}{p-1} = q \\ \frac{1}{p-1} = q-1 \end{array}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{p} \cdot b^q + \frac{1}{q} \cdot b^q}_{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \cdot b^q = b^q} - \underbrace{b^{q-1} \cdot b}_{b^q} = 0.$$

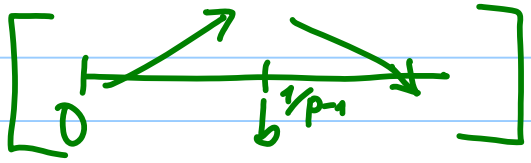
ROVNOST $\iff a = b^{\frac{1}{p-1}} \iff \boxed{a^p = b^q.}$

Případ $pq < 0$ dokážeme zcela analogicky.

Stačí si uvědomit, že platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\wedge\; pq < 0 \implies p, q < 1$$

$\implies$ funkce $f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$ má v bodě $b^{\frac{1}{p-1}}$ maximum, tj.:



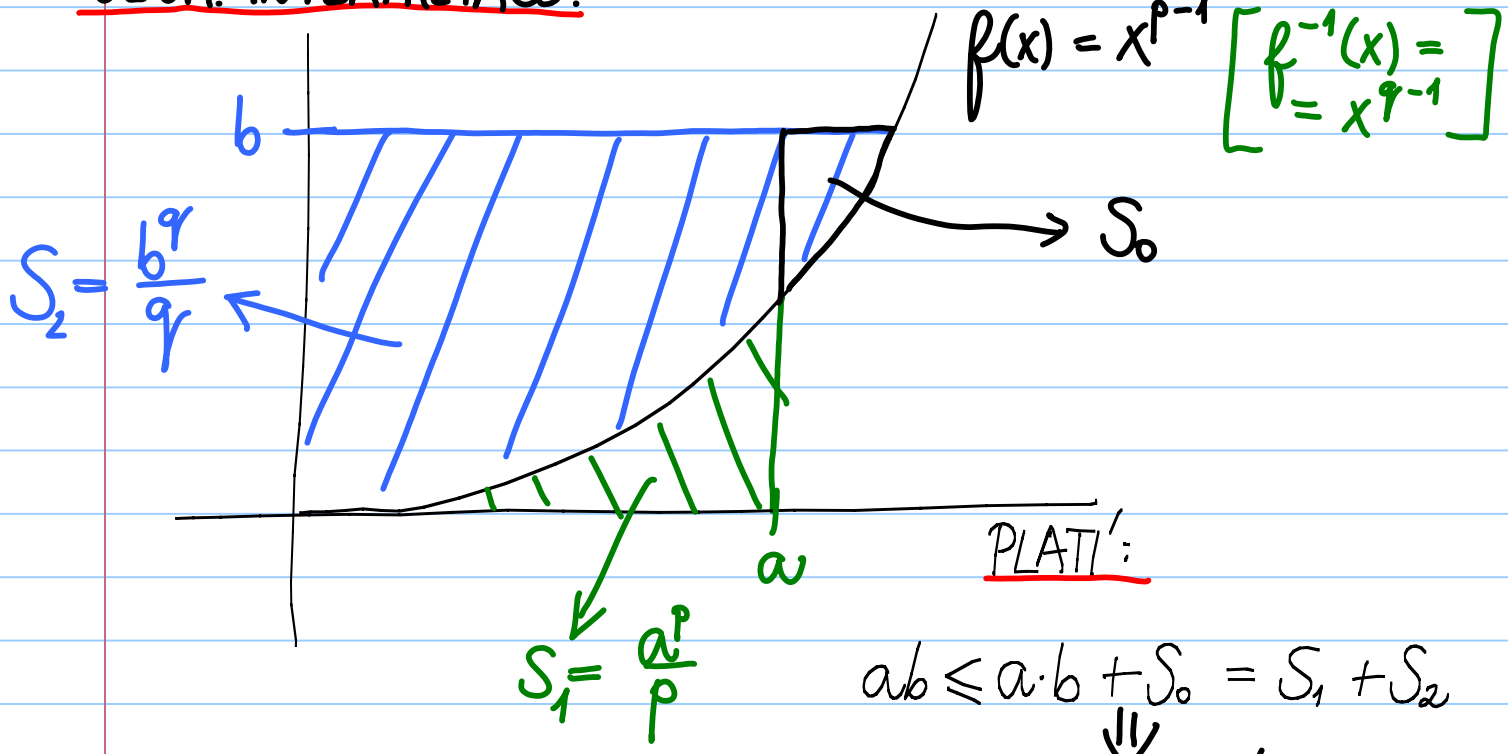
$$(\forall a \in \mathbb{R}^+): f(a) \leq f(b^{\frac{1}{p-1}}) = 0 \implies \text{TVRZENÍ.}$$

□

POZNÁMKA.

V prvním případě zůstává nerovnost v platnosti i pro nulové a nebo b. (Klademe-li $0^p = 0^q = 0$.)

GEOM. INTERPRETACE.



PLATÍ:

$$ab \leq a \cdot b + S_0 = S_1 + S_2$$

$\Downarrow$

TVRZENÍ.

DOMÁCÍ CVIČENÍ.

Pokuste se o geometrický důkaz druhé varianty Youngovy nerovnosti.

DŮSLEDEK (obecná Bernoulliova nerovnost).

Nechť $x \geq -1$ a $p \geq 1$. Pak

$$(1+x)^p \geq 1+px.$$

DŮKAZ.

[$0^0=0$]

Je-li $x=-1$ nebo $p=1$, je tvrzení triviální. Předpokládejme proto, že $x > -1$ a $p > 1$.

Zvolme $q > 1$ tak, aby $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ a použijme Youngovu nerovnost

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

pro $a = 1+x$, $b = 1$.

Odtud

$$1+x \leq \frac{(1+x)^p}{p}+\frac{1}{q} \implies$$

$$\implies \underbrace{1-\frac{1}{q}}_{\frac{1}{p}}+x \leq \frac{(1+x)^p}{p} \quad \overset{\cdot p}{\Longrightarrow} \quad [p \text{ je kladné}]$$

$\Rightarrow$ $\boxed{1+px \leq (1+x)^p}$ $\Rightarrow$ TVRZENÍ. $\square$

DOMÁCÍ CVIČENÍ. Jak by vypadala Bernoulliova nerovnost, pokud by bylo $p < 1$?

VĚTA (HÖLDEROVA NEROVNOST).

Nechť $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $pq > 0$. [odlud $p, q > 1$]

Pak

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p)$ a $(|y_1|^q, \dots, |y_n|^q)$ lin. závislé.

POZNÁMKA.
V případě $pq < 0$ [$\Rightarrow p<0, q \in (0,1)$, nebo naopak] by platila nerovnost s opačným znaménkem. Museli bychom však předpokládat nenulovost čísel x_i popř. y_i.

[Není totiž definováno 0^p pro $p<0$.]

POZNÁMKA.

Zvolíme-li v Höldrově nerovnosti $p = q = 2$, dostaneme známou Cauchyovu nerovnost.

DŮKAZ.

Nechť jsou splněny předpoklady věty. Lze předpokládat, že $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \neq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \neq 0$.

V opačném případě je dokazovaná nerovnost triviální.

OZNAČME

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} > 0 \,, \qquad Y = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} > 0$$

a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ definujme

$$\tilde{x}_i = \frac{|x_i|}{X} \qquad \text{a} \qquad \tilde{y}_i = \frac{|y_i|}{Y} \,.$$

[Všimněme si, že $\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^p = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i^q = 1$.]

Z Youngovy nerovnosti plyne, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i \leq \frac{\tilde{x}_i^p}{p} + \frac{\tilde{y}_i^q}{q} \,.$$

Sčítáním obdržíme

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i \leq \frac{1}{p} \cdot \boxed{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \boxed{\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i^q} = \quad \boxed{=1} \qquad \boxed{=1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ODTUD

$$\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{X} \cdot \frac{|y_i|}{Y} \right) \leq 1, \quad \text{tj.} \quad \boxed{x, y > 0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq X \cdot Y.$$

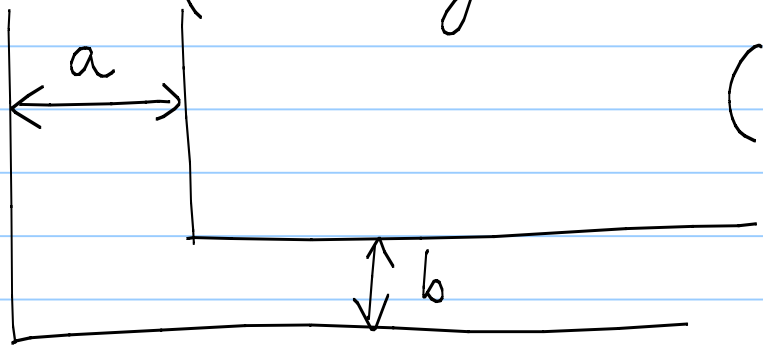
$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad Y = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

DOMÁCÍ CVIČENÍ:

Rozmyslete si dodatek o případné rovnosti a rovněž i případ $pq < 0$!

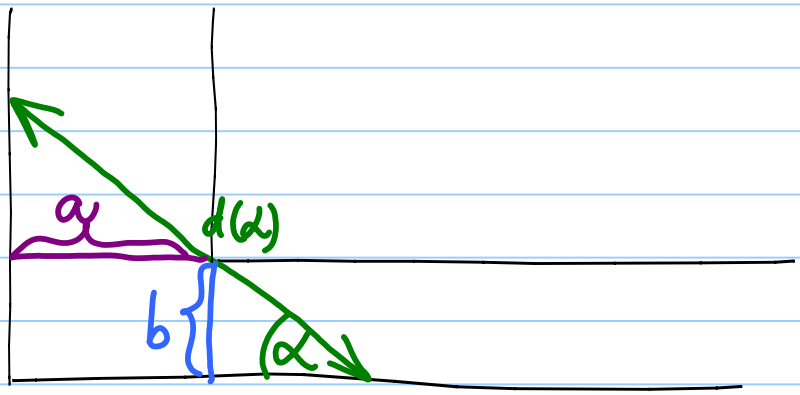
PŘÍKLAD (dvě chodby a žebřík).



($a, b > 0$ – šířky na sebe kolmých chodeb)

Jaký nejdelší žebřík proneseme ve vodorovné poloze?

ŘEŠENÍ.



Délka

$$d(\alpha) = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha}. \qquad (\alpha \in (0, \tfrac{\pi}{2}))$$

Hledáme minimum funkce d (promyslete!)

HÖLDEROVA NEROVNOST $\left(p = -2,\ q = \frac{2}{3}\right)$:

$$d(\alpha) = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\cdot a + \frac{1}{\sin\alpha}\cdot b\right) \geq$$

$$\geq \underbrace{\left[\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}}_{1} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

CELKEM MÁME

$$\left(\forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right): \quad d(\alpha) \geq \underbrace{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{konst.}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když vektory $(\cos^2\alpha, \sin^2\alpha)$ a $\left(a^{\frac{2}{3}}, b^{\frac{2}{3}}\right)$ jsou rovnoběžné, tj.

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\cos^2\alpha} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{\sin^2\alpha} \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \iff \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}.$$

Takové $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jistě existuje $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \min_{\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} d(\alpha) = \underbrace{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{maximální délka žebříku.}}.$$

POZNÁMKA (Höldrova nerovnost v integrálním tvaru).

Nechť f, g jsou spojité na $\langle a, b \rangle$ a $p, q > 1$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. PAK

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

DŮKAZ. – vhodné domácí cvičení.

POZNÁMKA.

Volíme-li $p = q = 2$, dostaneme Cauchyovu nerovnost v integrálním tvaru.