Jak je to s celkovým počtem cifer všech prvočísel od 2 do 10 000 000 a všech prvočísel od 10 000 000 do 20 000 000? Proč jsou obě knihy stejně tlusté? Taková byla otázka na včerejší přednášce.

1 Jednořádkový důkaz

V následujícím jednořádkovém důkazu se dopustím několika aproximací, které výrazně neovlivní výsledek a naopak elegantně zjednoduší důkaz.

1. Počet cifer čísla n aproximuji výrazem $\ln n$. Správně bych měl počítat s desítkovým logaritmem, nicméně použití přirozeného logaritmu ovlivní výsledek multiplikativní konstantou $\frac{1}{\ln 10}$, která je u obou knih stejná a pro účely důkazu ji můžeme vynechat. Dále bych správně měl počítat s celou částí logaritmu zvětšenou o jedničku. Nicméně toto zaokrouhlení se v celkovém počtu cifer prvočísel mezi a a b projeví aditivním členem přibližně rovným $\frac{\pi(b)-\pi(a)}{2}$, což způsobí zanedbatelnou chybu v jednotkách procent, přičemž tato chyba bude u obou knih, čímž se částečně pokrátí.
2. Počet $\pi(n)$ prvočísel do n aproximuji výrazem $\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Tento výraz je relativně složitější než výraz $\frac{n}{\ln n}$, nicméně se mnohem lépe derivuje.

Za použití uvedených aproximací dostaneme, že počet cifer všech prvočísel od a do b je rovný

$$\sum_{n\in(a,b)\cap\mathbb{P}} \ln n = \int_a^b \ln x \,\mathrm{d}\pi(x) \approx \int_a^b \ln x \,\mathrm{d}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_a^b \ln x \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a\,.$$

Pokud tedy mají obě knihy stejný rozsah čísel $b - a = 10^7$, pak musejí být stejně tlusté.

2 Přesnější výpočet

Nyní provedu přesnější aproximace.

1. Počet cifer čísla n je přesně $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$. Tuto hodnotu aproximuji výrazem $\log_{10} n + \frac{1}{2}$.
2. Počet $\pi(n)$ prvočísel do n aproximuji výrazem $\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
3. Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ aproximuji obdélníkovým pravidlem $(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Dále se nám bude hodit integrál

$$\int_a^b \mathrm{d}\pi(x) \approx \int_a^b \mathrm{d}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} \approx \frac{b-a}{\ln \frac{a+b}{2}}\,.$$

Za použití výše uvedeného dostaneme, že počet cifer všech prvočísel od a do b je rovný

$$\sum_{n\in(a,b)\cap\mathbb{P}} \left(\log_{10} n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\ln 10}\int_a^b \ln x \,\mathrm{d}\pi(x) + \frac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}\pi(x) \approx (b-a)\left(\frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{2\ln\frac{a+b}{2}}\right).$$

Pro $a = 2$ a $b = 10\,000\,000$ dostáváme celkový počet cifer přibližně

$$4\,667\,094\,.$$

Pro $a = 10\,000\,000$ a $b = 20\,000\,000$ dostáváme celkový počet cifer přibližně

$$4\,645\,543\,.$$

Obě knihy proto musejí být stejně tlusté.